

# ИНТЕГРИРУЕМЫЕ НЕАБЕЛЕВЫ УРАВНЕНИЯ

С. П. Баландин (УФА, Россия)

В работе [1] были предложены и исследованы на интегрируемость по тесту Пенлеве–Ковалевской неабелевы аналоги двух уравнений Пенлеве:

$$U''_{zz} = 6U^2 + zB + A, \quad (1)$$

$$U''_{zz} = 2U^3 + zU + C \quad (2)$$

в алгебре  $n \times n$  матриц. Авторами была доказана

**Теорема.** *Критерием интегрируемости в смысле Пенлеве является условие  $B = \beta E, C = \alpha E$ , где  $E$  — единица ассоциативной алгебры, а  $\alpha, \beta$  — скаляры.*

Заметим, что в отличие от скалярного случая, матричное уравнение (1) содержит произвольный постоянный параметр  $A$  и не сводится к уравнению  $U''_{zz} = 6U^2 + zE$ , указанному, например, в статье [2].

Подробно о скалярных уравнениях Пенлеве, тесте Пенлеве–Ковалевской и его связях с интегрируемостью см., например, книгу [3].

Позже уравнение (1) было обобщено и исследовано в работе [4] введением в правую часть дополнительного слагаемого в виде коммутатора постоянной матрицы с искомой.

В докладе [5] вводятся два новых обобщения уравнений (1),(2):

$$u''_{zz} = 6u^2 + 12 \sum_{k=0}^l (\alpha_k u + \beta_k) z^k, \quad (3)$$

$$u''_{zz} = 2u^3 + 2 \sum_{k=0}^m (\gamma_k u + u\delta_k + \varepsilon_k) z^k \quad (4)$$

также в алгебре  $n \times n$  матриц.

Решение ищется в виде ряда Лорана. Подстановка ряда в уравнение приводит к цепочке соотношений на неабелевы коэффициенты ряда. Как предложено в работе [1], их удобно переписать в виде задач на собственные значения линейного оператора  $L$ . При этом начальный коэффициент  $u_0$  обладает идемпотентностью и представляется в жордановой форме. Используя это и зная спектр линейного оператора, можно определить остальные коэффициенты ряда. При этом возникают соотношения на параметры, которые и являются условиями интегрируемости исследуемых уравнений. В силу жордановости  $u_0$  параметры также имеют соответствующую жорданову структуру, причем некоторые жордановы клетки состоят из нулей. Однако, параметр  $\beta_0$ , как и в предыдущих работах, остается произвольным.

### Литература

1. Balandin S. P., Sokolov V. V. *On the Painlevé test for non-Abelian equations* // Phys. Lett. A. 1998. V. 246, No. 3–4. PP. 267–272.
2. Inozemtzeva N. G., Sadovnikov B. I. *On exact solutions for some matrix equations* // Regular and chaotic dynamics. 1998. V. 3, No. 1. PP. 78–85.
3. Гориели Алан. *Интегрируемость и сингулярность*, М.: Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2006.
4. Баландин С. П., Нечаева М. С. *Об интегрируемости по Пенлеве неабелевых уравнений* // Актуальные проблемы математики. Математические модели современного естествознания: Межвузовский научный сборник. 2004. Уфа. С. 54–58.
5. Баландин С. П., Черданцев И. Ю. *Интегрируемые обобщения неабелевых аналогов 1 и 2 уравнений Пенлеве* // Уфимская международная математическая конференция, посвященная памяти А. Ф. Леонтьева: сборник материалов. 2007. С. 1. С. 30–31.