Секция 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ

ОБ УРАВНЕНИЯХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ПОДВИЖНОЙ ОСОБОЙ ЛИНИЕЙ

Т. К. Андреева, И. П. Мартынов, В. А. Пронько (Гродно, Беларусь)

Рассмотрим автономное дифференциальное уравнение

$$\begin{gathered}(y'-y^2)y^2y''' = y^2y''^2 + a_1yy'^2y'' + a_2y'^4 + a_3y^3y'y'' + \\ + a_4y^2y'^3 + a_5y^5y'' + a_6y^4y'^2 + a_7y^6y' + a_8y^8.\end{gathered} \tag{1}$$

Уравнение (1) заменим системой

$$y' = y^2u, \quad (u-1)u'' = u'^2 - p(u)u'y - q(u)y^2, \tag{2}$$

где $p(u) = (2-a_1)u^2 - (a_3+6)u - a_5$, $q(u) = (2-2a_1-a_2)u^4 - (2a_3+a_4+6)u^3 - (2a_5+a_6)u^2 - a_7u - a_8$.

Пенлеве-анализ уравнения (1) при $p(1) = q(1) = 0$, $2-2a_1-a_2 \neq 0$ содержится в [1; 2], при $a_1 = a_2 = 0$, $p(1) \neq 0$ в [3], при $q(1) = 0$, $2a_1+a_2 = 2$ в [4]. В [5] для уравнения (1) получены некоторые необходимые условия отсутствия подвижных критических особых точек и условия существования двухпараметрических семейств решений, подвижные особые точки которых однозначны.

Имеют место

Лемма 1. *([5; 6]) Для однозначности решений системы (2), где $p(1) \neq 0$, необходимо*

$$q(1) = 0, \quad q'(1) + p(1)(1+p'(1)) = 0. \tag{3}$$

Лемма 2. *При выполнении условий (3) уравнение (1) можем представить в виде*

$$\begin{gathered}\left(\frac{y''+\beta yy'+\gamma y^3}{y'-y^2} + \lambda\frac{y'}{y}\right)' = A_1y\left(\frac{y''+\beta yy'+\gamma y^3}{y'-y^2} + \lambda\frac{y'}{y}\right) + \\ + B_1\frac{y'}{y}\left(\frac{y''+\beta yy'+\gamma y^3}{y'-y^2} + \lambda\frac{y'}{y}\right) + C_1y' + D_1y^2,\end{gathered} \tag{4}$$

где λ – корни многочлена $\varphi(\lambda) = \lambda^2+(a_1+1)\lambda-a_2$, а коэффициенты γ, A_1, B_1, C_1, D_1 определяются из соотношений $\beta+\gamma+2 = -p(1)$, $A_1 = \quad = a_1+a_3-\lambda+2$, $B_1 = a_1+\lambda$, $C_1 = \beta(1-a_1-\lambda)+\lambda^2-(a_1+a_3+2)\lambda+2a_2+a_4$, $D_1 = \quad = \gamma(a_1+a_3+2-\lambda)+a_8$.

Рассмотрим уравнение (1) при

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = -\frac{1}{2}, a_3 = -1, a_4 = -\frac{15}{2}, a_5 = \frac{5}{2}, a_6 = \frac{25}{2}, a_7 = -\frac{25}{2}, a_8 = 0. \tag{5}$$

Согласно [7] уравнение (1) с коэффициентами (5) проходит тест Пенлеве.

1. Если в (4) положить (5) и $\lambda = -1$, $\beta = 4$, $6\omega = \dfrac{yy''-y'^2+5y^2y'}{y'-y^2}$, то $y = \dfrac{6\omega^2\omega'}{\omega\omega''-\omega'^2+18\omega^3}$ и уравнение для ω имеет вид

$$\omega'\omega''' = \omega''^2 + 6\omega(3\omega\omega''-4\omega'^2). \tag{6}$$

2. Если в (4) положить (5) и $\lambda = -\dfrac{1}{2}$, $\beta = \dfrac{13}{2}$, $12v = \dfrac{yy'' - \frac{1}{2}y'^2 + 7y^2y' - \frac{5}{2}y^4}{y(y' - y^2)}$, то $y = \dfrac{6v'^2}{12vv' - v''}$ и уравнение для v имеет вид $v''' = 12vv'' - 18v'^2$. Согласно [8] оно является уравнением с подвижной особой линией .

3. Если в (6) положить $3x = \dfrac{\omega'}{\omega}$, то $6\omega = \dfrac{xx'' - x'^2 + 3x^2x'}{x' - x^2}$ и уравнение для x имеет вид

$$(x' - x^2)x''' = x''^2 - 7x'^3 + 12x^2x'^2 - 9x^4x'. \tag{7}$$

Таким образом, верна

Теорема. *Уравнения (6), (7) и уравнение (1) с коэффициентами (5) являются уравнениями с подвижной особой линией.*

Литература

1. Мартынов, И. П. *Об уравнениях третьего порядка без подвижных критических особенностей* / И. П. Мартынов // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, №6. С. 937- 946.

2. Мартынов, И. П. *Аналитические свойства решений одного дифференциального уравнения третьего порядка* / И. П. Мартынов // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 5. С. 764–771.

3. Мартынов, И. П. *Об одном уравнении третьего порядка типа Пенлеве* / И. П. Мартынов, В. А. Пронько // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24, № 9. С. 1640 – 1641.

4. Андреева, Т. К. *Аналитические свойства решений одного класса дифференциальных уравнений третьего порядка* / Т. К. Андреева // Известия ГГУ. 2009. № 2(53) С. 134–138.

5. Белясова, В.Г. *Аналитическая характеристика решений нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка специального вида*: дис.... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / В. Г. Белясова. Минск, 1994. 77 л.

6. Березкина, Н. С. *Об одном классе дифференциальных уравнений третьего порядка без подвижных критических особенностей* / Н.С. Берёзкина, И. П. Мартынов, В. А. Пронько // Четвертые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям: тез. докл. междунар. конф., Минск, 7–10 декабря 2005 г. Мин-во образования РБ, Бел. гос. ун-т, Ин-т мат. НАН Беларуси. Минск, 2005. С. 4–5.

7. Андреева, Т. К. *Об одном уравнении третьего порядка без подвижных критических особенностей* / Т. К. Андреева, И. П. Мартынов, В. А. Пронько // Актуальные проблемы анализа: тез. докл. междунар. матем. конф., Гродно, 7 – 10 апреля 2009 г. ГрГУ. – Гродно, 2009. – С. 112 – 114.

8. Chazy, J. *Sur les équations différentielles du troisième ordre et d'ordre supérieur, dont l'integrale à ses points critiques fixes*/ J. Chazy //Acta Math. 1911. V. 34. P. 317–385.