ГИСТЕРЕЗИСНАЯ СТРАТЕГИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ

И. Усар*, И. Макушенко

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко
Киев, Украина
* usar@unicyb.kiev.ua

Рассматривается марковская система с повторными вызовами и управляемой интенсивностью входного потока. В явном виде через параметры модели найдены стационарные вероятности и указаны условия существования стационарного режима.

Ключевые слова: стохастическая система, повторные требования, гистерезисная стратегия, стационарный режим.

1. ВВЕДЕНИЕ

Результаты для систем с повторными вызовами составляют один из важных разделов теории массового обслуживания. Основные из этих результатов систематизированы в монографии [1]. Математические модели систем с повторными вызовами имеют широкое применение в экономике, транспорте, в практике проектирования компьютерных сетей (локальных и глобальных), системах с заказом в телефонии и мобильной связи, для описания процесса посадки воздушных судов и др. (См., например, [1, 2, 3]).

Характерная особенность рассматриваемых систем заключается в том, что требования, поступившие в занятую систему, через случайный промежуток времени повторяют попытку получить обслуживание. Такие требования становятся источниками повторных вызовов, генерирующих вторичный поток вызовов.

2. ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ

Рассматривается система обслуживания типа $M_Q/M/m/\infty$ с повторными вызовами, состоящая из m идентичных обслуживающих приборов, работающих независимо. Время обслуживания имеет показательное распределение с параметром μ. Интенсивность λ_j потока первичных вызовов зависит от j - колличества источников повторных вызовов. Каждый повторный вызов через показательное время с параметром ν повторяет попытку получить обслуживание. Кроме того, поток первичных вызовов подчиняется гистерезисной стратегии, которая может быть описана следующим образом. Пусть $h_1 \leq h_2$ будут фиксированные натуральные числа (пороги). Если колличество повторных вызовов $j \leq h_1 - 1$, то интенсивность входного потока равна λ_1 и система работает в первом режиме. Если $j \geq h_2$, то интенсивность входного потока равна λ_2 и система работает во втором режиме. А если $h_1 \leq j \leq h_2 - 1$, то система сохраняет тот режим, в котором она работала в предыдущий момент времени. Частным случаем гистерезисных стратегий является класс пороговых стратегий (для них $h_1 = h_2$). Такие системы рассматривались в работе [4].

Описанную модель можно изобразить трехмерным процессом Маркова $Q(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t))$ с непрерывным временем в фазовом пространстве $S = \{0, 1, ..., m\} \times \{0, 1, ...\} \times \{1, 2\}$, где $Q_1(t)$ - число занятых приборов в момент времени t, $Q_2(t)$ - число источников повторных требований, $Q_3(t)$ - режим работы системы в момент времени t. Если $Q_3(t) = 1$, то система работает в первом режиме, а если $Q_3(t) = 2$, то система работает во втором режиме.

3. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ФОРМУЛЫ ДЛЯ ЭРГОДИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Выясним условия существования стационарного режима для процесса $Q(t)$.

Лемма 1. *Пусть* $\lambda_2 = \limsup\limits_j \lambda_j < \infty$. *Тогда при* $\lambda_2/m\mu < 1$ *существует эргодическое распределение для процесса* $Q(t)$ *и оно совпадает с единственным стационарным.*

Сначала найдем эргодическое распределение для системы, в которой колличество повторных требований ограничено некоторым числом N, а затем, перейдя к пределу $N \to \infty$, получим это распределение без ограничений на длину очереди. Для $M_Q/M/m/N$ эргодическое распределение существует и будем обозначать его $\pi_{ij}^{(r)}(N) = \lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{P}\{Q_1(t) = i, Q_2(t) = j, Q_3(t) = r\}$.

Введем следующие обозначения:

$$e_i(m) = (\delta_{i0}, \delta_{i1}, ..., \delta_{im-1})^T, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad i = j, \\ 0, & \text{при} \quad i \neq j, \end{cases} \quad e(m) = (1, 1, ..., 1)^T,$$

$$\pi_j^{(r)} = \left(\pi_{0j}^{(r)}, \pi_{1j}^{(r)}, ..., \pi_{m-1j}^{(r)}\right)^T.$$

Пусть $A_{rj} = \left\| a_{ik}^j(r) \right\|_{i,k=0}^{m-1}$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$ - тридиагональная матрица вида

$$a_{ik}^j(r) = \begin{cases} \lambda^{(r)} + i\mu + j\nu, & \text{при} \quad k = i, i = 0, 1, ..., m-1, \\ -\lambda^{(r)}, & \text{при} \quad k = i-1, i = 0, 1, ..., m-1, \\ -(i+1)\mu, & \text{при} \quad k = i+1, i = 1, 2, ..., m-2, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$B_{rj} = \left\| \, b_{ik}^{j}\,(r) \right\|_{i,k=0}^{m-1}, \quad b_{ik}^{j}\,(r) = \begin{cases} (j+1)\nu, & \text{при} \quad k = i-1, i \neq m-1, \\ \dfrac{(j+1)\nu m\mu}{\lambda^{(r)}}, & \text{при} \quad k \neq m-2, i = m-1, \\ \dfrac{(j+1)\nu(\lambda^{(r)} + m\mu)}{\lambda^{(r)}}, & \text{при} \quad k = m-2, i = m-1, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$C_{rj} = \left\| \, c_{ik}^{j}\,(r) \right\|_{i,k=0}^{m-1}, \qquad c_{ik}^{j}\,(r) = \begin{cases} \dfrac{h_1 \nu m\mu}{\lambda^{(r)}}, & \text{при} \quad i = m-1, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$D = \left\| \, d_{ik} \right\|_{i,k=0}^{m-1}, \qquad d_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad k = 0, \ i = 0, \\ a_{i-1k}^{N}\,(2)\,, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$\Delta_{1j}^{(1)} = \left(\prod_{i=j}^{h_1-1} A_{1i}^{-1} B_{1i} \right) \left(\left[\left(\prod_{i=h_1}^{h_2-2} A_{1i}^{-1} B_{1i} \right) A_{1h_2-1}^{-1} C_{1h_2-1} + \sum_{k=h_1}^{h_2-2} \left(\prod_{i=h_1}^{k-1} A_{1i}^{-1} B_{1i} \right) A_{1k}^{-1} C_{1k} \right] + \right.$$

$$\left. + E \right) \left[E + \sum_{k=h_1}^{h_2-1} \left(\prod_{i=h_1}^{k-1} A_{2i}^{-1} B_{2i} \right) A_{2k}^{-1} C_{2k} \right]^{-1} \left(\prod_{i=h_1}^{N-1} A_{2i}^{-1} B_{2i} \right) D^{-1} e_0(m), \ j = 0, 1, ..., h_1 - 1,$$

$$\Delta_{2j}^{(1)} = \left[\left(\prod_{i=j}^{h_2-2} A_{1i}^{-1} B_{1i} \right) A_{1h_2-1}^{-1} C_{1h_2-1} + \sum_{k=j}^{h_2-2} \left(\prod_{i=j}^{k-1} A_{1i}^{-1} B_{1i} \right) A_{1k}^{-1} C_{1k} \right] \times$$

$$\times \left[E + \sum_{k=h_1}^{h_2-1} \left(\prod_{i=h_1}^{k-1} A_{2i}^{-1} B_{2i} \right) A_{2k}^{-1} C_{2k} \right]^{-1} \left(\prod_{i=h_1}^{N-1} A_{2i}^{-1} B_{2i} \right) D^{-1} e_0(m), \ j = h_1, ..., h_2 - 1,$$

$$\Delta_{1j}^{(2)} = \left(E - \left[\sum_{k=j}^{h_2-1} \left(\prod_{i=j}^{k-1} A_{2i}^{-1} B_{2i} \right) A_{2k}^{-1} C_{2k} \right] \left[E + \sum_{k=h_1}^{h_2-1} \left(\prod_{i=h_1}^{k-1} A_{2i}^{-1} B_{2i} \right) A_{2k}^{-1} C_{2k} \right]^{-1} \right) \times$$

$$\times \left(\prod_{i=j}^{N-1} A_{2i}^{-1} B_{2i} \right) D^{-1} e_0(m), \quad j = h_1, ..., h_2 - 1,$$

$$\Delta_{2j}^{(2)} = \left(\prod_{i=j}^{N-1} A_{2i}^{-1} B_{2i} \right) D^{-1} e_0(m), \quad j = h_2, ..., N-1,$$

$$\Delta_j^{(1)} = \begin{cases} \Delta_{1j}^{(1)}, & \text{при} \quad j = 0, ..., h_1 - 1, \\ \Delta_{2j}^{(1)} & \text{при} \quad j = h_1, ..., h_2 - 1, \end{cases} \qquad \Delta_j^{(2)} = \begin{cases} \Delta_{1j}^{(1)}, & \text{при} \quad j = h_1, ..., h_2 - 1, \\ \Delta_{2j}^{(2)} & \text{при} \quad j = h_2, ..., N-1. \end{cases}$$

Проверим условия существования обратных матриц, которые используются при определении векторов $\Delta_j^{(1)}$ и $\Delta_j^{(2)}$.

Лемма 2. *Матрицы* $A_{rj},\ r = 1, 2,\ j = 0, 1, ..., N$ *и* D *невырожденные.*

Найдем теперь явные формулы для эргодического распределения процесса $Q(t),\ t \geq 0$, при условии, что оно существует.

Теорема 1. *Стационарные вероятности системы имеют вид*

$$\pi_j^{(1)}(N) = \Delta_j^{(1)}\pi_{0N}^{(2)}(N),\ j = 0, ...h_2 - 1,\ \pi_j^{(2)}(N) = \Delta_j^{(2)}\pi_{0N}^{(2)}(N),\ j = h_1, ...N - 1,$$

$$\pi_N^{(2)}(N) = D^{-1}e_0(m)\pi_{0N}^{(2)}(N),$$

$$\pi_{mj}^{(1)}(N) = \frac{\nu}{\lambda^{(1)}}\left((j+1)\Delta_{j+1}^{(1)} + \alpha_1(j)h_1\Delta_{h_1}^{(2)}\right)e(m)^T\pi_{0N}^{(2)}(N),\ j = 0, ..., h_2 - 1,$$

$$\pi_{mj}^{(2)}(N) = \frac{\nu}{\lambda^{(2)}}\left((j+1)\Delta_{j+1}^{(2)} - \alpha_2(j)h_1\Delta_{h_1}^{(2)}\right)e(m)^T\pi_{0N}^{(2)}(N),\ j = h_1, ..., N - 1,$$

$$\pi_{mN}^{(2)}(N) = \frac{\left(\lambda^{(2)} + N\nu + (m-1)\mu\right)e_{m-1}(m)^T - \lambda^{(2)}e_{m-2}(m)^T}{m\mu}D^{-1}e_0(m)\pi_{0N}^{(2)}(N),$$

где

$$\pi_{0N}^{(2)}(N) = \left[\sum_{j=0}^{h_2-1}\frac{\lambda^{(1)}\Delta_j^{(1)} + \nu\left((j+1)\Delta_{j+1}^{(1)} + \alpha_1(j)h_1\Delta_{h_1}^{(2)}\right)}{\lambda^{(1)}}e(m)^T + \right.$$

$$+\sum_{j=h_1}^{N-1}\frac{\lambda^{(2)}\Delta_j^{(2)} + \nu\left((j+1)\Delta_{j+1}^{(2)} - \alpha_2(j)h_1\Delta_{h_1}^{(2)}\right)}{\lambda^{(2)}}e(m)^T +$$

$$\left. + \frac{e(m)^T m\mu + \left(\lambda^{(2)} + N\nu + (m-1)\mu\right)e_{m-1}(m)^T - \lambda^{(2)}e_{m-2}(m)^T}{m\mu}D^{-1}e_0(m)\right]^{-1},$$

$$\alpha_1(j) = \begin{cases} 1, & j > h_1 - 2, \\ 0, & j \leq h_1 - 2, \end{cases} \qquad \alpha_2(j) = \begin{cases} 1, & j < h_2, \\ 0, & j \geq h_2. \end{cases}$$

При выполнении условий леммы 1 и $N \to \infty$ стационарные вероятности $\pi_{ij}^{(r)}(N)$ приближают соответствующие вероятности для системы $M_Q/M/m/\infty$. Таким образом, теорема содержит эффективный алгоритм рекурентного типа для подсчета стационарных характеристик.

Рассмотрим применение теоремы для решения оптимизационной задачи.

Пусть $S_1(t, h_1, h_2)$ - число вызовов, облуживание которых завершено в системе за время t, $S_2(t, h_1, h_2)$ - число вызовов, которые получили отказ в обслуживании и стали повторными вызовами, $S_3(t, h_1, h_2)$ - число переключений интенсивности входного потока.

Если существуют пределы $\lim\limits_{t\to\infty} t^{-1}S_i(t, h_1, h_2)$, то будем обозначать их $S_i\left(h_1, h_2\right),\ i = 1, 2, 3$.

Рассмотрим оптимизационную задачу:

$$W\left(h_1, h_2\right) = C_1S_1\left(h_1, h_2\right) - C_2S_2\left(h_1, h_2\right) - C_3S_3\left(h_1, h_2\right) \to \max,$$

где C_1 - прибыль полученная от обслуживания одного требования, C_2 - штраф за отказ в обслуживании, C_3 - штраф за переключение интенсивности входного потока.

Решением задачи есть такие пороги h_1 и h_2, которые максимизируют среднюю прибыль от работы системы. Подобные оптимизационные задачи рассматривалсь в работах [5, 6].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение хотелось бы отметить, что полученные результаты имеют большое значение для практического применения. На основании найденных формул для стационарных вероятностей можно построить эффективные алгоритмы для решения оптимизационных задач в классе гистерезисных стратегий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Falin G. I., Templeton J. G. C.* Retrial queues. London: Chapman & Hall, 1997.
2. *Уолрэнд Дж.* Введение в теорию массового обслуживания. Москва: Мир, 1993.
3. *Anisimov V. V., Artalejo J. R.* Analysis of Markov multiserver retrial queues with negative arrivals // Queuing Systems. 2001. № 39. С. 157–182.
4. *Лебедев Е. А., Усар И. Я.* Про системы с повторными требованиями и управляемыми входящими потоками // Доклады НАН Украины. 2009. № 5. С. 52–59.
5. *Клименок В. И.* Оптимизация динамического управления режимом работы информационно-вычислительных систем с повторными вызовами // Автоматика и вычислит. техника. 1990. № 1. С. 25–30.
6. *Дудин А. Н., Клименок В. И.* Оптимизация динамического управления входной нагрузкой в узле информационно-вычислительной сети // Автоматика и вычислит. техника. 1991. № 2. С. 25–31.