НАХОЖДЕНИЕ ЗАКОНА УПРАВЛЕНИЯ ЦЕНОЙ ПРОДАЖИ ТОВАРА

Н. Степанова

Томский государственный университет
Томск, Россия
natalia0410@rambler.ru

Аннотация: Оптимизация продажи скоропортящейся продукции (молоко, творог и т.д.) представляет определенный практически интерес, так как продукцию, не реализованную в течение торговой сессии, в лучшем случае надо пускать в переработку, а в худшем случае - просто выбрасывать. Поэтому при реализации такой продукции возникает ряд вопросов, таких как а) какой объем продукции надо завозить на торговую точку; б) по какой цене ее продавать; в) как управлять ценой продажи продукции, чтобы к концу торговой сессии она была полностью реализована. Все эти задачи надо решать при вполне естественном критерии оптимальности - максимизации прибыли, получаемой от реализации продукции.

Ключевые слова: интервал, распределение, диффузионное приближение, аппроксимация.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть в торговую точку завозится партия продукции объемом Q_0, которая должна быть продана в течение торговой сессии длительности . Пусть d - объем затрат на выпуск единицы продукции, так что производителю эта партия стоила $Q_0 d$ рублей.

Пусть $c(t)$ есть цена, по которой продукция продается в момент времени t. В данной работе рассматривается вопрос управления ценой продажи $c(t)$ в зависимости от времени t и объема $Q(t)$ продукции, не реализованной к этому моменту времени. Цель этого управления - добиться того, что продукция будет реализована к концу торговой сессии и при этом будет получена максимальная прибыль.

Будем считать, что поток покупателей является пуассоновским потоком интенсивности $\lambda(c)$, зависящей от розничной цены . Вид этой зависимости будет уточнен ниже.

Будем считать, что покупатели покупают товар независимо друг от друга, и объем покупки ξ есть случайная величина с $M\{\xi\} = \alpha_1$ и $M\{\xi^2\} = \alpha_2$.

Пусть $Q(t)$ есть количество продукции, которая осталась не реализованной в момент времени t. Рассмотрим решение задачи в так называемом диффузионном приближении, когда $Q(t)$ аппроксимируется диффузионным случайным процессом.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Пусть теперь производится управление ценой продажи товара, и цена продажи $c(t)$ в момент времени t выбирается из условия

$$a_1\lambda(c) = \frac{Q(t)}{\varphi(t)}, \tag{1}$$

с некоторой, пока неизвестной функцией $\varphi(t)$.

Тогда, в детерминированном приближении, $Q(t)$ определяется решением следующего дифференциального уравнения

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\mu Q(t) - \frac{Q(t)}{\varphi(t)}, \tag{2}$$

полученного подстановкой, которое надо решить при начальном условии

$$Q(0) = Q_0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$Q(t) = Q_0 exp\left(-\mu t - \int_0^t \frac{\partial z}{\varphi(z)}\right) \tag{3}$$

Рассмотрим частный случай, когда зависимость $\lambda(c)$ имеет вид

$$\lambda(c) = \lambda_0 - \lambda_1 \frac{c - c_0}{c_0}.$$

Тогда цена продажи $c(t)$ в момент времени t находится из условия

$$\alpha_1\lambda(c) = \alpha_1\left(\lambda_0 + \lambda_1 - \lambda_1\frac{c}{c_0}\right) = \frac{Q(t)}{\varphi(t)},$$

откуда получаем

$$c(t) = c_0\left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - \frac{Q(t)}{\lambda_1\alpha_1\varphi(t)}.\right) \tag{4}$$

Выручка от продажи нашей партии товара в течение времени T будет равна

$$S = \int_0^T c(t)\alpha_1\lambda(c(t))dt = c_0\left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)\int_0^T \frac{Q(t)}{\varphi(t)}dt - \frac{c_0}{\alpha_1\lambda_1}\int_0^T \frac{Q^2(t)}{\varphi^2(t)}dt. \tag{5}$$

Если товар приобретается по оптовой цене d, то прибыль от его продажи будет равна

$$P = S - dQ_0 = c_0\left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)\int_0^T \frac{Q(t)}{\varphi(t)}dt - \frac{c_0}{\alpha_1\lambda_1}\int_0^T \frac{Q^2(t)}{\varphi^2(t)}dt. - dQ_0 \tag{6}$$

Найдем оптимальный вид функции $\varphi(t)$. Мы видим, что зависит от двух функционалов

$$\int_0^T \frac{Q(t)}{\varphi(t)}dt \quad \text{и} \quad \int_0^T \frac{Q^2(t)}{\varphi^2(t)}dt.$$

Обозначая $Q(t)/\varphi(t) = f(t)$ получим зависимость от двух функционалов -

$$\int_0^T f(t)dt \quad \text{и} \quad \int_0^T f^2(t)dt.$$

В любом случае, попытка найти $max\, P$ по виду функции $f(t)$ приводит к задаче вида

$$\int_0^T f^2(t)dt + \kappa \int_0^T f(t)dt \Rightarrow extr, \tag{7}$$

где κ - неопределённый множитель Лагранжа. Приравнивая нулю вариацию по $f(t)$, получим, что $f(t) = const$.

Таким образом,

$$f(t) = \frac{Q(t)}{\varphi(t)} = C,$$

или, в явном виде,

$$\frac{1}{\varphi(t)} exp\left(-\mu t - \int_0^t \frac{dz}{\varphi(z)}\right) = C. \tag{8}$$

Переписывая его в виде

$$\frac{1}{\varphi(t)} exp\left(-\int_0^t \frac{dz}{\varphi(z)}\right) = Ce^{\mu^t}$$

и замечая, что

$$\frac{1}{\varphi(t)} exp\left(-\int_0^t \frac{dz}{\varphi(z)}\right) = -\left(exp\left(-\int_0^t \frac{dz}{\varphi(z)}\right)\right)^t,$$

получим

$$\left(exp\left(-\int_0^t \frac{dz}{\varphi(z)}\right)\right)^t = -Ce^{\mu^t}.$$

Отсюда имеем

$$exp\left(-\int_0^t \frac{dz}{\varphi(z)}\right) = -\frac{C}{\mu}e^{\mu^t} + C_1.$$

Так как при $t = 0 \quad \int_0^t \frac{dz}{\varphi(z)} = 0$, то

$$1 = -\frac{C}{\mu} + C_1, \quad C_1 = 1 + \frac{C}{\mu},$$

и поэтому

$$exp\left(-\int_0^t \frac{dz}{\varphi(z)}\right) = \frac{C}{\mu} - \frac{C}{\mu}e^{\mu^t} + 1.$$

Логарифмируя это выражение и дифференцируя, получим, после некоторых упрощений

$$\varphi(t) = \frac{\widetilde{C}e^{-\mu^t} - 1}{\mu}.$$

Возьмем константу $\widetilde{C}$ в виде $\widetilde{C} = e^{\mu CT}$ с некоторым $C \geq 1$. Тогда окончательно закон управления ценой примет вид

$$\alpha_1 \lambda(c) = \frac{Q(t)}{\varphi(t)}, \quad \varphi = \frac{e^{\mu(CT-t)} - 1}{\mu}. \tag{9}$$

Именно этот закон управления ценой и будет рассматриваться в дальнейшем. Заметим, что при $\mu \to 0 \quad \varphi(t) \to CT - t$, то есть мы получаем тот вид $\varphi(t)$, который обеспечивал максимум прибыли при продаже скоропортящихся товаров в предыдущих разделах.

Найдём теперь выручку и прибыль при данном законе управления ценой в детерминированном случае. Вычисляя интегралы, получим

$$Q(t) = Q_0 \frac{e^{\mu(CT-t)} - 1}{e^{\mu CT} - 1},$$

$$\int_0^T \frac{Q(t)}{\varphi(t)} dt = \frac{Q_0 \mu T}{e^{\mu CT} - 1}, \quad \int_0^T \frac{Q^2(t)}{\varphi^2(t)} dt = \frac{Q_0^2 \mu^2 T}{(e^{\mu CT} - 1)^2}.$$

Поэтому прибыль от продажи нашей партии товара равна

$$P = c_0 \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right) \frac{Q_0 \mu T}{e^{\mu CT} - 1} - \frac{c_0}{\lambda_1 \alpha_1} \frac{Q_0^2 \mu^2 T}{(e^{\mu CT} - 1)^2} - dQ_0. \tag{10}$$

Отсюда находится оптимальное значение Q_0:

$$Q_0 = \left[c_0 \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right) \frac{\mu T}{e^{\mu CT} - 1} - d\right] \frac{\lambda_1 \alpha_1 (e^{\mu CT} - 1)^2}{2\mu^2 T c_0}, \tag{11}$$

и максимальное значение прибыли

$$P_{max} = \left[c_0 \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right) \frac{\mu T}{e^{\mu CT} - 1} - d\right]^2 \frac{\lambda_1 \alpha_1 (e^{\mu CT} - 1)^2}{4\mu^2 T c_0}. \tag{12}$$

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Однако в этом случае есть дополнительная возможность - провести оптимизацию и по параметру . Обозначая комбинацию $e^{\mu Ct} - 1 = z$, получим

$$P_{max} = \left[c_0 \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right) \mu T z - dz^2\right]^2 \frac{\lambda_1 \alpha_1}{4\mu^2 T c_0},$$

и оптимальное значение z равно

$$z_{opt} = \frac{c_0(1 + \lambda_0/\lambda_1)\mu T}{2d} = e^{\mu C_{opt} T} - 1.$$

Отсюда оптимальное значение есть

$$C_{opt} = \frac{1}{\mu T} ln \left(1 + \frac{c_0(1 + \lambda_0/\lambda_1)\mu T}{d}\right). \qquad (13)$$

Так как $C \geq 1$, то окончательно

$$C_{opt} = max \left(1, \frac{1}{\mu T} ln \left(1 + \frac{c_0(1 + \lambda_0/\lambda_1)\mu T}{d}\right)\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Степанова Н.В., Терпугов А.Ф.* Оптимальное управление ценой при продаже скоропотящегося товара // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета, 2007, вып. 4(17), с. 35-39.
2. *Степанова Н.В., Терпугов А.Ф.* Управление ценой при продаже скоропортящейся продукции // Вестник Томского госуниверситета. Сер. Управление, вычислительная техника и информатика. 2007. №1. с. 22-35.
3. *Степанова Н.В.* Управление ценой при продаже портящегося товара // Научное творчество молодежи. Материалы XII Всероссийской научно-практической конференции. Анжеро-Судженск, 18-19 апреля 2008 г. Издательство Томского университета, 2008. Ч. 1, с. 40-43.