УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА И ПОСТРОЕНИЕ ЕГО ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ

А. И. Андрушкевич (Минск, Беларусь), И. Е. Андрушкевич (Новополоцк, Беларусь)

Уравнение Кортевега-де Фриза в канонической форме имеет вид [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{1}$$

Оно широко используется в прикладных исследованиях во многих разделах физики и механики для описания одномерных нелинейных волн. В частности, на нем основано моделирование волн умеренной амплитуды на поверхности неглубокой жидкости.

Принято считать [1] , что проинтегрировать уравнение (1) удается только методом обратной задачи рассеяния.

Авторами данной работы изучался вопрос о возможности построения решениий уравнения (1) с использованием обобщённого метода Фурье разделения переменных [2] .

В соответствии с теоремой Колмогорова *«О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного»* [3], решения уравнения (1) представлялись в виде

$$u\,(x,t) = \sum_{i=1}^{S} \chi_i\,(x)\,\tau_i\,(t)\,, \quad 1 \leqslant S \leqslant 10. \tag{2}$$

Далее, используя хорошо отработанную методологию применения обобщенного метода Фурье разделения переменных, для каждого класса функций вида (2) нами строились системы обыкновенных дифференциальных уравнений, эквивалентные уравнению (1). Для уравнения (1) при $S = 1$ таких систем две, при $S = 2$ их уже 5, при $S = 3$ – 7 и т. д. Приведем одну из них для случая $S = 3$:

$$\chi_1''' = \alpha_{4,1}\chi_1 + \alpha_{4,2}\chi_2 + \alpha_{4,3}\chi_3, \chi_2''' = \alpha_{5,1}\chi_1 + \alpha_{5,2}\chi_2 + \alpha_{5,3}\chi_3,$$
$$\chi_{31}''' = \alpha_{6,1}\chi_1 + \alpha_{6,2}\chi_2 + \alpha_{6,3}\chi_3;$$
$$-6\chi_1\chi_1' = \alpha_{7,1}\chi_1 + \alpha_{7,2}\chi_2 + \alpha_{7,3}\chi_3, -6\chi_2\chi_2' = \alpha_{8,1}\chi_1 + \alpha_{8,2}\chi_2 + \alpha_{8,3}\chi_3,$$
$$-6\chi_3\chi_3' = \alpha_{9,1}\chi_1 + \alpha_{9,2}\chi_2 + \alpha_{9,3}\chi_3;$$
$$-6\{\chi_1\chi_2' + \chi_2\chi_1'\} = \alpha_{10,1}\chi_1 + \alpha_{10,2}\chi_2 + \alpha_{10,3}\chi_3,$$
$$-6\{\chi_1\chi_3' + \chi_3\chi_1'\} = \alpha_{11,1}\chi_1 + \alpha_{11,2}\chi_2 + \alpha_{11,3}\chi_3,$$
$$-6\{\chi_2\chi_3' + \chi_3\chi_2'\} = \alpha_{12,1}\chi_1 + \alpha_{12,2}\chi_2 + \alpha_{12,3}\chi_3;$$
$$-\tau_1' = \alpha_{4,1}\tau_1 + \alpha_{5,1}\tau_2 + \alpha_{6,1}\tau_3 + \alpha_{7,1}\tau_1^2 +$$
$$+\alpha_{8,1}\tau_2^2 + \alpha_{9,1}\tau_3^2 + \alpha_{10,1}\tau_1\tau_2 + \alpha_{11,1}\tau_1\tau_3 + \alpha_{12,1}\tau_2\tau_3,$$
$$-\tau_2' = \alpha_{4,2}\tau_1 + \alpha_{5,2}\tau_2 + \alpha_{6,2}\tau_3 + \alpha_{7,2}\tau_1^2 + \tag{3}$$
$$+\alpha_{8,2}\tau_2^2 + \alpha_{9,2}\tau_3^2 + \alpha_{10,2}\tau_1\tau_2 + \alpha_{11,2}\tau_1\tau_3 + \alpha_{12,2}\tau_2\tau_3,$$

$$-\tau_3' = \alpha_{4,3}\tau_1 + \alpha_{5,3}\tau_2 + \alpha 6,3\tau_3 + \alpha_{7,3}\tau_1^2 +$$
$$+\alpha_{8,3}\tau_2^2 + \alpha_{9,3}\tau_3^2 + \alpha_{10,3}\tau_1\tau_2 + \alpha_{11,3}\tau_1\tau_3 + \alpha_{12,3}\tau_2\tau_3,$$

где $\alpha_{i,j}$ – постоянные разделения.

Решая системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида (3), нам удалось получить как известные решения типа рациональных и автомодельных [1] , так и ряд новых.

Для построения других типов решений (решения типа бегущей волны, солитонные решения, периодические решения [1]), в уравнении (1) мы осуществили преобразование переменных

$$z = x - vt,\ t = t,\ v = const, \tag{4}$$

в результате чего оно приобрело вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} - (v + 6u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{5}$$

Решения уравнения (5) строились в виде, аналогичном (2)

$$u(z,t) = \sum_{i=1}^{S} \chi_i(z)\,\tau_i(t)\,, \quad 1 \leqslant S \leqslant 10. \tag{6}$$

Повторяя далее рассуждения (1) – (3), нам удалось получить ряд решений (как известных, так и новых) типа бегущей волны.

Таким образом, проведенные исследования показали, что наряду с методом обратной задачи рассеяния, обобщенный метод Фурье разделения переменных является перспективным инструментом для моделирования нелинейных волновых процессов.

Литература

1. Полянин, А. Д. *Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения* / А. Д.Полянин, В. Ф. Зайцев. М.:ФИЗМАТЛИТ. 2002. 432 с.

2. Андрушкевич, И. Е. Об одном обобщении метода Фурье разделения переменных / И. Е. Андрушкевич // *Электромагнитные волны и электронные системы.* 1998. Т. 3, № 4. С. 4–17.

3. Колмогоров, А. Н. *О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного* / А. Н. Колмогоров // Доклады АН СССР. 1957. Т. 114, № 5. С. 953–956.