СИСТЕМА $BMAP/G/1$ СО ШЛЮЗОВЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ И АДАПТИВНЫМИ ОТДЫХАМИ

В. Вишневский[1], А. Дудин[2,*], В. Клименок[2], О. Семенова[1], Ю. Синюгина[3]

[1] *ЗАО «Информационные и сетевые технологии»,*
[2] *Белорусский государственный университет,*
[3] *Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*
[1] *Москва, Россия*
[2] *Минск, Республика Беларусь*
[3] *Гомель, Республика Беларусь*
[*] dudin@bsu.by

В работе рассмотрена система $BMAP/G/1$ с отдыхами прибора и шлюзовым обслуживанием. Длительность отдыха прибора зависит от того, сколько раз подряд система оказывалась пустой в предыдущие моменты окончания отдыха. Получены стационарные распределения: числа заявок в системе в момент завершения отдыха, состояний системы в произвольный момент времени, времени ожидания.

Данная работа была частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 10-07-90006) и Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (грант № Ф10Р-010).

Ключевые слова: групповой марковский входной поток, адаптивные отдыхи, шлюзовое обслуживание, матрично-аналитические методы.

1. ВВЕДЕНИЕ

В связи с интенсивным развитием широкополосных беспроводных сетей передачи информации в последние годы значительно возрос интерес к моделям систем массового обслуживания с несколькими очередями и общим обслуживающим прибором (системам поллинга). Отдельную очередь системы поллинга можно рассматривать как систему массового обслуживания (СМО) с отдыхами прибора, где под отдыхом понимается время, в течение которого прибор обслуживает другие очереди системы. С точки зрения практики значительный интерес представляют модели с так называемым адаптивным опросом, в которых длительность отдыха прибора зависит от того, были ли в данной очереди заявки на обслуживание в момент завершения предыдущего отдыха. Исследованию таких моделей посвящена данная работа.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим однолинейную СМО с двумя бесконечными буферами, соединенными шлюзом. На вход системы поступает $BMAP$-поток заявок, характеризующийся управляющим процессом $\nu_t, t \geq 0$, с пространством состояний $\{0, 1, \ldots, W\}$ и матричной производящей функцией $D(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} D_k z^k$, $|z| < 1$. Матрицы D_k задают интенсивности переходов процесса ν_t, которые сопровождаются приходом группы заявок размера k, $k \geq 0$. Матрица $D(1)$ является генератором процесса $\nu_t, t \geq 0$.

Средняя интенсивность $BMAP$-потока λ задается формулой $\lambda = \boldsymbol{\theta} D'(1)\mathbf{e}$, где $\boldsymbol{\theta}$ является единственным решением системы линейных алгебраических уравнений $\boldsymbol{\theta} D(1) = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\theta}\mathbf{e} = 1$, $\mathbf{e}$ - вектор-столбец соответствующей размерности, состоящий из единиц, $\mathbf{0}$ - вектор-строка соответствующей размерности, состоящий из нулей.

Поступая в систему, группа заявок попадает в первый буфер (буфер-1). Обслуживание заявок из этой группы будет возможно только после открытия шлюза между буферами, когда все заявки, находящиеся в буфере-1, мгновенно переместятся в буфер-2 и шлюз закроется. В момент открытия шлюза возможны две ситуации. Первая предполагает, что буфер-1 окажется пустым и в предыдущие r-1 моменты открытия шлюза он также был пуст, $r \geq 1$. В этом случае прибор уходит на отдых, называемый отдыхом типа-r. Его длительность характеризуется функцией распределения (ФР) $H_r(t)$ с преобразованием Лапласа-Стилтьеса (ПЛС) $h_r(s) = \int\limits_0^{\infty} e^{-st} dH_r(t)$, $Re\ s > 0$, и конечными начальными моментами $h_k^{(r)} = \int\limits_0^{\infty} t^k dH_r(t)$. Если же буфер-1 не был пуст в момент открытия шлюза, то заявки, находящиеся в нем, перемещаются в буфер-2 и начинается обслуживание прибором заявок из буфера-2 в порядке их поступления в систему. Время обслуживания заявок имеет ФР $B(t)$ с ПЛС $\beta(s) = \int\limits_0^{\infty} e^{-st} dB(t)$, $Re\ s > 0$, и начальными конечными моментами $b_k = \int\limits_0^{\infty} t^k dB(t)$. Обслуживание заявок продолжается до тех пор, пока буфер-2 не окажется пустым. После этого прибор уходит на отдых, называемый *обычным* или отдыхом типа-0, длительность которого характеризуется ФР $H_0(t)$ с ПЛС $h_0(s) = \int\limits_0^{\infty} e^{-st} dH_0(t)$, $Re\ s > 0$, и начальными конечными моментами $h_k^{(0)} = \int\limits_0^{\infty} t^k dH_0(t)$. После окончания отдыха шлюз между буферами вновь открывается.

Проанализируем описанную систему. Будем рассматривать процесс

$$\zeta(t) = \{i_1(t), i_2(t), r(t), \nu_t\}, \quad t \geq 0,$$

где $i_k(t)$ – число заявок в буфере-k, а процесс $r(t)$ характеризует состояние прибора:

$$r(t) = \begin{cases} *, & \text{если в момент } t \text{ прибор занят обслуживанием заявки,} \\ r, & \text{если в момент } t \text{ прибор находится на отдыхе типа-}r, \ r \geq 0. \end{cases}$$

Понятно, что $i_2(t) = 0$, если $r(t) \neq *$. Процесс $\zeta(t),\ \ t \geq 0$, не является марковским, и для его исследования мы применим метод вложенных цепей.

3. СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЛОЖЕННОЙ ЦЕПИ МАРКОВА

Пусть t_n есть n-й момент окончания отдыха, j_n есть число заявок в буфере-1 в момент $t_n - 0$ и r_n принимает значение 0, если буфер-1 не был пуст в момент t_{n-1}, или значение r, если буфер-1 был пуст в моменты $t_{n-r},\ t_{n-r+1},\ \dots,\ t_{n-1},\ r \geq 1$, и $\nu_n = \nu_{t_n}$.

Процесс $\xi_n = \{j_n, r_n, \nu_n\},\ n \geq 1$, является цепью Маркова. Пусть матрицы $P_{(i,r),(j,r')},\ i, j \geq 0,\ r, r' \geq 0$, составлены из ее одношаговых переходных вероятностей

$$P_{(i,r),(j,r')} = P\{j_{n+1} = j; r_{n+1} = r'; \nu_{n+1} = \nu^{'} | j_n = i; r_n = r; \nu_n = \nu\}.$$

Ненулевые матрицы $P_{(i,r),(j,r')}$ имеют вид:

$$P_{(i,r),(j,0)} = \int\limits_0^{\infty} P(j,t) dB^{*(i)} * H_0(t),\ i \geq 1, j \geq 0, r \geq 0, \tag{1}$$

$$P_{(0,r),(j,r+1)} = \int\limits_0^{\infty} P(j,t) dH_{r+1}(t),\ j \geq 0, r \geq 0, \tag{2}$$

где матрицы $P(l,t)$ определяются как коэффициенты разложения $e^{D(z)t} = \sum\limits_{l=0}^{\infty} P(l,t) z^l$, $B^{*(i)}(t)$ есть свертка i-го порядка ФР $B(t)$ и $A * H(t)$ есть свертка ФР $A(t)$ и $H(t)$.

При выполнении условия $\rho = \lambda b_1 < 1$ существуют стационарные вероятности состояний цепи

$$q(j, r, \nu) = \lim_{n \to \infty} P\{j_n = j,\ r_n = r,\ \nu_n = \nu\},\ j \geq 0, r \geq 0, \nu = \overline{0, W}.$$

Сгруппируем эти вероятности в векторы-строки $\mathbf{q}(j,r) = (q(j,r,0),\ \dots,\ q(j,r,W))$.

Эти векторы удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{q}(j,0) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{q}(i,r) \int\limits_0^{\infty} P(j,t) dB^{*(i)} * H_0(t),\ j \geq 0, \tag{3}$$

$$\mathbf{q}(j, r+1) = \mathbf{q}(0,r) \int\limits_0^{\infty} P(j,t) dH_{r+1}(t), j \geq 0, r \geq 0. \tag{4}$$

Умножая уравнения системы (3), (4) на соответствующие степени z и суммируя, можно убедиться, что векторные производящие функции $\mathbf{q}_r(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \mathbf{q}(j,r) z^j,\ \ |z| <$

$1, r \geq 0$ удовлетворяют следующей системе функциональных уравнений:

$$\mathbf{q}_0(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\mathbf{q}_r(\beta(-D(z))) - \mathbf{q}_r(0)\right) h_0(-D(z)), \tag{5}$$

$$\mathbf{q}_{r+1}(z) = \mathbf{q}_r(0) h_{r+1}(-D(z)), r \geq 0, \tag{6}$$

где $\beta(-D(z)) = \int\limits_0^\infty e^{D(z)t} dB(t),\ h_r(-D(z)) = \int\limits_0^\infty e^{D(z)t} dH_r(t), r \geq 0.$

Система уравнений (5), (6) может быть переписана в следующем виде:

$$\mathbf{q}_0(z) = \mathbf{q}_0(\beta(-D(z))) h_0(-D(z)) + \mathbf{q}_0(0) A(z), \tag{7}$$

$$\mathbf{q}_{r+1}(z) = \mathbf{q}_0(0) \Theta_r h_{r+1}(-D(z)), r \geq 0. \tag{8}$$

где

$$A(z) = h_0(-D(z)) \left[\sum_{r=0}^{\infty} \Theta_r (h_{r+1}(-D(\beta(-D(z)))) - h_{r+1}(-D(0))) - I \right],$$

$$\Theta_r = \prod_{j=1}^{r} h_j(-D(0)).$$

Для решения матричного функционального уравнения (7), введем в рассмотрение последовательность матриц $N_m(z)$, задаваемых рекурсией

$$N_0(z) = zI, \quad N_{m+1}(z) = \beta(-D(N_m(z))),\ m \geq 0. \tag{9}$$

В [3] показано, что при любом $z,\ |z| \leq 1$, последовательность матриц $N_m(z)$ сходится к матрице G, определяемой как решение матричного уравнения

$$G = \beta(-D(G)) = \int\limits_0^\infty e^{D(G)t} dB(t).$$

Последовательно подставляя матрицы $N_m(z)$ вместо скалярного аргумента z в функциональное уравнение (7), мы получаем соотношения

$$\mathbf{q}_0(N_0(z)) = \mathbf{q}_0(N_n(z)) \prod_{m=0}^{n-1} h_0(-D(N_m(z)) + \mathbf{q}_0(0) \sum_{m=0}^{n-1} A(N_m(z)) \prod_{k=0}^{m-1} h_0(-D(N_k(z))).$$

Устремляя параметр n к бесконечности, получаем выражение

$$\mathbf{q}_0(z) = \mathbf{q}_0(G) \prod_{l=0}^{\infty} h_0(-D(N_l(z))) + \mathbf{q}_0(0) \sum_{r=0}^{\infty} A(N_r(z)) \prod_{m=0}^{r-1} h_0(-D(N_m(z))). \tag{10}$$

Для вычисления векторов $\mathbf{q}_0(0)$ и $\mathbf{q}_0(G)$ подставим $z = G$ в уравнении (7) и $z = 0$ в (10). В результате мы получим следующее уравнение:

$$(\mathbf{q}_0(0), \mathbf{q}_0(G)) = (\mathbf{q}_0(0), \mathbf{q}_0(G)) \begin{pmatrix} \sum\limits_{r=0}^{\infty} A(N_r(0)) \prod\limits_{m=0}^{r-1} h_0(-D(N_m(0))) & A(G) \\ \prod\limits_{l=0}^{\infty} h_0(-D(N_l(0))) & h_0(-D(G)) \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Еще одно уравнение для компонент неизвестного вектора $(\mathbf{q}_0(0), \mathbf{q}_0(G))$ мы получаем из условия нормировки

$$\mathbf{q}_0(0)\left[\sum_{r=0}^{\infty} A(N_r(1)) \prod_{m=0}^{r-1} h_0(-D(N_m(1))) + \sum_{r=0}^{\infty} \Theta_r h_{r+1}(-D(1))\right]\mathbf{e}+$$

$$+\mathbf{q}_0(G) \prod_{l=0}^{\infty} h_0(-D(N_l(1)))\mathbf{e} = 1. \tag{12}$$

Теорема 1. *Векторная производящая функция $\mathbf{q}_0(z)$ задается формулой (10), где векторы $\mathbf{q}_0(0), \mathbf{q}_0(G)$ определяются как решение системы (11)-(12).*

Теорема 2. *Векторная производящая функция $\mathbf{q}(z) = \sum\limits_{r=0}^{\infty} \mathbf{q}_r(z)$ задается формулой*

$$\mathbf{q}(z) = \mathbf{q}_0(G) \prod_{l=0}^{\infty} h_0(-D(N_l(z)))+$$

$$+\mathbf{q}_0(0) \sum_{r=0}^{\infty} \left[A(N_r(z)) \prod_{m=0}^{r-1} h_0(-D(N_m(z))) + \Theta_r h_{r+1}(-D(z))\right]. \tag{13}$$

4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ СИСТЕМЫ В ПРОИЗВОЛЬНЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ

Обозначим

$$p(i_1, i_2, *, \nu) = \lim_{t\to\infty} P\{i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2, r_t = *, \nu_t = \nu\}, \ \ i_2 \geq 1,$$

$$p(i_1, r, \nu) = \lim_{t\to\infty} P\{i_1(t) = i_1, r_t = r, \nu_t = \nu\}, \ i_1 \geq 0, \ r \geq 0, \nu = \overline{0, W}.$$

Введем векторы

$$\mathbf{p}(i_1, i_2, *) = (p(i_1, i_2, *, 0), \ldots, p(i_1, i_2, *, W)), \ \ \mathbf{p}(i_1, r) = (p(i_1, r, 0), \ldots, p(i_1, r, W)).$$

Теорема 3. *Векторы стационарных вероятностей $\mathbf{p}(i_1, i_2, *)$, $\mathbf{p}(i_1, r)$, $r \geq 0$ выражаются через векторы $\mathbf{q}(i, r)$, $i \geq 0$, следующим образом:*

$$\mathbf{p}(i_1, i_2, *) = \tau^{-1}\Big[\sum_{j=i_2+1}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \mathbf{q}(j, r) \sum_{l=0}^{i_1} \int_0^{\infty} P(l, t) dB^{*(j-i_2)}(t) \int_0^{\infty} P(i_1 - l, t)(1 - B(t))dt+$$

$$+\sum_{r=0}^{\infty}\mathbf{q}(i_2,r)\int\limits_0^{\infty}P(i_1,t)(1-B(t))dt\Big],$$

$$\mathbf{p}(i_1,0)=\tau^{-1}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\mathbf{q}(j,r)\sum_{l=0}^{i_1}\int\limits_0^{\infty}P(l,t)dB^{*(j)}(t)\int\limits_0^{\infty}P(i_1-l,t)(1-H_0(t))dt,$$

$$\mathbf{p}(i_1,r)=\tau^{-1}\mathbf{q}(0,r-1)\int\limits_0^{\infty}P(i_1,t)(1-H_r(t))dt,$$

где среднее время τ между моментами окончания отдыхов вычисляется по формуле

$$\tau=b_1\mathbf{q}'(z)|_{z=1}\mathbf{e}+h_1^{(0)}(1-\mathbf{q}(0))\mathbf{e}+\mathbf{q}_0(0)\sum_{r=0}^{\infty}\Theta_r h_1^{(r+1)}\mathbf{e}.$$

Доказательство проводится с помощью теории процессов восстановления с зависимыми циклами регенерации, см., например, [1].

Введем векторные производящие функции

$$\Pi(z,y,*)=\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=1}^{\infty}\mathbf{p}(i_1,i_2,*)z^{i_1}y^{i_2},\ |z|\le 1,\ |y|\le 1,$$

$$\Pi(z,r)=\sum_{i_1=0}^{\infty}\mathbf{p}(i_1,r)z^{i_1},\ |z|\le 1,\quad r\ge 0.$$

Теорема 4. *Векторные производящие функции* $\Pi(z,y,*),\ \Pi(z,r),\ r\ge 0$ *вычисляются по формулам*

$$\Pi(z,y,*)=\tau^{-1}(\mathbf{q}(\beta(-D(z)))-\mathbf{q}(y))y(yI-\beta(-D(z)))^{-1}(-D(z))^{-1}(I-\beta(-D(z))),$$
$$\Pi(z,0)=\tau^{-1}(\mathbf{q}(\beta(-D(z)))-\mathbf{q}(0))(-D(z))^{-1}(I-h_0(-D(z))),$$
$$\Pi(z,r)=\tau^{-1}\mathbf{q}_{r-1}(0)(-D(z))^{-1}(I-h_r(-D(z))).$$

5. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ В СИСТЕМЕ

Пусть $W(x)$ есть ФР времени ожидания произвольной заявки в системе, $w(s)=\int\limits_0^{\infty}e^{-sx}dW(x),\ Re\ s>0$ - ее ПЛС.

Теорема 5. *Преобразование Лапласа-Стилтьеса $w(s)$ времени ожидания произвольной заявки в системе задается формулой*

$$w(s)=(\lambda\tau)^{-1}(\mathbf{q}(\beta(s))(h_0(s)-1)+\sum_{r=0}^{\infty}\mathbf{q}_r(0)h_{r+1}(s)-\mathbf{q}(0)h_0(s))(1-\beta(s))^{-1}\mathcal{B}(s),\ (22)$$

где

$$\mathcal{B}(s) = (sI + D(\beta(s)))^{-1} D(\beta(s))\mathbf{e}. \tag{23}$$

Доказательство проводится с использованием техники, описанной в [2].

Среднее время ожидания W_1 произвольного запроса вычисляется по формуле

$$W_1 = \frac{1}{\lambda\tau(1-\rho)}\Bigg[\frac{\rho}{2b_1^2}\Bigg((\mathbf{q}(1)-\mathbf{q}(0))(h_2^{(0)}b_1 - h_1^{(0)}b_2) + h_1^{(0)}2b_1^2\mathbf{q}^{'}(1) +$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\mathbf{q}_r(0)(h_2^{(r+1)}b_1 - h_1^{(r+1)}b_2)\Bigg) +$$

$$+b_1^{-1}\Bigg(h_1^{(0)}(\mathbf{q}(1)-\mathbf{q}(0)) + \sum_{r=0}^{\infty}\mathbf{q}_r(0)h_1^{(r+1)}\Bigg)\Bigg(\tilde{I}D(1) + \hat{\mathbf{e}}\boldsymbol{\theta}(I - b_1D^{'}(1))\Bigg)^{-1}\times$$

$$\times\Bigg(\tilde{I}(\rho - b_1D^{'}(1)) + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{e}}\boldsymbol{\theta}(b_1^2D^{''}(1) + b_2D^{'}(1))\Bigg)\Bigg]\mathbf{e}.$$

Здесь $\tilde{I}$ – диагональная матрица с диагональными элементами $\{0, 1, \ldots, 1\}$ и $\hat{\mathbf{e}}$ – вектор-столбец с элементами $\{1, 0, \ldots, 0\}$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена система $BMAP/G/1$ с адаптивными отдыхами прибора и шлюзовым обслуживанием. Получено стационарное распределение вероятностей состояний системы и время ожидания.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Cinlar, Introduction to stochastic process. N.J.: Prentice-Hall. 1975.
2. D.M. Lucantoni, M.F. Neuts, Some steady-state distribution for the $MAP/SM/1$ queue, Communications in Statistics-Stochastic Models 10 (1994) 575-598.
3. M.F. Neuts, Structured Stochastic Matrices of $M/G/1$ Type and Their Applications, Marcel Dekker, New York. 1989.