О ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ ПРИ НЕКОТОРЫХ ДИСЦИПЛИНАХ ОБСЛУЖИВАНИЯ В СИСТЕМЕ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЗАЯВКАМИ И БУНКЕРОМ

А. Печинкин[1], **Р. Разумчик**[2,*]

[1]*Институт проблем информатики РАН,*
[2]*Российский Университет Дружбы Народов*
[1,2]*Москва, Россия*
*rrazumchik@ieee.org

Рассматривается однолинейная система массового обслуживания с отрицательными заявками и накопителем бесконечной емкости. Отрицательная заявка вытесняет (обычную) заявку из накопителя в бункер также бесконечной емкости. Заявки из накопителя обслуживаются с относительным приоритетом по отношению к заявкам из накопителя. Для двух дисциплин выбора на обслуживание и вытеснения заявок получено в терминах преобразования Лапласа–Стилтьеса распределение времени ожидания начала обслуживания.

Ключевые слова: отрицательные заявки, бункер, время ожидания.

1. ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрим однолинейную систему массового обслуживания (СМО), в которую поступает пуассоновский поток заявок интенсивности λ. Заявки этого потока будем называть положительными. Для них имеется накопитель неограниченной емкости. Дополнительно в систему поступает пуассоновский поток отрицательных заявок интенсивности λ^-. Отрицательная заявка перемещает одну положительную заявку из накопителя в бункер неограниченной емкости и после этого покидает систему. Если в момент поступления отрицательной заявки в накопителе нет положительных заявок, то, вне зависимости от состояния прибора, отрицательная заявка покидает систему, не оказывая на нее никакого воздействия.

После окончания обслуживания очередной заявки на прибор становится заявка из накопителя или, если накопитель пуст, из бункера. Прерывание обслуживания заявок не допускается. Длительности обслуживания заявок, как из накопителя, так и из бункера, имеют экспоненциальное распределение с одним и тем же параметром μ. Далее будем предполагать, что выполнено необходимое и достаточное условие $\rho = \lambda/\mu < 1$ существования стационарного режима функционирования СМО.

Описанная выше система с отрицательными заявками, которые не «убивают» находящиеся в системе заявки, а лишь откладывают их обслуживание на случайное время, вытесняя в другую очередь, была введена в [1], где были получены результаты, связанные со стационарными распределениями (совместным и маргинальными) чисел заявок в системе.

В настоящей работе находится распределение времени ожидания начала обслуживания в рассматриваемой СМО для следующих дисциплин выбора из накопителя и бункера на обслуживание и вытеснения из накопителя в бункер:

- при поступлении отрицательной заявки вытесняется последняя заявка из очереди в накопителе, а в момент окончания обслуживания заявки на приборе на обслуживание выбирается первая заявка из очереди в накопителе или, если накопитель пуст, первая заявка из очереди в бункере (дисциплина *LAST-FIFO-FIFO*);
- при поступлении отрицательной заявки вытесняется первая заявка из очереди в накопителе, а в момент окончания обслуживания заявки на приборе на обслуживание выбирается последняя заявка из очереди в накопителе или, если накопитель пуст, первая заявка из очереди в бункере (дисциплина *FIRST-LIFO-FIFO*);

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $\{p_{km},\ m \geq 0,\ k \geq u(m)\}$ (здесь и далее через $u(x)$ обозначается функция Хевисайда) — стационарное распределение вероятностей того, что в накопителе и на приборе находится k заявок, а в бункере — m заявок. Тогда, используя вид двойной производящей функции (ПФ) $P(u,v) = p_{00} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{\infty} p_{km}u^k v^m$, найденный в [1], можно показать, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_{km}v^m = (1-\rho)\left(1 - \frac{\lambda^-}{\lambda u_2 - \mu}\right)\frac{1}{u_1^k}\,, \quad k \geq 1, \tag{1}$$

где

$$u_{1,2} = u_{1,2}(v) = \frac{\lambda + \mu + \lambda^- \pm \sqrt{(\lambda+\mu+\lambda^-)^2 - 4\lambda(\mu + \lambda^- v)}}{2\lambda}\,.$$

Подставляя $v = 1$ в (1), легко найти вид вероятностей $\{p_{i,\cdot}\ \ i \geq 0\}$ того, что в накопителе и на приборе находятся i заявок:

$$p_{i,\cdot} = \begin{cases} 1-\rho, & i = 0, \\ \rho(1-q)q^{i-1}, & i \geq 1, \quad q = \dfrac{\lambda}{\mu + \lambda^-}\,. \end{cases} \tag{2}$$

Рассмотрим теперь период занятости (ПЗ) системы $M/M/1/\infty$ с входящим потоком интенсивности λ и интенсивностью обслуживания b. Обозначим через $G(x;b)$ функцию распределения (ФР) ПЗ этой системы, а через $\gamma(s;b) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} dG(x;b)$ — преобразование Лапласа–Стилтьеса (ПЛС) ФР $G(x;b)$. Тогда (см., например [2, 3])

$$\gamma(s;b) = \frac{s+\lambda+b-\sqrt{(s+\lambda+b)^2-4\lambda b}}{2\lambda}.$$

Обозначим через $G(x,k;b)$ вероятность того, что ПЗ этой системы будет меньше x и на нем обслужится ровно k заявок. Двойное преобразование (ПЛС по x и ПФ по k) $\gamma(s,z;b) = \sum\limits_{k=1}^\infty z^k \int\limits_0^\infty e^{-sx} dG(x,k;b)$ задается формулой

$$\gamma(s,z;b) = \frac{s+\lambda+b-\sqrt{(s+\lambda+b)^2-4\lambda z b}}{2\lambda}.$$

Наконец, через $G^*(x)$ обозначим ФР ПЗ СМО $M/M/1/\infty$ с параметрами $\lambda^* = \lambda\mu/(\mu+\lambda^-)$ и μ. Отметим, что $G^*(x)$ представляет собой также ФР ПЗ СМО $M/M/1/\infty$ с параметрами λ и $(\mu+\lambda^-)$, открываемого заявкой экспоненциальной с параметром μ длины. ПЛС ФР $G^*(x)$ имеет вид

$$\gamma^*(s) = \frac{\mu}{\mu+s+\lambda[1-\gamma(s;\mu+\lambda^-)]}.$$

3. ДИСЦИПЛИНА *LAST-FIFO-FIFO*

Найдем стационарное распределение времени ожидания начала обслуживания поступившей в систему заявки при дисциплине *LAST-FIFO-FIFO*.

Обозначим через $F(x)$ стационарную вероятность того, что попавшая в накопитель заявка поступит из накопителя на прибор, причем за время меньше x, при условии, что за это время не будет вытеснена («убита») ни одна заявка. Тогда

$$F(x) = \frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^\infty p_{i,\cdot}\, H_i(x;\mu)$$

(здесь и далее $H_i(x;\mu)$ — ФР Эрланга с i фазами и интенсивностью обслуживания μ). С учетом (2) вероятность $F(x)$ в терминах ПЛС задается выражением

$$\psi(s) = (1-q)\sum_{i=1}^\infty q^{i-1}\left(\frac{\mu}{s+\mu}\right)^i = \frac{\mu(1-q)}{s+\mu(1-q)},$$

обращая которое, имеем:

$$f(x) = F'(x) = \mu(1-q)e^{-\mu(1-q)x}, \quad x > 0.$$

Вероятность того, что заявка поступит из накопителя в бункер, причем за время меньше x, при условии, что за время x не будет обслужена ни одна заявка, имеет ФР $G(x;\lambda^-)$ с ПЛС $\gamma(s;\lambda^-)$.

Таким образом, стационарная вероятность $V_{nak}(x)$ того, что заявка поступит из накопителя сразу же на прибор, причем за время меньше x, имеет ПЛС

$$\varphi_{nak}(s) = p_0+\rho\int\limits_0^\infty e^{-sx}[1-G(x;\lambda^-)]f(x)\,dx = 1-\rho+\frac{\lambda(1-q)[1-\gamma(s+\mu(1-q);\lambda^-)]}{s+\mu(1-q)}\,.$$

Перейдем к вычислению стационарной вероятности $V_{bun}(x)$ того, что заявка поступит из накопителя в бункер, а затем из бункера на прибор, причем за время меньше x.

Обозначим через $F_n(x,k,l)$, $n\geq 0$, $k=\overline{0,n}$, $l\geq 1$, вероятность того, что выделенная заявка попадет из накопителя в бункер, причем за время меньше x, и за это время в бункер поступит еще l заявок , $l\geq 1$, а в момент перехода в бункер этой заявки в накопителе будет k заявок, при условии, что в момент поступления выделенной заявки в систему в накопителе было n заявок. Тогда, учитывая, что $g(x,l;b)=G'_x(x,k;b)$, имеем

$$f_n(x,k,l)=F'_n(x,k,l)=\frac{(\mu x)^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\mu x}g(x,l;\lambda^-),\quad n\geq 0,\quad k=\overline{0,n},\quad l\geq 1.$$

Поскольку после перехода выделенной заявки в буфер она до поступления на прибор будет ждать время обслуживания заявки на приборе, заявок в бункере и всех их «неубитых» потомков, а также время обслуживания «неубитых» заявок в накопителе и их «неубитых» потомков. Поэтому ПЛС стационарной вероятности $V_{bun}(x)$ определяется формулой

$$\varphi_{bun}(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}p_{n+1,m}\int\limits_0^\infty e^{-sx}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=1}^{\infty}f_n(x,k,l)(\gamma^*(s))^{l+m}(\gamma(s;\mu+\lambda^-))^k dx,$$

которая, после упрощения с учетом (1), принимает следующий вид:

$$\varphi_{bun}(s)=\frac{(1-\rho)(\lambda u_2(\gamma^*(s))-\mu-\lambda^-)\gamma\left(s+\mu-\frac{\mu}{u_1(\gamma^*(s))},\gamma^*(s);\lambda^-\right)}{[\lambda u_2(\gamma^*(s))-\mu][u_1(\gamma^*(s))-\gamma(s;\mu+\lambda^-)]}\,.$$

Стационарное распределение общего времени ожидания начала обслуживания поступившей в систему заявки $V(x)$ находится в терминах в терминах ПЛС $\varphi(s)=\int\limits_0^\infty e^{-sx}dV(x)$ по формуле:

$$\varphi(s)=\varphi_{nak}(s)+\varphi_{bun}(s).$$

Дифференцируя последнюю формулу соответствующее число раз, нетрудно получить выражения для моментов любого порядка стационарного распределения времени ожидания начала обслуживания заявки. В частности, среднее общее время ожидания начала обслуживания равно

$$-\varphi'(0)=\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}. \tag{3}$$

4. ДИСЦИПЛИНА *FIRST-LIFO-FIFO*

Найдем теперь стационарное распределение времени ожидания начала обслуживания поступившей в систему заявки при дисциплине *FIRST-LIFO-FIFO*.

Вводя стационарную вероятность $F(x)$ того, что заявка поступит из накопителя в бункер, причем за время меньше x, при условии, что за это время не обслужится ни одна заявка, и используя те же самые рассуждения, что и в предыдущем разделе, получаем для нее следующее выражение:

$$F(x) = \frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{\infty} p_{i,\cdot}\ H_i(x;\lambda^-) = 1 - e^{-\lambda^-(1-q)x},$$

а для ПЛС стационарной вероятности $V_{nak}(x)$ того, что заявка поступит из накопителя сразу же на прибор, причем за время меньше x, — выражение

$$\varphi_{nak}(s) = p_0 + \rho\int_0^{\infty} e^{-sx}[1-F(x)]\,dG(x;\mu) = 1-\rho+\rho\gamma(s+\lambda^-(1-q);\mu).$$

Перейдем к вычислению стационарной вероятности $V_{bun}(x)$ того, что заявка поступит из накопителя в бункер, а затем из бункера на прибор, причем за время меньше x.

Обозначим через $F(x,k)$, $k \geq 0$, вероятность того, что за время x заявка не поступит из накопителя на прибор и в момент x за ней будет k других заявок, при условии, что за время x не будет убита ни одна заявка. Эта вероятность совпадает с вероятностью того, что ПЗ СМО $M/M/1/\infty$ с параметрами λ и μ не закончится к моменту x и в момент x в этой системе в очереди будет k заявок. Двойное преобразование (преобразование Лапласа по x и ПФ по k) вероятности $F(x,k)$ имеет вид (см., например, [2], гл. 5, § 5.2)

$$\psi(s,z) = \frac{\phi(s,z)}{\mu+s+\lambda-\lambda z}, \qquad \phi(s,z) = \frac{z-\gamma(s;\mu)}{z-\dfrac{\mu}{\mu+s+\lambda-\lambda z}}.$$

Далее, вероятность того, что заявка, попавшая в накопитель, в котором находится еще n заявок, переместится в бункер, причем за время меньше x, при условии, что за это время не обслужится ни одна заявка, равна $H_{n+1}(x;\lambda^-)$.

После перехода выделенной заявки в буфер она до поступления на прибор будет ждать еще время обслуживания заявки на приборе и заявок в бункере (а к моменту перехода выделенной заявки в буфер все n заявок, находившихся в накопителе в момент поступления в систему выделенной, переместятся в бункер) и всех их «неубитых» потомков, а также время обслуживания k «неубитых» заявок в накопителе и их «неубитых» потомков. Значит, ПЛС стационарной вероятности $V_{bun}(x)$ определяется формулой

$$\varphi_{bun}(s) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} p_{k+1,m}\int_0^{\infty} e^{-sx}\sum_{i=0}^{\infty} F(x,i)(\gamma^*(s))^{k+m+1}(\gamma(s;\mu+\lambda^-))^i\,dH_{k+1}(x;\lambda^-),$$

которая после упрощения принимает с учетом (1) следующий вид:

$$\varphi_{bun}(s) = \frac{\lambda^-(1-\rho)\gamma^*(s)(\lambda u_2 - \mu - \lambda^-)}{(\lambda u_2 - \mu)u_1(\gamma^*(s))}\psi\left(s + \lambda^- - \frac{\lambda^-\gamma^*(s)}{u_1(\gamma^*(s))}, \gamma(s; \mu + \lambda^-)\right).$$

Как и в предыдущем разделе, ПЛС стационарного распределения общего времени ожидания начала обслуживания поступившей в систему заявки имеет вид

$$\varphi(s) = \varphi_{nak}(s) + \varphi_{bun}(s),$$

а среднее общее время ожидания определяется формулой (3).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как показано в предыдущих разделах и как следует из формулы Литтла, средние общие времена ожидания начала обслуживания для поступающей заявки совпадают для обеих рассмотренных дисциплин. Между тем, значения дисперсий времени ожидания различны.

Проведенные численные расчеты показали, что наилучшей (обладающей минимальной дисперсией времени ожидания начала обслуживания заявки) дисциплиной вне зависимости от исходных параметров λ, μ и λ^- является дисциплина $LAST$-$FIFO$-$FIFO$.

Заметим, что при $\lambda^- \to \infty$ дисперсии времени ожидания обеих дисциплин, как и должно быть, стремятся к дисперсии в системе $M/M/1/\infty$ при отсутствии отрицательных заявок и обслуживании заявок из накопителя в порядке поступления, т.е. к $\rho(2-\rho)/(\mu^2(1-\rho)^2)$.

Для проверки правильности полученных аналитических соотношений была разработана с помощью программных средств GPSS [4] имитационная модель, результаты расчетов по которой практически совпали с результатами численных расчетов на основе полученных аналитических соотношений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мандзо Р., Касконе Н., Разумчик Р. В.* Экспоненциальная система массового обслуживания с отрицательными заявками и бункером для вытесненных заявок // Автоматика и телемеханика. 2008. V. 9. P. 103–113.
2. *Бочаров П. П., Печинкин А. В.* Теория массового обслуживания. М.: Изд-во РУДН, 1995.
3. *Kleinrock L.* Queueing Systems: Volume I – Theory. New York: Wiley Interscience, 1975.
4. *Бражник А. Н.* Имитационное моделирование: возможности GPSS World. СПб.: Реноме, 2006.