ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ЧИСЛОМ ОБСЛУЖИВАЮЩИХ ПРИБОРОВ И ВХОДЯЩИМ РЕКУРРЕНТНЫМ ПОТОКОМ

А. Назаров, И. Семенова*

Томский государственный университет
Томск, Россия
*inna_ac@mail.ru

В данной работе проведено исследование системы массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов и входящим рекуррентным потоком. Записаны моменты первого, второго и третьего порядков числа занятых приборов в блоке обслуживания. Проведено исследование данной системы методом асимптотического анализа до третьего порядка.

Работа выполнена в рамках аналитической ведомственной целевой программы “Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы)” проект № 4761.

Ключевые слова: рекуррентный поток заявок, метод моментов, асимптотический анализ.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследованию рекуррентного потока событий посвящено большое количество работ. В книге Д.Кокса, В. Смита [2] подробно исследуется рекуррентный поток событий как основная и наиболее простая модель теории восстановления. Данная теория получила многочисленные применения в ряде направлений исследования – теории надежности, теории массового обслуживания, теории запасов и многих других приложениях. Результаты теории восстановления являются мощным средством исследования как теоретических, так и прикладных проблем. Часто применение того или иного факта теории восстановления позволяет очень просто получать результаты, которые сложно и трудно получать при другом подходе.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов. На вход системы поступает рекуррентный поток заявок, заданный функцией распределения $A(x)$ – длин интервалов между моментами наступления событий рассматриваемого потока. Продолжительности обслуживания различных заявок стохастически независимы, одинаково распределены и имеют экспоненциальное распределение с параметром μ. Поступившая заявка занимает любой из свободных приборов, завершив обслуживание, заявка покидает систему.

Для рассматриваемой системы обозначим $i(t)$ – число занятых приборов. В силу того, что процесс $i(t)$ является немарковским, определим процесс $z(t)$ как длину интервала от момента t до момента наступления следующего события в рекуррентном потоке, тогда случайный двумерный процесс $\{z(t), i(t)\}$ является марковским. Найдем распределение вероятностей этого процесса

$$P\left(z,i,t\right) = P\{z\left(t\right) < z, i\left(t\right) = i\}.$$

Для распределения вероятностей $P(z,i,t)$ составим систему уравнений Колмогорова в стационарном режиме

$$\frac{\partial P\left(z,i\right)}{\partial z} - \frac{\partial P\left(0,i\right)}{\partial z} - i\mu P\left(z,i\right) + \left(i+1\right)P\left(z,i+1\right) + \frac{\partial P\left(0,i-1\right)}{\partial z}A\left(z\right) = 0. \quad (1)$$

Применяя (1), составим систему уравнений, определяющих характеристические функции $H\left(z,u\right) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} e^{jui}P\left(z,i\right)$, для $H(z,u)$ получим уравнение

$$\frac{\partial H\left(z,u\right)}{\partial z} + \frac{\partial H\left(0,u\right)}{\partial z}\left(e^{ju}A\left(z\right)-1\right) - \mu j\left(e^{-ju}-1\right)\frac{\partial H\left(z,u\right)}{\partial u} = 0, \quad (2)$$

решение $H(z,u)$ которого удовлетворяет условию

$$H\left(z,0\right) = \sum_{i=0}^{\infty} P\left(z,i\right) = R\left(z\right),$$

где $R(z)$ – стационарное распределение вероятностей значений случайного процесса $z(t)$. Известно, что распределение $R(z)$ имеет вид

$$R\left(z\right) = \lambda\int\limits_{0}^{z}\left(1-A\left(x\right)\right)dx, \quad (3)$$

где $\lambda = \frac{1}{a}$, $a = \int\limits_{0}^{\infty} x dA\left(x\right)$, в частности имеет место равенство

$$\left.\frac{\partial R\left(z\right)}{\partial z}\right|_{z=0} = \lambda.$$

3. МЕТОД МОМЕНТОВ

3.1. Момент первого порядка. Из свойств характеристических функций имеем [1] $\left.\frac{\partial H(z,u)}{\partial u}\right|_{u=0} = jm_1\left(z\right)$. Продифференцируем уравнение (2) по u, получим

$$\frac{\partial^2 H\left(z,u\right)}{\partial z\partial u} + \frac{\partial^2 H\left(0,u\right)}{\partial z\partial u}\left(e^{ju}A\left(z\right)-1\right) + \frac{\partial H\left(0,u\right)}{\partial z}je^{ju}A\left(z\right) -$$

$$-\mu j\left(-j\right)e^{-ju}\frac{\partial H\left(z,u\right)}{\partial u}-\mu j\left(e^{-ju}-1\right)\frac{\partial^{2}H\left(z,u\right)}{\partial u^{2}}=0, \tag{4}$$

откуда при $u=0$ имеем

$$\frac{\partial m_{1}\left(z\right)}{\partial z}+\frac{\partial m_{1}\left(0\right)}{\partial z}\left(A\left(z\right)-1\right)+\lambda A\left(z\right)-\mu m_{1}\left(z\right)=0. \tag{5}$$

Дальнейшее решение будем проводить с помощью преобразования Лапласа-Стильтьеса

$$\varphi_{1}\left(\alpha\right)=\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\alpha z}dm_{1}\left(z\right),\quad A^{*}\left(\alpha\right)=\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\alpha z}dA\left(z\right),$$

выполнив в (5) преобразования Лапласа-Стильтьеса, получим равенство

$$\left(\mu-\alpha\right)\varphi_{1}\left(\alpha\right)=\frac{\partial m_{1}\left(0\right)}{\partial z}\left(A^{*}\left(\alpha\right)-1\right)+\lambda A^{*}\left(\alpha\right), \tag{6}$$

откуда

$$\varphi_{1}\left(\alpha\right)=\frac{1}{\mu-\alpha}\left[\frac{\partial m_{1}\left(0\right)}{\partial z}\left(A^{*}\left(\alpha\right)-1\right)+\lambda A^{*}\left(\alpha\right)\right]. \tag{7}$$

Обозначим в (6) $\alpha{=}\mu$, получим равенство

$$\frac{\partial m_{1}\left(0\right)}{\partial z}=\lambda\frac{A^{*}\left(\mu\right)}{1-A^{*}\left(\mu\right)}. \tag{8}$$

В силу того, что $\varphi_{1}\left(0\right)=\int\limits_{0}^{\infty}dm_{1}\left(z\right)=m_{1}\left(\infty\right)-m_{1}\left(0\right)=m_{1}\left(\infty\right)$, из равенства (7), и учитывая (8), запишем

$$m_{1}\left(\infty\right)=\varphi_{1}\left(0\right)=\frac{1}{\mu}\left[\lambda\frac{A^{*}\left(\mu\right)}{1-A^{*}\left(\mu\right)}\cdot\left(A^{*}\left(0\right)-1\right)+\lambda A^{*}\left(0\right)\right].$$

Используя то, что $A^{*}\left(0\right)=\int\limits_{0}^{\infty}dA\left(z\right)=A\left(\infty\right)-A\left(0\right)=1$, получим

$$m_{1}\left(\infty\right)=\frac{\lambda}{\mu}.$$

3.2. Момент второго порядка. Аналогично моменту первого порядка запишем равенство, определяющее момент третьего порядка числа занятых приборов

$$m_{2}\left(\infty\right)=\frac{\lambda}{\mu}\left\{\frac{1}{1-\mathrm{A}^{*}\left(\mu\right)}\right\}.$$

3.3. Момент третьего порядка. Момент третьего порядка числа занятых приборов имеет вид

$$m_3(\infty) = \frac{\lambda}{\mu}\left\{\frac{1}{1-\mathrm{A}^*(\mu)}\left[1+2\frac{\mathrm{A}^*(2\mu)}{1-\mathrm{A}^*(2\mu)}\right]\right\}.$$

Для более детального исследования многолинейной системы массового обслуживания с входящим рекуррентным потоком воспользуемся основным уравнением для характеристических функций (2), которое будем решать методом аимптотического анализа в условии растущего времени обслуживания, то есть при $\mu \to 0$, что позволит найти асимптотическое распределение вероятностей числа занятых приборов в рассматриваемой системе.

4. МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

4.1. Асимптотика первого порядка. Для нахождении асимптотики первого порядка обозначим $\mu = \varepsilon$, и в уравнении (2) выполним замены $u = \varepsilon w$, $H(z,u) = F_1(z,w,\varepsilon)$, для $F_1(z,w,\varepsilon)$ получим уравнение

$$\frac{\partial F_1(z,w,\varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial F_1(0,w,\varepsilon)}{\partial z}\left(e^{j\varepsilon w}A(z)-1\right) - j\left(e^{-j\varepsilon w}-1\right)\frac{\partial F_1(z,w,\varepsilon)}{\partial w} = 0. \quad (9)$$

Теорема 1. *Предельное, при $\varepsilon \to 0$, значение $F_1(z,w)$ решения $F_1(z,w,\varepsilon)$ уравнения (9) имеет вид*

$$F_1(z,w) = R(z)\cdot \mathbf{e}^{\{jw\lambda\}},$$

где вектор функция $R(z)$ и параметр λ определены выше.

Доказательство. В уравнении (9) выполним предельный переход при $\varepsilon \to 0$, получим уравнение

$$\frac{\partial F_1(z,w)}{\partial z} + \frac{\partial F_1(0,w)}{\partial z}(A(z)-1) = 0,$$

решение $F_1(z,w)$ которого запишем в виде

$$F_1(z,w) = R(z)\,\Phi_1(w), \quad (10)$$

где $R(z)$ определено выше, а функцию $\Phi_1(w)$ определим следующим образом. В уравнении (9) выполним предельный переход, при $z \to \infty$, затем подставив сюда произведение (10) получим равенство определяющее функцию $\Phi_1(w)$

$$\Phi_1(w) = \mathbf{e}^{\{jw\lambda\}}.$$

□

В силу произведения (10) и обратных замен для характеристической функции величины $i(t)$ в стационарном режиме, запишем

$$Me^{jui(t)} = H(\infty,u) = \mathbf{e}^{\left\{ju\frac{\lambda}{\mu}\right\}}.$$

Полученное равенство будем называть асимптотикой первого порядка характеристической функции числа занятых приборов системы с входящим рекуррентным потоком [3].

4.2. Асимптотика второго порядка. Для нахождении асимптотики второго порядка в уравнении (2) выполним замену $H(z,u) = H_2(z,u)\mathbf{e}^{\left\{ju\frac{\lambda}{\mu}\right\}}$, обозначим $\mu = \varepsilon^2$, $u = \varepsilon w$, $\quad H_2(z,u) = F_2(z,w,\varepsilon)$. Тогда для F_2(z,w,ε) получим уравнение

$$\frac{\partial F_2(z,w,\varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial F_2(0,w,\varepsilon)}{\partial z}\left(e^{j\varepsilon w}A(z) - 1\right) + j\varepsilon\left(1 - e^{-j\varepsilon w}\right)\frac{\partial F_2(z,w,\varepsilon)}{\partial w} -$$
$$- \lambda\left(1 - e^{-j\varepsilon w}\right)F_2(z,w,\varepsilon) = 0. \tag{11}$$

Теорема 2. *Предельное, при $\varepsilon \to 0$, значение $F_2(z,w)$ решения $F_2(z,w,\varepsilon)$ уравнения (11) имеет вид*

$$F_2(z,w) = R(z)\cdot\mathbf{e}^{\left\{\frac{(jw)^2}{2}\kappa_2\right\}},$$

где величина κ_2 определяется равенством

$$\kappa_2 = \lambda + \frac{\partial f_2(0)}{\partial z}, \tag{12}$$

а вектор функция $f_2(z)$ удовлетворяет условию $f_2(\infty)E = 0$ и является решением уравнения

$$\frac{\partial f_2(z)}{\partial z} + \frac{\partial f_2(0)}{\partial z}(A(z) - 1) + \frac{\partial R(0)}{\partial z}A(z) - \lambda R(z) = 0. \tag{13}$$

Доказательство. Решение $F_2(z,w,\varepsilon)$ уравнения (11) запишем в виде разложения

$$F_2(z,w,\varepsilon) = \Phi_2(w)\{R(z) + j\varepsilon w f_2(z)\} + O(\varepsilon^2). \tag{14}$$

Здесь вектор функция $R(z)$ определена выше, вектор функция $f_2(z)$ удовлетворяет условию $f_2(\infty)E = 0$ и будет определена ниже, так же как и функция $\Phi_2(w)$.

Подставляя (14) в равенство (11) получим

$$\frac{\partial R(z)}{\partial z} + j\varepsilon w\frac{\partial f_2(z)}{\partial z} + \left\{\frac{\partial R(0)}{\partial z} + j\varepsilon w\frac{\partial f_2(0)}{\partial z}\right\}(A(z) - 1) +$$
$$+ j\varepsilon w\frac{\partial R(0)}{\partial z}A(z) - \lambda j\varepsilon w R(z) = O(\varepsilon^2). \tag{15}$$

В силу того, что выполняется равенство $\frac{\partial R(z)}{\partial z} + \frac{\partial R(0)}{\partial z}(A(z) - 1) = 0$, равенство (15) перепишем в виде

$$\frac{\partial f_2(z)}{\partial z} + \frac{\partial f_2(0)}{\partial z}(A(z) - 1) - \lambda R(z) + \frac{\partial R(0)}{\partial z}A(z) = 0,$$

которое совпадает с (13) и определяет функцию $f_2(z)$.

Для того, чтобы найти скалярную функцию $\Phi_2(w)$ в уравнении (11) устремим $z \to \infty$, разложим в ряд экспоненты и выполним замену (14), получим равенство

$$\varepsilon^2 w\frac{\partial \Phi_2(w)}{\partial w} = 2\lambda\frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\Phi_2(w) + (j\varepsilon w)^2\Phi_2(w)\frac{\partial f_2(0)}{\partial z} + \mathrm{O}\left(\varepsilon^3\right) \quad ,$$

в котором выполним предельный переход при $\varepsilon \to 0$, получим равенство

$$\Phi_2(w) = \mathbf{e}^{\left\{\frac{(jw)^2}{2}\kappa_2\right\}},$$

где $\kappa_2 = \lambda + \frac{\partial f_2(0)}{\partial z}$ и совпадает с (12) $\square$

Для характеристической функции величины $i(t)$ в стационарном режиме, запишем

$$Me^{jui(t)} = H_2(\infty, u) = \mathbf{e}^{\left\{ju\frac{\lambda}{\mu} + \frac{(ju)^2}{2}\frac{\kappa_2}{\mu}\right\}}.$$

Полученное равенство будем называть асимптотикой второго порядка характеристической функции числа занятых приборов.

4.3. Асимптотика третьего порядка. Аналогичным образом для асимптотики третьего порядка была сформулированиа и доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Предельное, при $\varepsilon \to 0$, значение $F_3(z,w)$ решения $F_3(z,w,\varepsilon)$ уравнения*

$$\frac{\partial F_3(z,w,\varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial F_3(0,w,\varepsilon)}{\partial z}\left(e^{j\varepsilon w}A(z) - 1\right) + j\varepsilon^2\left(1 - e^{-j\varepsilon w}\right)\frac{\partial F_3(z,w,\varepsilon)}{\partial w} -$$

$$-\left(1 - e^{-j\varepsilon w}\right)(\lambda + j\varepsilon w\kappa_2)\,F_3(z,w,\varepsilon) = 0$$

имеет вид

$$F_3(z,w) = R(z)\cdot\mathbf{e}^{\left\{\frac{(jw)^3}{6}\kappa_3\right\}},$$

где величина κ_3 определяется равенством

$$\kappa_3 = \kappa_2 + \frac{\partial f_2(0)}{\partial z} + \frac{\partial f_3(0)}{\partial z}$$

а вектор функция $f_3(z)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial f_3(z)}{\partial z} + \frac{\partial f_3(0)}{\partial z}(A(z) - 1) + 2\frac{\partial f_2(z)}{\partial z}A(z) - 2\kappa_2 R(z) = 0.$$

Для характеристической функции величины $i(t)$ в стационарном режиме, запишем

$$Me^{jui(t)} = H_3(\infty, u) = \mathbf{e}^{\left\{ju\frac{\lambda}{\mu} + \frac{(ju)^2}{2}\frac{\kappa_2}{\mu} + \frac{(ju)^3}{6}\frac{\kappa_3}{\mu}\right\}}.$$

Полученное равенство будем называть асимптотикой третьего порядка характеристической функции чмсла занятых приборов.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, найдены моменты первого, второго и третьего порядков, а также проведено исследование системы методом асимптотического анализа до третьего порядка.

Численная реализация позволит определить условие применимости асимптотического метода [4] для анализа системы массового обслуживания с входящим рекуррентным потоком и неограниченным числом обслуживающих приборов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания. М.: КомКнига, 2005. 228 с.
2. *Кокс Д., Смит В.* Теория восстановления. М.: Сов. радио, 1967. 298 с.
3. *Назаров А. А., Моисеева С. П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания Томск: Изд-во НТЛ. 2006. 112 с.
4. *Назаров А. А., Семенова И. А.* Исследование RQ-систем методом асимптотических семиинвариантов // Вестник Томского государственного университета. Серия управление, вычислительная техника и информатика 2010. № 3 (12). с. 85-96.