

АНАЛИЗ СЕТЕВОЙ МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДОХОДОВ ТЕЛЕФОННОЙ КОМПАНИИ

В. Науменко¹, А. Паньков²

¹ Гродненский филиал РУП “Белтелеком”,

² Гродненский государственный университет

Гродно, Республика Беларусь

² a.pankov@gmail.com

В работе рассматривается модель изменения доходов телефонной компании РУП “Белтелеком” от маршрутизации телефонных запросов между различными сетями мобильной связи. Моделью служит замкнутая НМ-сеть с заявками нескольких типов. Получены системы разностно-дифференциальных уравнений для нахождения ожидаемых доходов систем сети. Разработана имитационная модель рассматриваемого процесса, с помощью которой рассчитаны модельные примеры.

Ключевые слова: сеть массового обслуживания, НМ-сеть, имитационное моделирование

1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

При исследовании изменения ожидаемых доходов в сложных системах, например таких, как телефонные компании и мобильные операторы, можно использовать математические модели, построенные с использованием аппарата теории массового обслуживания (МО), в частности, модели с использованием НМ-сетей (Howard-Matalytski).

Рассмотрим модель изменения доходов Гродненского филиала РУП “Белтелеком”. При наборе номера с одного сотового оператора на другой, например, с MTS на Velcom, либо наоборот, “Белтелеком” получает некоторый доход за организацию соединения двух сотовых операторов. Таким же образом происходит соединение стационарного телефона и сотового, т.е. оператора связи “Белтелеком” и одного из мобильных операторов, или наоборот. Данный процесс организован по следующему принципу. При наборе абонентом одного из мобильных операторов кода +37529 (или 8029), данный вызов обрабатывается и посылается запрос на предприятие электросвязи. На последнем срабатывает аппаратура повременного учета соединений, которая ведет посекундный учет соединений, и соответственно “Белтелеком” получает некоторый доход от одного сотового оператора, установившего соединение с другим сотовым оператором. Аналогичным образом этот процесс протекает и при организации связи между “Белтелеком” и одним из сотовых операторов либо наоборот. Схематично это можно изобразить следующим образом (рис. 1):

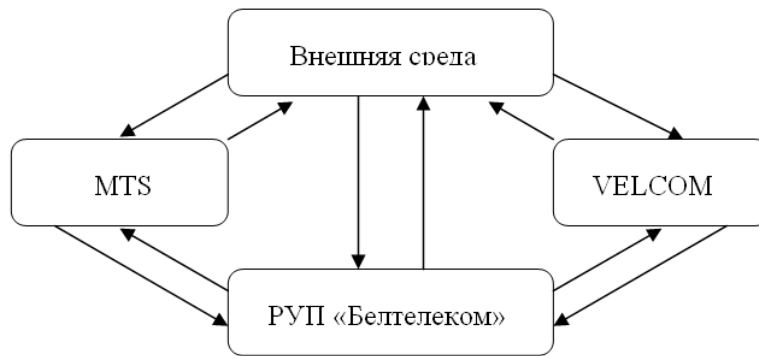


Рис. 1. Схема взаимодействия РУП «Белтелеком» с мобильными операторами

Опишем модель взаимодействия в терминах теории сетей МО [1]. Изменение доходов можно описать с помощью замкнутой НМ-сети с разнотипными заявками, состоящей из систем МО (СМО) $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$ (мобильные операторы), СМО S_n (РУП «Белтелеком»), а также СМО S_0 (внешняя среда). В нашем случае S_1 – это MTS, S_2 – это Velcom, S_3 – «Белтелеком», а S_0 – внешняя среда (рис. 2).

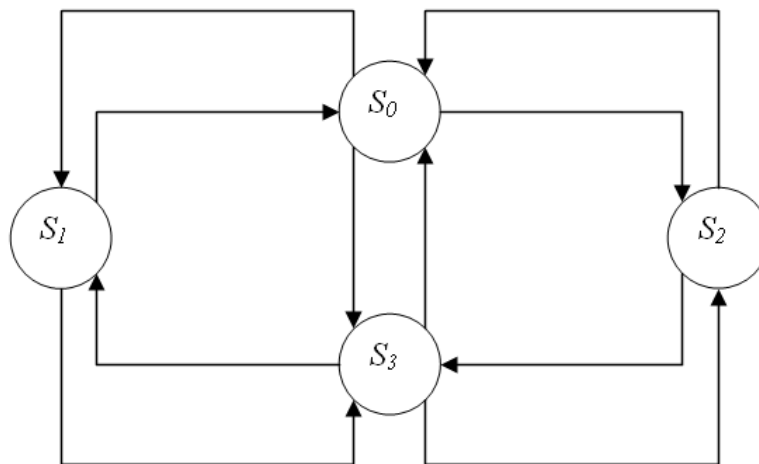


Рис. 2. Структура НМ-сети

Заявками в сети являются вызовы, поступающие от абонентов, находящихся в СМО S_0 . Для нашего случая, будем предполагать, что в сети циркулирует 6 типов заявок. Если абонент желает позвонить с MTS на Velcom или наоборот, то на обслуживание поступает заявки первого и второго типа соответственно. Если абонент желает позвонить с городского телефона на MTS или наоборот, то на обслуживание поступает заявки третьего и четвертого типа соответственно. Если же абонент звонит с городского телефона на Velcom, то в сети циркулирует заявка пятого типа или наоборот – 6-го типа, когда абонент звонит с Velcom на городской телефон.

Под обслуживанием заявок будем понимать успешную/неуспешную организацию соединения операторов. Компания «Белтелеком» получает некоторый доход

от одного сотового оператора, установившего соединение с другим оператором, либо при организации связи между “Белтелеком” и одним из сотовых операторов или наоборот. Все заявки сети начинают и заканчивают свое обслуживание в системе S_0 . Тип заявки соответствует выбору абонентом желаемого соединения.

Опишем подробно маршрут обслуживания заявок в сети, в зависимости от их типа. Если абонент выбрал тип соединения “MTS – Velcom”, то в сети МО начинает свое обслуживание заявка 1-го типа. И при переходе из системы S_1 в систему S_2 через систему S_3 – система S_3 получает некоторый доход, а система S_1 – расход за организацию соединения с другим оператором через “Белтелеком”, который установил тариф за соединение 2-ух операторов сотовой связи. Система S_1 получает лишь некоторый доход от абонента, за обеспечение соединения. Схематично переход заявки первого типа выглядит следующим образом $S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2 \rightarrow S_0$, т.е. заявка начинает свое обслуживание в системе S_0 и переходит в систему S_1 , далее после обслуживания в системе S_1 она поступает в систему S_3 а после успешного обслуживания – в систему S_2 , и далее, возвращается в систему S_0 , успешно получив обслуживание в системе S_2 .

Аналогично, если абонент выбрал обратное соединение типа “Velcom – MTS”, то в сети МО начинает свое обслуживание заявка 2-го типа. И при переходе из системы S_2 в систему S_1 – система S_3 получает некоторый доход. Схематично переход заявки второго типа выглядит следующим образом $S_0 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow S_1 \rightarrow S_0$.

Если же инициировано соединение типа “MTS – Белтелеком”, то в сети МО начинает свое обслуживание заявка 3-го типа. И при переходе из системы S_1 в систему S_3 , система S_3 получает некоторый доход, а система S_1 – расход за организацию соединения с “Белтелеком”, который установил тариф за соединение с оператором сотовой связи. Система S_1 получает только некоторый доход от абонента, за обеспечение соединения. Схематично переход заявки третьего типа выглядит следующим образом $S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_0$.

Если инициировано обратное соединения типа “Белтелеком – MTS”, то в сети МО начинает свое обслуживание заявка 4-го типа. При переходе из системы S_3 в систему S_1 , система S_3 получает некоторый доход, а а система S_1 – расход за организацию соединения с “Белтелеком”. Система S_1 получает лишь некоторый доход от абонента, за обеспечение соединения с опертором не сотовой связи. Схематично переход заявки первого типа выглядит следующим образом $S_0 \rightarrow S_3 \rightarrow S_1 \rightarrow S_0$. Аналогичным образом в сети функционируют заявки 5-го и 6-го типов при выборе соединения типа “Velcom – Белтелеком” ($S_0 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow S_0$) или “Белтелеком – Velcom” ($S_0 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2 \rightarrow S_0$) соответственно.

2. СИСТЕМА РАЗНОСТНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ОЖИДАЕМЫХ ДОХОДОВ

Будем рассматривать замкнутую НМ-сеть МО $S_0, S_1, \dots, S_n$, в которой обслуживаются разнотипные заявки, K_c – число заявок типа c в сети, $c = \overline{1, r}$, изображенную на рисунке 2. Системы обслуживания сети являются многолинейными, обозначим через m_i число линий обслуживания в i -й СМО. Будем рассматривать случай, когда тип заявок не меняется при переходе из одной СМО в другую. Под состоянием сети будем понимать вектор размерности $n \times r$:

$$k = (k_{11}, k_{12}, \dots, k_{1r}, k_{21}, k_{22}, \dots, k_{2r}, \dots, k_{n1}, k_{n2}, \dots, k_{nr}),$$

где k_{ic} – число заявок типа c в системе S_i , $k_i = \sum_{c=1}^r k_{ic}$. Обозначим через μ_{ic} – интенсивность обслуживания заявок типа c в системе S_i , $i = \overline{0, n}$, $c = \overline{1, r}$. Пусть p_{ijc} – вероятность того, что после обслуживания в i -й СМО сети заявка типа c переходит на обслуживание в j -ю СМО, $\overline{K} = (K_1, K_2, \dots, K_r)$, $K = \sum_{c=1}^r K_c$, $M_{jc}(\overline{K})$ – интенсивность потока заявок типа c , выходящих из j -й СМО сети, когда в ней обслуживается K_c заявок типа c , $c = \overline{1, r}$. $I_{ic} - n \times r$ -вектор из нулевых компонент, за исключением компоненты с номером $r(i-1) + c$, которая равна 1.

Через $v_n(k, t)$ обозначим полный ожидаемый доход, который получает система S_n за время t , если в начальный момент времени сеть находится в состоянии k . Предположим, что система S_n получает доход в размере $r_n(k)$ за единицу времени в течение всего периода пребывания сети в состоянии k .

Когда сеть совершает переход из состояния (k, t) в состояние $(k - I_{ic} + I_{nc}, t + \Delta t)$, она приносит системе S_n доход в размере $r(k - I_{ic} + I_{nc})$, а когда совершает переход из состояния (k, t) в состояние $(k + I_{ic} - I_{nc}, t + \Delta t)$ – доход в размере $(-R(k + I_{ic} - I_{nc}))$. В течение интервала времени Δt сеть может остаться в состоянии (k, t) либо совершить переход в состояние $(k - I_{ic} + I_{nc}, t + \Delta t)$ или $(k + I_{ic} - I_{nc}, t + \Delta t)$. Если она остается в состоянии (k, t) , то доход системы S_n составит $r_n(k)\Delta t$ плюс ожидаемый доход $v_n(k, t)$, который она принесет за оставшиеся t единиц времени. В рассматриваемой модели это будет означать, что абонент выбрал иной тип соединения/разговора или иной тип предоставляемых услуг одним из операторов.

Вероятность такого события равна $1 - \sum_{i=0}^n \mu_{ic} u(k_{ic}) \Delta t + o(\Delta t)$, где $u(x)$ – функция Хевисайда. Если же за время Δt сеть совершает переход в состояние $(k - I_{ic} + I_{nc}, t + \Delta t)$ с вероятностью $\mu_{ic} p_{ic} u(k_i) \Delta t + o(\Delta t)$, то доход системы S_n составит $r(k - I_{ic} + I_{nc})$ плюс ожидаемый доход $v_n(k - I_{ic} + I_{nc}, t)$, который будет получен за оставшееся время, если бы начальным состоянием сети было $(k - I_{ic} + I_{nc}, t + \Delta t)$; если же за время Δt сеть совершает переход в состояние $(k + I_{ic} - I_{nc}, t + \Delta t)$ с вероятностью $\mu_{nc} p_{nc} u(k_{nc}) \Delta t$, то доход составит $-R(k + I_{ic} - I_{nc})$ плюс ожидаемый доход сети за оставшееся время, если бы начальным состоянием было $(k + I_{ic} - I_{nc}, t + \Delta t)$,

$i = \overline{0, n-1}$. Тогда, используя формулу полной вероятности для математического ожидания, получаем систему разностных уравнений для дохода $v_n(k, t)$:

$$\begin{aligned} v_n(k, t + \Delta t) = & \left(1 - \sum_{i=0}^n \sum_{c=1}^r m_i \mu_{ic} u(k_{ic}) \Delta t \right) [r_n(k) \Delta t + v_n(k, t)] + \\ & + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{c=1}^r m_i \mu_{ic} p_{inc} u(k_{ic}) \Delta t [r(k - I_{ic} + I_{nc}) + v_n(k - I_{ic} + I_{nc}, t)] + \\ & + \sum_{c=1}^r \mu_{nc} u(k_{nc}) \Delta t \sum_{i=0}^{n-1} m_i p_{nic} [-R(k + I_{ic} - I_{nc}) + v_n(k + I_{ic} - I_{nc}, t)] + o(\Delta t), \end{aligned}$$

откуда следует система разностно-дифференциальных уравнений (РДУ):

$$\begin{aligned} \frac{dv_n(k, t)}{dt} = & r_n(k) - \sum_{c=1}^r \sum_{i=0}^n m_i \mu_{ic} u(k_{ic}) v_n(k, t) + \sum_{c=1}^r \sum_{i=0}^{n-1} m_i \mu_{ic} p_{inc} u(k_{ic}) r(k - I_{ic} + I_{nc}) - \\ & - \sum_{c=1}^r \left(\mu_{nc} u(k_{nc}) \sum_{i=0}^{n-1} m_i p_{nic} R(k + I_{ic} - I_{nc}) + \sum_{i=0}^{n-1} m_i \mu_{ic} p_{inc} u(k_{ic}) v_n(k - I_{ic} + I_{nc}, t) + \right. \\ & \left. + \mu_{nc} u(k_{nc}) \sum_{i=0}^{n-1} m_i p_{nic} v_n(k + I_{ic} - I_{nc}, t) \right), \end{aligned}$$

которую можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dv_n(k, t)}{dt} = & r_n(k) - \sum_{c=1}^r \sum_{i=0}^n m_i \mu_{ic} u(k_{ic}) v_n(k, t) + \\ & + \sum_{c=1}^r \sum_{i=0}^{n-1} m_i [\mu_{ic} p_{inc} u(k_{ic}) r(k - I_{ic} + I_{nc}) - \mu_{nc} u(k_{nc}) p_{nic} R(k + I_{ic} - I_{nc})] + \\ & + \sum_{c=1}^r \sum_{i=0}^{n-1} m_i [\mu_{ic} p_{inc} u(k_{ic}) v_n(k - I_{ic} + I_{nc}, t) + \mu_{nc} u(k_{nc}) p_{nic} v_n(k + I_{ic} - I_{nc}, t)], \quad (1) \end{aligned}$$

$$i = \overline{0, n}, \quad c = \overline{1, r}.$$

3. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ РДУ И НАХОЖДЕНИЕ ОЖИДАЕМЫХ ДОХОДОВ

Если число состояний НМ-сети невелико (< 200), то систему (1) можно решить сведя ее к системе неоднородных ДУ, и решить последнюю с помощью известных методов, например методом преобразований Лапласа. Но число состояний сети на практике очень велико, так как в системе S_0 могут находиться все потенциальные абоненты области, в силу чего число уравнений в системе (1) также очень большое. Поэтому целесообразно проводить исследования методом имитационного моделирования (ИМ).

ИМ представляет собой способ проведения на ЭВМ вычислительных экспериментов с математическими моделями, имитирующими поведение реальных объектов, процессов и систем в течение заданного периода. Одной из наиболее привлекательных особенностей метода ИМ также является возможность прогнозировать и планировать поведение системы в будущем.

Имитационная модель для описанной сети была разработана с помощью библиотеки SymPy. Пакет SimPy – это открытая программная библиотека для имитационного моделирования различных процессов с дискретными событиями, написанная на языке программирования Python. С помощью этой модели можно найти ожидаемые доходы систем НМ-сети (рис. 2), а также построить графики изменения доходов на интервале моделирования. Использование такой модели, а также ПО, позволяет оценить ожидаемые доходы Гродненского филиала РУП “Белтелеком” и осуществлять их прогнозирование на различных временных периодах.

4. МОДЕЛЬНЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим замкнутую сеть МО с доходами, состоящую из 4 СМО. S_0, S_1, S_3, S_4 . Пусть в сети циркулируют 100 заявок первого типа, 22 заявки второго типа, 34 заявки третьего типа, 10 заявок четвертого типа, 20 заявок 5-го типа и 40 заявок 6-го типа. Всего в сети циркулирует $K = 226$ заявок. Пусть времена обслуживания заявок в системах распределены по экспоненциальному закону с параметрами $\mu_0 = 0.67$, $\mu_1 = 0.11$, $\mu_2 = 0.83$ и $\mu_3 = 0.6$. Будем рассматривать случай, когда доходы от переходов сети между состояниями, являются тарифами, установленными за организацию соединения двух сотовых операторов. Пусть также в начальный момент времени денежные средства во всех системах МО сети отсутствуют. Число линий обслуживания в СМО: $m_1 = 10$, $m_2 = 10$, $m_3 = 40$. Матрицы вероятностей переходов заявок 1-го, 2-го, 3-го, 4-го, 5-го и 6-го типов в системах сети имеют

следующий вид соответственно:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,33 & 0,33 & 0,33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,33 & 0,33 & 0,33 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

При помощи имитационного моделирования построены графики для ожидаемых доходов систем, которые приведены на рисунках 3 – 6.

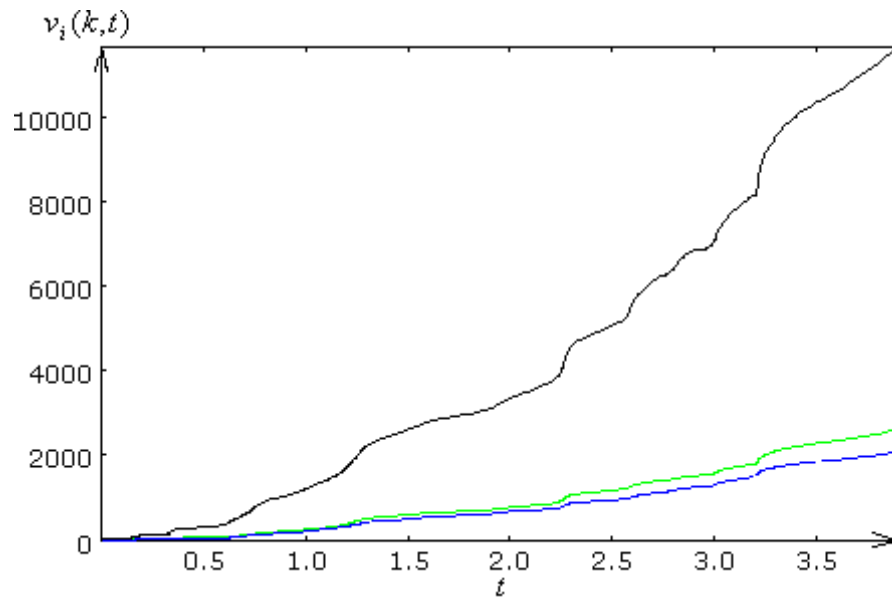


Рис. 3. Изменение доходов систем S_1, S_2, S_3 в зависимости от времени $t, \overline{i} = 1,3$

ЛИТЕРАТУРА

1. Паньков А. Анализ сетей массового обслуживания с центральной системой в переходном режиме // Массовое обслуживание: потоки, системы, сети: материалы междунар. науч. конф. BWWT-2007. г. Гродно. 29 янв. – 1 февр., 2007. Вып. 19. С. 201–206.