О ТОЧНОСТИ ОДНОГО МЕТОДА НАХОЖДЕНИЯ ОЖИДАЕМЫХ ДОХОДОВ В НМ-СЕТЯХ

С. Статкевич, М. Маталыцкий

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы
Гродно, Беларусь
sstat@grsu.by

В работе рассматривается экспоненциальная НМ-сеть с ограниченными временами ожидания заявок в очередях систем обслуживания и случайными доходами от переходов между ее состояниями. Обсуждается использование приближенной формулы $M\min(k_i(t), m_i) \approx \min(M\{k_i(t)\}, m_i)$, где $k_i(t)$ и m_i - соответственно число заявок и число линий обслуживания в $i-$ой системе, $i=\overline{1,n}$, при нахождении ожидаемых доходов.

Ключевые слова: НМ-сеть, ожидаемые доходы, неравенство Иенсена.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим открытую сеть массового обслуживания (МО) с однотипными заявками, состоящую из n СМО $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Под состоянием сети понимается вектор $k(t) = (k_1(t), k_2(t), \ldots, k_n(t))$, где $k_i(t)-$число заявок в системе S_i в момент времени t, $i=\overline{1,n}$. В сеть поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Интенсивность обслуживания заявок в момент времени t $\mu_i(k_i(t))$ в системе S_i зависит от числа заявок в ней (в очереди и на обслуживании) $k_i(t)$, $i=\overline{1,n}$. Пусть $p_{0j}-$вероятность поступления заявок в систему S_j из внешней среды, $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{0j} = 1$; $p_{ij}-$вероятность перехода заявки после обслуживания в системе S_i в систему S_j, $p_{00}=0$, $\sum\limits_{j=0}^{n} p_{ij} = 1$, $i=\overline{1,n}$. Заявка при переходе из одной СМО в другую приносит последней системе некоторый случайный доход и соответственно доход первой системы уменьшается на эту СВ.

Длительность пребывания заявок в очереди $i-$ой СМО является СВ, распределенной по экспоненциальному закону с параметром $\theta_i(k_i(t))$, и не зависит от других факторов, например, от времени пребывания в очереди других заявок. Заявка, время ожидания которой в очереди S_i истекло, переходит в систему S_j с вероятностью q_{ij}, $q_{ii}=0$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{0,n}$. Матрицы $P = \|p_{ij}\|_{(n+1)\times n}$ и $Q = \|q_{ij}\|_{n\times(n+1)}$ являются матрицами переходов неприводимых марковских цепей.

2. НАХОЖДЕНИЕ ОЖИДАЕМЫХ ДОХОДОВ

Обозначим через $V_i(t)$ доход системы S_i в момент времени t и пусть в начальный момент времени ее доход равен $V_i(0) = v_{i0}$. Доход этой же СМО в момент времени $t + \Delta t$ можно представить в виде

$$V_i(t + \Delta t) = V_i(t) + \Delta V_i(t, \Delta t), \tag{1}$$

где $\Delta V_i(t, \Delta t)$ - изменение дохода системы S_i на интервале времени $[t, t + \Delta t)$. Для величины $\Delta V_i(t, \Delta t)$ справедливо соотношение [1]:

$$\Delta V_i(t,\Delta t) = \begin{cases} r_{i0} + r_i\Delta t & \text{с вероятностью} \quad \lambda p_{0i}\Delta t + o(\Delta t), \\ -R_{i0} + r_i\Delta t & \text{с вероятностью} \quad \mu_i(k_i(t))u(k_i(t))p_{i0}\Delta t + o(\Delta t), \\ r_{ji} + r_i\Delta t & \text{с вероятностью} \quad \mu_j(k_j(t))u(k_j(t))p_{ji}\Delta t + o(\Delta t), \\ -R_{ij} + r_i\Delta t & \text{с вероятностью} \quad \mu_i(k_i(t))u(k_i(t))p_{ij}\Delta t + o(\Delta t), \\ -H_{i0} + r_i\Delta t & \text{с вероятностью} \quad \theta_i(k_i(t))u(k_i(t))q_{i0}\Delta t + o(\Delta t), \\ h_{ji} + r_i\Delta t & \text{с вероятностью} \quad \theta_j(k_j(t))u(k_j(t))q_{ji}\Delta t + o(\Delta t), \\ -H_{ij} + r_i\Delta t & \text{с вероятностью} \quad \theta_i(k_i(t))u(k_i(t))q_{ij}\Delta t + o(\Delta t), \\ r_i\Delta t & \text{с вероятностью} \quad 1 - \Big[\lambda p_{0i} + \big(\mu_i(k_i(t)) + \\ & \qquad +\theta_i(k_i(t))\big)u(k_i(t)) + \sum\limits_{\substack{j=1 \\ (j\neq i)}}^{n} \big(\mu_j(k_j(t))p_{ji} + \\ & \qquad +\theta_j(k_j(t))q_{ji}\big)u(k_j(t))\Big]\Delta t + o(\Delta t), \end{cases} \tag{2}$$

где r_{0i} - доход системы S_i, который приносит ей заявка, поступающая из внешней среды, $M\{r_{0i}\} = a_{0i}$, $-R_{i0}$ - убытки системы S_i, приносящие ей заявкой, уходящей из нее во внешнюю среду, $M\{R_{i0}\} = b_{i0}$, $r_i\Delta t$ - увеличение дохода системы S_i за время Δt, когда состояние сети не меняется, $-H_{i0}$ - убытки системы S_i, приносящие ей заявкой которая уходит из нее во внешнюю среду, не дождавшись обслуживания, $i = \overline{1,n}$; r_{ji} - доход системы S_i, который приносит ей заявка, поступающая из системы S_j, $M\{r_{ji}\} = a_{ji}$, $-R_{ij}$ - убытки системы S_i, приносящие ей заявкой, уходящей из нее в систему S_j, $M\{R_{ij}\} = b_{ij}$, h_{ji} - доход системы S_i, приносящий ей заявкой, которая поступает из системы S_j, не дождавшись в ней обслуживания, $M\{h_{ji}\} = \overline{h}_{ji}$, $-H_{ij}$ - убытки системы S_i, приносящие ей заявкой, которая, не дождавшись в ней обслуживания, переходит в систему S_j, $M\{H_{ij}\} = \overline{H}_{ij}$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1,n}$.

Записывая, учитывая (2), выражения для $M\{\Delta V(t, \Delta t)/k(t)\}$ при фиксированной реализации процесса $k(t)$, и усредняя по $k(t)$ с учетом условия нормировки $\sum\limits_k P(k(t) = k) = 1$, для изменения ожидаемого дохода системы S_i получаем

$$M\{\Delta V_i(t, \Delta t)\} = \sum_k P(k(t) = k)M\{\Delta V_i(t, \Delta t)/k(t)\} =$$

$$= \left[\lambda p_{0i}a_{0i} + c_i - \left(p_{i0}b_{i0} + \sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{n} p_{ij}b_{ij}\right)\sum_k P(k(t)=k)\mu_i(k_i(t))u(k_i(t)) - \right.$$

$$- \left(q_{i0}\overline{H}_{i0} + \sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{n} q_{ij}\overline{H}_{ij}\right)\sum_k P(k(t)=k)\theta_i(k_i(t))u(k_i(t)) +$$

$$+ \sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{n}\sum_k P(k(t)=k)\Big(\mu_j(k_j(t))u(k_j(t))p_{ji}a_{ji} +$$

$$\left. + \theta_j(k_j(t))u(k_j(t))q_{ji}\overline{h}_{ji}\Big)\right]\Delta t + o(\Delta t). \qquad (3)$$

Пусть система S_i содержит m_i идентичных линий обслуживания, в каждой из которых время обслуживания заявок распределено по показательному закону с параметром μ_i, $i = \overline{1,n}$. В этом случае

$$\mu_i(k_i(t)) = \begin{cases} \mu_i k_i(t), & k_i(t) \le m_i, \\ \mu_i m_i, & k_i(t) > m_i, \end{cases} \qquad \mu_i(k_i(t))u(k_i(t)) = \mu_i \min(k_i(t), m_i).$$

И пусть также

$$\theta_i(k_i(t)) = \begin{cases} \theta_i k_i(t), & k_i(t) \le m_i, \\ \theta_i m_i, & k_i(t) > m_i, \end{cases} \qquad \text{т.е. } \theta_i(k_i(t))u(k_i(t)) = \theta_i \min(k_i(t), m_i).$$

Будем предполагать, что усреднение выражения $\mu_i(k_i(t))u(k_i(t))$ дает величину $\mu_i \min(N_i(t), m_i)$, где $N_i(t) = M\{k_i(t)\}$ - среднее число заявок (ожидающихся и обслуживающихся) в системе S_i, в момент времени t, т.е.

$$M \min(k_i(t), m_i) = \min(N_i(t), m_i), \quad i = \overline{1,n}. \qquad (4)$$

Введем обозначение $v_i(t) = M\{V_i(t)\}$, $i = \overline{1,n}$. Тогда из (1) следует

$$v_i(t+\Delta t) = v_i(t) + M\{\Delta V_i(t, \Delta t)\}.$$

Учитывая (3) и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, имеем неоднородное линейное ОДУ первого порядка

$$\frac{dv_i(t)}{dt} = -\left[\mu_i\left(p_{i0}b_{i0} + \sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{n} p_{ij}b_{ij}\right) + \theta_i\left(q_{i0}\overline{H}_{i0} + \sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{n} q_{ij}\overline{H}_{ij}\right)\right]\min(N_i(t), m_i) +$$

$$+ \sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{n}\left(\mu_j p_{ji}a_{ji} + \theta_j q_{ji}\overline{h}_{ji}\right)\min(N_j(t), m_j) + \lambda p_{0i}a_{0i} + c_i.$$

Задав начальные условия $v_i(0) = v_{i0}$, $i = \overline{1,n}$, можно найти ожидаемые доходы систем сети:

$$v_i(t) = v_{i0} + (c_i + \lambda p_{0i} a_{0i})t +$$
$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ (j\neq i)}}^{n} (\mu_j p_{ji} a_{ji} + \theta_j q_{ji} \overline{h}_{ji}) \int_0^t \min(N_j(s), m_j) ds - \left[\mu_i \left(p_{i0} b_{i0} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j\neq i)}}^{n} p_{ij} b_{ij} \right) + \right.$$
$$\left. + \theta_i \left(q_{i0} \overline{H}_{i0} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j\neq i)}}^{n} q_{ij} \overline{H}_{ij} \right) \right] \int_0^t \min(N_i(s), m_i) ds, \quad i = \overline{1,n}. \tag{5}$$

Замечание. Функция $y = \min(x_i, m_i)$ *является выпуклой кверху и поэтому из неравенства Иенсена следует, что* $M \min(k_i(t), m_i) \leq \min(N_i(t), m_i)$*, причем равенство достигается, когда*

$$N_i(t) = M\{k_i(t)\} = k_i(t), i = \overline{1,n}. \tag{6}$$

Таким образом, при выполнении условия (6) *соотношения* (4), (5) *являются точными. Это условие выполняется, например, когда входящие в сеть потоки заявок являются регулярными, а времена обслуживания заявок в системах постоянными. Отметим также, что условие* (4) *выполняется, когда все СМО сети функционируют в условиях малой нагрузки, т.е.* $\forall t \ k_i(t) \leq m_i$ *или высокой нагрузки, т.е.* $\forall t \ k_i(t) > m_i$, $i = \overline{1,n}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Статкевич С. Э., Маталыцкий М. А.* Об одном методе исследования НМ-сетей с ограниченным временем ожидания заявок // Вестник Гродненского государственного университета. Сер. 2, 2010. № 1. С. 13–19.