ОБ ОДНОМ АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ДВУХФАНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА С ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТЬЮ ТЕПЛОВОГО ВЛИЯНИЯ

Р. Г. Зайнуллин (Уфа, Россия)

Излагается новый аналитический подход в развитии теории интегральных преобразований к решению одномерной нестационарной задачи теплообмена с фазовым переходом на примере процесса кристаллизации некоторой сплошной среды под воздействием плоского источника холода. Аналитический подход при решении краевых задач теплообмена в системах со свободными границами относится к числу труднейших проблем в современной аналитической теории математической физики. Вследствие зависимости положения характеристического раздела области от времени к этому классу задач неприменимы классические методы дифференциальных уравнений в частных производных, так как оставаясь в рамках этих методов не удаётся согласовать решение уравнения теплопроводности с движением свободной границы.

В статье изучается двухфазная задача Стефана с границами, перемещающимися по идентичному закону с точностью до постоянного множителя. В начальный момент времени среда обладает постоянной температурой $t_0 > 0$ при $x \geqslant a\xi_0$. Внешняя поверхность среды обладает температурой $t_e < 0$. Образуются зоны промерзания ($k = 1$) и охлаждения ($k = 2$), и граница фазового перехода с течением времени продвигается внутрь среды. Математическую модель этого процесса для одномерной схемы можно представить в виде:

$$\frac{\partial t_k\left(x,\tau\right)}{\partial\tau}=a_k\frac{\partial^2 t_k\left(x,\tau\right)}{\partial x^2}; \tag{1}$$

$$x\in D_1(\tau)=\{0<x<\xi_1\left(\tau\right)\}\quad \text{при}\quad k=1,$$

$$x\in D_2(\tau)=\{\xi_1\left(\tau\right)<x<\xi_2\left(\tau\right)\}\quad \text{при}\quad k=2,$$

$$\tau>0,\xi_1\left(+0\right)=\xi_0>0,\xi_2\left(\tau\right)=a\xi_1\left(\tau\right),a>1;$$

$$t_1\left(x,0\right)=\left(1-\frac{x}{\xi_0}\right)t_e;\qquad t_2\left(x,0\right)=\frac{x-\xi_0}{\left(a-1\right)\xi_0}t_0; \tag{2}$$

$$t_1\left(0,\tau\right)=t_e;\qquad t_k\left(\xi_1\left(\tau\right),\tau\right)=0;\qquad t_2\left(\xi_2\left(\tau\right),\tau\right)=t_0; \tag{3}$$

$$\lambda_1\frac{\partial t_1\left(\xi_1\left(\tau\right),\tau\right)}{\partial x}-\lambda_2\frac{\partial t_2\left(\xi_1\left(\tau\right),\tau\right)}{\partial x}=\sigma\rho\frac{d\xi_1\left(\tau\right)}{d\tau}. \tag{4}$$

Здесь a_k и λ_k – коэффициенты температуропроводности и теплопроводности в $D_k(\tau),\sigma$ – скрытая теплота кристаллизации, a – безразмерный параметр теплового влияния [2]. Требуется найти неизвестные функции $t_k\left(x,\tau\right)$ и $\xi_1\left(\tau\right)$ в предположении, что $t_k(x,\tau)\in C^2(D_k(\tau))\bigcap C^0(\overline{D}_k(\tau))$, $\operatorname{grad} t_k(x,\tau)\in C^0(\overline{D}_k(\tau)),\tau\in]0,T[;t_k(x,\tau)\in C^0(D_k(0)),\xi_1(\tau)\in C_1]0,T[$,

Задача преобразуется к области с неподвижными границами с неоднородной правой частью и переменными коэффициентами в исходном уравнении, но с однородными краевыми условиями, и далее, для решения преобразованной задачи строится интегральное преобразование по пространственной координате с неизвестным ядром, нахождение которого связано с постановкой и решением соответствующей спектральной задачи через вырожденные гипергеометрические функции. Собственные значения находятся с использованием известных асимптотических разложений для решений уравнения второго порядка в вещественной окрестности точки поворота из следующих характеристических уравнений

$$Bi(\beta_k^{2/3}\eta(y_2,\beta_k^{-1}))Ai(\beta_k^{2/3}\eta(y_1,\beta_k^{-1}))-Ai(\beta_k^{2/3}\eta(y_2,\beta_k^{-1}))Bi(\beta_k^{2/3}\eta(y_1,\beta_k^{-1}))=0$$

с точностью до порядка $O(\beta_k^{-1})$, где $y_1=0,\quad y_2=1$ при $k=1,\quad y_1=1,\quad y_2=a$ при $k=2,\quad x=y\xi_1(\tau)$,

$$b_{k,\gamma}=1-\left(\frac{\mu_{k,\gamma}}{\Lambda}\right)^2,\qquad \beta_k=\left(\frac{\Lambda}{2a_k}\right)^2\qquad y_{k,\gamma}=\sqrt{\frac{3-4b_{k,\gamma}}{\beta_k}},$$

$$\eta(y,\beta_k^{-1})=\left(\frac{3}{2}\int\limits_{y_{k,\gamma}}^{y}|y^2-y_{k,\gamma}^2|^{1/2}dy\right)^{2/3}sgn(y-y_{k,\gamma}),$$

причем точка $y_{k,\gamma}$ называется точкой поворота, а $\mu_{k,\gamma}^2$ – собственные значения, $\gamma\in NI$.

Новый подход в развитии теории интегральных преобразований в конечном счете приводит к получению формулы обращения, что позволяет выписать аналитическое решение задачи и рассмотреть ряд частных случаев.

В ходе решения задачи устанавливается параболический закон движения границы раздела двух фаз:

$$\xi_1(\tau) = \sqrt{\Lambda^2\tau + \xi_0^2},$$

Параметр Λ подлежит определению через условие Стефана.

Литература

1. Шафеев М. Н. *Решение одной плоской задачи Стефана методом ВГГП*// Инженерно-физический журнал. 1978. Т.34, №4. С. 713–722.

2. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. *Специальные функции математической физики.* М.: Наука, 1984.

3. Федорюк М. В. *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*. М.: Наука, 1983.