СЕТЬ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЗАЯВКАМИ И СИГНАЛАМИ И ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ИХ ВРЕМЯ ПРЕБЫВАНИЯ В УЗЛАХ

О. Якубович

Гомельский государственный университет
Гомель, Беларусь
yakubovich@gsu.by

В настоящей работе исследуется модель открытой сети, в узлах которой формируются три очереди из поступающих положительных, отрицательных заявок и сигналов. Время пребывания в каждом узле поступающих требований ограничено случайной величиной, имеющей показательное распределение. Сигнал оказывает на состояние узла одно из воздействий: уменьшает длину очереди положительных заявок на единицу, увеличивает длину очереди положительных заявок на единицу или не производит никакого изменения. Определено условие эргодичности марковского процесса, описывающего функционирование сети, стационарное распределение вероятностей состояний найдено в форме произведение множителей, представляющих собой стационарные распределения изолированных узлов.

Ключевые слова: открытая сеть, положительные заявки, отрицательные заявки, сигналы, ограниченное время пребывания, условие эргодичности, стационарное распределение.

1. ВВЕДЕНИЕ

В аналитических исследованиях стационарного функционирования сетей массового обслуживания ключевым является вопрос о нахождении стационарного распределения, которое является отправной точкой большинства исследований в теории массового обслуживания. Для точного нахождения стационарного распределения многомерного процесса, описывающего поведение сети массового обслуживания, используют возможность мультипликативного представления распределения, множители которого характеризуют отдельные узлы. Требования современности диктуют необходимость развития аналитического аппарата исследования объектов, имеющих сетевую структуру, что приводит к появлению новых интересных моделей сетей массового обслуживания. Использование сложных математических моделей открывает возможности эффективного конструирования и эксплуатации исследуемых систем. В последнее время большой интерес исследователей вызывают модели с отрицательными заявками и сигналами, отличающимися от обычных положительных заявок тем, что они не нуждаются в реальном обслуживании, а оказывают некоторое воздействие на состояние системы, например, отрицательные заявки уменьшают очередь обычных заявок непустой системы на единицу. Отрицательные заявки были впервые введены в рассмотрение Геленбе [1, 2].

В настоящей работе рассматривается модель открытой сети, в которую поступают пуассоновские потоки положительных заявок, отрицательных заявок и сигналов. Очереди в узлах формируются из положительных заявок, отрицательных заявок и сигналов. Обслуживания требуют только положительные заявки. Время пребывания в очереди узла для положительных, отрицательных заявок и сигналов ограничено случайной величиной, имеющей экспоненциальное распределение с параметром обратно пропорциональным количеству соответствующих требований, находящихся в узле. Отрицательная заявка, время пребывания в узле которой закончилось, уменьшает количество положительных заявок в узле на единицу, если такие есть в узле. Сигнал после окончания времени пребывания оказывает одно из следующих воздействий на очередь положительных заявок, находящихся в узле: уменьшает длину очереди на единицу, если очередь положительных заявок непуста, увеличивает длину очереди на единицу или не производит никакого изменения. Данное предположение может найти применение в моделировании реальных сетей связи, поскольку при передаче запроса часто устанавливается так называемый тайм-аут, истечение которого означает, что передача запроса не укладывается в планируемый интервал времени, после чего запрос удаляется из очереди. Отрицательные заявки и сигналы в рассматриваемой модели, например, могут описывать вирусы в системе, которые начинают действовать через случайное время, при этом сигнал либо „исправляется“ — становится положительной заявкой, либо „несет разрушение“, уничтожает положмтельную заявку в системе — становится отрицательной заявкой, либо „отражается“, „уничтожается “— не оказывает воздействия на узел.

2. ИЗОЛИРОВАННЫЙ УЗЕЛ

Рассмотрим систему массового обслуживания, в которую поступает три независимых пуассоновских потока положительных заявок, отрицательных заявок и сигналов с параметрами λ^+, λ^-, λ^s соответственно. Каждая положительная заявка, поступившая в систему, увеличивает длину очереди положительных заявок в системе на единицу и требует обслуживания. Времена обслуживания положительных заявок в системе независимы, не зависят от процесса поступления и имеют показательное распределение с параметром μ. Заявки обслуживаются в порядке поступления. Каждая положительная заявка, находящаяся в системе, имеет время пребывания, ограниченное показательно распределенной случайной величиной с параметром $\nu(n) = \nu/n$, если $n \neq 0$, $\nu(n) = 0$, если $n = 0$, где n — число положительных заявок в системе, ν — некоторая положительная постоянная. Положительная заявка, которая завершила обслуживание в системе или время пребывания которой закончилось, покидает систему. Отрицательная заявка, поступившая в систему, увеличивает длину очереди отрицательных заявок на единицу. Каждая отрицательная заявка, находящаяся в системе, остается в очереди случайное время, имеющее показательное распределение с параметром $\tau(m) = \tau/m$, если $m \neq 0$, $\tau(m) = 0$, если $m = 0$, где m — число отрицательных заявок в системе, τ — некоторая положительная постоянная. После окончания времени пребывания отрицательная заявка уменьшает длину очереди положительных заявок на единицу, если в системе есть положительные заявки, и не производит никаких воздействий на систему, если в системе нет положительных заявок. Сигнал, поступивший в систему, увеличивает длину очереди сигналов на единицу. Каждый сигнал, находящийся в системе, остается в очереди случайное время, имеющее показательное распределение с параметром $\omega(k) = \omega/k$, если $k \neq 0$, $\omega(k) = 0$, если $k = 0$, где k — число сигналов в системе, ω — некоторая положительная постоянная. После окончания времени пребывания в системе сигнал с вероятностью p^- уменьшает длину очереди положительных заявок на единицу, если в системе есть положительные заявки, не изменяет состояние системы, если в ней нет положительных заявок, с вероятностью p^+ увеличивает длину очереди положительных заявок на единицу, с вероятностью p^0 не производит никаких воздействий на систему. Очевидно, что $p^- + p^+ + p^0 = 1$. После окончания времени пребывания и соответствующего воздействия на систему отрицательные заявки и сигналы аннулируются.

Каждое состояние рассматриваемой системы в момент времени t будем характеризовать вектором $x(t) = (n(t), m(t), k(t))$, где $n(t)$ — число положительных заявок в системе в момент t, $m(t)$ — число отрицательных заявок в системе в момент t, $k(t)$ — число сигналов в системе в момент t . Тогда $x(t)$ — однородный марковский процесс с непрерывным временем и счетным фазовым пространством $X = \{x = (n, m, k), n, m, k = 0, 1, \ldots\}$. Пусть $\{p(x),\ x \in X\}$ — стационарное распределение вероятностей процесса $x(t)$.

Уравнения равновесия для стационарных вероятностей рассматриваемой системы имеют следующий вид:

$$p(n,m,k)\Big[\lambda^+ + \lambda^- + \lambda^s + (\mu+\nu)I_{\{n\neq 0\}} + \tau I_{\{m\neq 0\}} + \omega I_{\{k\neq 0\}}\Big] =$$
$$= p(n-1,m,k)\lambda^+ I_{\{n\neq 0\}} + p(n,m-1,k)\lambda^- I_{\{m\neq 0\}} + p(n,m,k-1)\lambda^s I_{\{k\neq 0\}} +$$
$$+ p(n+1,m,k)(\mu+\nu) + p(n+1,m+1,k)\tau + p(n,m+1,k)\tau I_{\{n=0\}} +$$
$$+ p(n-1,m,k+1)\omega p^+ I_{\{n\neq 0\}} + p(n+1,m,k+1)\omega p^- +$$
$$+ p(n,m,k+1)\omega(p^0 + p^- I_{\{n=0\}}), \quad (n,m,k) \in X.$$

Здесь $I_{\{x\}}$ —характеристическая функция, принимающая значение 1, если x истинно, и 0 — в противном случае.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие*

$$\frac{\lambda^+ + \lambda^s p^+}{\lambda^- + \lambda^s p^- + \mu + \nu} < 1, \frac{\lambda^-}{\tau} < 1, \frac{\lambda^s}{\omega} < 1,$$

тогда марковский процесс $x(t)$ эргодичен, а финальное стационарное распределение вероятностей состояний системы имеет следующий вид

$$p(n,m,k) = \Big[\frac{\lambda^+ + \lambda^s p^+}{\lambda^- + \lambda^s p^- + \mu + \nu}\Big]^n \Big[\frac{\lambda^-}{\tau}\Big]^m \Big[\frac{\lambda^s}{\omega}\Big]^k p(0,0,0),$$

где

$$p(0,0,0) = \Big[1 - \frac{\lambda^+ + \lambda^s p^+}{\lambda^- + \lambda^s p^- + \mu + \nu}\Big]\Big[1 - \frac{\lambda^-}{\tau}\Big]\Big[1 - \frac{\lambda^s}{\omega}\Big].$$

Доказательство. Проводится стандартным образом: подстановкой стационарных вероятностей в уравнения равновесия. Условие эргодичности находится из теоремы Фостера. □

3. СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОТКРЫТОЙ СЕТИ

Рассмотрим открытую сеть, состоящую из N, узлов со структурой, описанной выше. Предположим, что в сеть поступают три независимых пуассоновских потока положительных заявок, отрицательных заявок и сигналов с параметрами λ^+, λ^-, λ^s соответственно. Каждая положительная заявка входного потока независимо от других заявок направляется в i-ый узел с вероятностью p^+_{0i} $(i = \overline{1,N})$, $\sum\limits_{i=1}^{N} p^+_{0i} = 1$. Каждая отрицательная заявка входного потока независимо от других направляется в i-ый узел с вероятностью p^-_{0i} $(i = \overline{1,N})$, $\sum\limits_{i=1}^{N} p^-_{0i} = 1$. Каждый сигнал входного потока независимо от других направляется в i-ый узел с вероятностью p^s_{0i} $(i = \overline{1,N})$, $\sum\limits_{i=1}^{N} p^s_{0i} = 1$. Очереди в узлах формируются из положительных, отрицательных заявок и сигналов, поступление которых увеличивает соответствующую очередь в узле на единицу. Обслуживания требуют только положительные заявки. Времена обслуживания положительных заявок независимы, не зависят от процесса поступления и в i-ом узле имеют показательное распределение с параметрами μ_i соответственно $(i = \overline{1,\ N})$. Каждая положительная заявка в i-ом узле имеет время пребывания, ограниченное экспоненциально распределенной случайной величиной с параметром $\nu_i(n_i) = \nu_i/n_i$, если $n_i \neq 0$, $\nu_i(n_i) = 0$, если $n_i = 0$, где n_i — число положительных заявок в i-ом узле, ν_i — некоторая положительная постоянная $(i = \overline{1,N})$. Положительная заявка, время пребывания которой в i-ом узле закончилось, продолжает движение по сети и ведет себя также, как положительные заявки, получившие обслуживание в i-ом узле $(i = \overline{1,N},\ k = \overline{1,\ M})$. Каждая положительная заявка, завершившая обслуживание в i-ом узле, независимо от других заявок мгновенно направляется в очередь j-го узла и становится положительной заявкой с вероятностью p^+_{ij}, или становится отрицательной заявкой с вероятностью p^-_{ij}, или становится сигналом с вероятностью p^s_{ij}, а с вероятностью p_{i0} покидает сеть. При этом $\sum\limits_{j=1}^{N}(p^+_{ij} + p^-_{ij} + p^s_{ij}) + p_{i0} = 1,\ i = \overline{1,N}$. Предположим, что матрица $P = (p_{ij}, i, j = \overline{0, N})$, в которой $p_{00} = 0$, $p_{i0} = p_{0i}^+$, $p_{ij} = p_{ij}^+ + p_{ij}^- + p_{ij}^s$, неприводима. Каждая отрицательная заявка в i-ом узле имеет время пребывания, ограниченное экспоненциально распределенной случайной величиной с параметром $\tau_i(m_i) = \tau_i/m_i$, если $m_i \neq 0$, $\tau_i(m_i) = 0$, если $m_i = 0$, где m_i — число положительных заявок в i-ом узле, τ_i — некоторая положительная постоянная $(i = \overline{1, N})$. Отрицательная заявка, время пребывания которой в i-ом узле закончилось, уменьшает длину очереди положительных заявок на единицу, если в узле есть положительные заявки, и не производит никаких воздействий, если в узле нет положительных заявок. Каждый сигнал, находящийся в узле, остается в очереди случайное время, имеющее показательное распределение с параметром $\omega_i(k_i) = \omega_i/k_i$, если $k_i \neq 0$, $\omega_i(k_i) = 0$, если $k_i = 0$, где k_i — число сигналов в узле, ω_i — некоторая положительная постоянная. После окончания времени пребывания в узле сигнал с вероятностью p_i^- уменьшает длину очереди положительных заявок на единицу, если в узле есть положительные заявки, не изменяет состояние узла, если в нем нет положительных заявок, с вероятностью p_i^+ увеличивает длину очереди положительных заявок на единицу, с вероятностью p_i^0 не производит никаких воздействий на узел. Очевидно, что $p_i^- + p_i^+ + p_i^0 = 1$. После окончания времени пребывания в узле и оказания соответствующего воздействия на состояние узла отрицательная заявка или сигнал аннулируются.

Обозначим через ε_i^+ среднюю интенсивность поступления положительных заявок в i-ый узел, через ε_i^- среднюю интенсивность поступления отрицательных заявок в i-ый узел, через ε_i^s среднюю интенсивность поступления сигналов в i-ый узел. Эти интенсивности удовлетворяют следующей системе нелинейных уравнений трафика:

$$\varepsilon_i^+ = \lambda^+ p_{0i}^+ + \varepsilon_i^s p_i^+ + \sum_{j=1}^{N} \frac{\varepsilon_j^+(\mu_j + \nu_j)}{\varepsilon_j^- + \varepsilon_j^s p_j^- + \mu_j + \nu_j} p_{ji}^+,$$

$$\varepsilon_i^- = \lambda^- p_{0i}^- + \sum_{j=1}^{N} \frac{\varepsilon_j^+(\mu_j + \nu_j)}{\varepsilon_j^- + \varepsilon_j^s p_j^- + \mu_j + \nu_j} p_{ji}^-,$$

$$\varepsilon_i^s = \lambda^s p_{0i}^s + \sum_{j=1}^{N} \frac{\varepsilon_j^+(\mu_j + \nu_j)}{\varepsilon_j^- + \varepsilon_j^s p_j^- + \mu_j + \nu_j} p_{ji}^s, \quad i = \overline{1, N}.$$

Доказательство существования решения нелинейных уравнений трафика проводится с помощью теоремы Брауэра о неподвижной точке [3].

Состояние рассматриваемой сети в момент времени t будем характеризовать вектором $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t))$, где $x_i(t) = (n_i(t), k_i(t), m_i(t))$ описывает состояние i-го узла, то есть $n_i(t)$ — число положительных заявок в i-ом узле в момент времени t, $m_i(t)$ — число отрицательных заявок в i-ом узле в момент времени t, $k_i(t)$ — число сигналов в i-ом узле в момент времени t $(i = \overline{1, N})$. Тогда $x(t)$ — однородный марковский процесс с непрерывным временем и счетным фазовым пространством $X = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_N), x_i = (n_i, m_i, k_i),\ n_i, m_i, k_i =$

$0, 1, 2, \ldots;\ i = \overline{1, N}\}$. Пусть $\{p(x),\, x \in X\}$ — стационарное распределение вероятностей состояний процесса $x(t)$.

Уравнения глобального равновесия для стационарных вероятностей имеют следующий вид:

$$p(x)\Big[\lambda^{+} + \lambda^{-} + \lambda^{s} + \sum_{i=1}^{N}\Big((\mu_i + \nu_i)I_{\{n_i \neq 0\}} + \tau_i I_{\{m_i \neq 0\}} + \omega_i I_{\{k_i \neq 0\}}\Big)\Big] =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\Big[p(x + e_{i,1})(\mu_i + \nu_i)p_{i0} + p(x + e_{i,2})\tau_i I_{\{n_i = 0\}} + p(x + e_{i,3})\omega_i(p_i^{-} I_{\{n_i = 0\}} + p_i^{0}) +$$

$$+ p(x - e_{i,1})\lambda^{+}p_{0i}^{+}I_{\{n_i \neq 0\}} + p(x - e_{i,2})\lambda^{-}p_{0i}^{-}I_{\{m_i \neq 0\}} + p(x - e_{i,3})\lambda^{s}p_{0i}^{s}I_{\{k_i \neq 0\}} +$$

$$+ p(x + e_{i,1} + e_{i,2})\tau_i + p(x + e_{i,1} + e_{i,3})\omega_i p_i^{-} + p(x - e_{i,1} + e_{i,3})\omega_i p_i^{+} I_{\{n_i \neq 0\}} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N}[p(x + e_{i,1} - e_{j,1})(\mu_i + \nu_i)p_{ij}^{+}I_{\{n_j \neq 0\}} + p(x + e_{i,1} - e_{j,2})(\mu_i + \nu_i)p_{ij}^{-}I_{\{m_j \neq 0\}} +$$

$$+ p(x + e_{i,1} - e_{j,3})(\mu_i + \nu_i)p_{ij}^{s}I_{\{k_j \neq 0\}}\Big], \quad x \in X.$$

Здесь $e_{i,k}$ — единичный вектор размерности $3N$ с единицей в $((i-1)N+k)$-ой позиции.

Теорема 2. *Пусть для любого* $i = 1, \ldots, N$ *выполнены условия*

$$\frac{\varepsilon_i^{+}}{\varepsilon_i^{-} + \varepsilon_i^{s}p_i^{-} + \mu_i + \nu_i} < 1, \quad \frac{\varepsilon_i^{-}}{\tau_i} < 1, \quad \frac{\varepsilon_i^{s}}{\omega_i} < 1,$$

тогда марковский процесс $x(t)$ *эргодичен, а финальное стационарное распределение вероятностей состояний системы имеет следующий вид*

$$p(x) = p_1(x_1)p_2(x_2)\ldots p_N(x_N), \quad x \in X,$$

где

$$p_i(x_i) = \Big[\frac{\varepsilon_i^{+}}{\varepsilon_i^{-} + \varepsilon_i^{s}p_i^{-} + \mu_i + \nu_i}\Big]^{n_i}\Big[\frac{\varepsilon_i^{-}}{\tau_i}\Big]^{m_i}\Big[\frac{\varepsilon_i^{s}}{\omega_i}\Big]^{k_i} p_i(0,0,0),$$

$$p_i(0,0,0) = \Big[1 - \frac{\varepsilon_i^{+}}{\varepsilon_i^{-} + \varepsilon_i^{s}p_i^{-} + \mu_i + \nu_i}\Big]\Big[1 - \frac{\varepsilon_i^{-}}{\tau_i}\Big]\Big[1 - \frac{\varepsilon_i^{s}}{\omega_i}\Big],$$

$(\varepsilon_i^{+}, \varepsilon_i^{-}, \varepsilon_i^{s},\ i = \overline{1, N})$ *находятся как решение нелинейных уравнений трафика.*

Доказательство теоремы проводится стандартным образом, подстановкой стационарного распределения в уравнения равновесия.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gelenbe E.* Product-form networks with negative and positive customers // J. Appl. Prob. 1991. V. 28. P. 656–663.
2. *Gelenbe E., Schassberger R.* Stability of product-form G-networks // Probab. Eng. and Inf. Sci. 1992. V. 6. P. 271–276
3. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. М.:ИЛ, 1962.