ИССЛЕДОВАНИЕ МАРКОВСКОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ RQ-СИСТЕМЫ С ВХОДЯЩИМ ММР-ПОТОКОМ ЗАЯВОК

Т. Любина*, А. Назаров

Томский государственный университет
Томск, Россия
* lyubina_tv@mail.ru

В качестве математической модели сети связи рассматривается однолинейная система массового обслуживания с источником повторных вызовов с входящим марковским модулированным потоком заявок, управляемая динамическим протоколом доступа. Проводится анализ данной системы и находится допредельное распределение вероятностей $p(i)$ числа заявок в источнике повторных вызовов. Обнаружено свойство стабилизации последовательности $\delta_i = p(i+1)/p(i)$, для аппроксимации распределения вероятностей, обладающего таким свойством, предложено квазигеометрическое распределение дефекта 2.

Работа выполнена в рамках Аналитической ведомственной целевой программы “Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы)”, проект № 4761.

Ключевые слова: динамическая RQ-система, динамический протокол доступа, распределение вероятностей, квазигеометрическое распределение.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной работе динамической RQ-системой с входящим ММР-потоком заявок будем называть однолинейную систему массового обслуживания (СМО) с источником повторных вызовов (ИПВ) [1] с входящим марковским модулированным потоком заявок, управляемую динамическим протоколом доступа [2].

В отличие от классических моделей случайных потоков (пуассоновского и рекуррентного) математические модели специальных потоков (например, ММР, МАР, ВМАР, SM) [3, 4, 5] более адекватно представляют телекоммуникационные потоки реальных данных.

Случайный поток однородных событий будем представлять в виде случайного процесса [6] $m(t)$ – числа событий потока, наступивших за время t или на интервале времени $[0,\ t)$.

Пусть задана эргодическая цепь Маркова $n(t)$, определяемая матрицей инфинитезимальных характеристик Q с элементами $q_{\nu n}$, а также набор неотрицательных чисел $\lambda_n > 0$.

Случайный поток однородных событий будем называть марковским модулированным пуассоновским потоком (ММР-потоком) [7], управляемым цепью Маркова $n(t)$, если выполнены следующие условия:

$$P\{m(t+\Delta t)=m+1|m(t)=m, n(t)=\nu\}=\lambda_\nu \Delta t+o(\Delta t),$$

$$P\{m(t+\Delta t)>m+1|m(t)=m, n(t)=\nu\}=o(\Delta t).$$

Состояниями ММР-потока будем называть состояния его управляющей цепи Маркова $n(t)$.

Таким образом, на вход системы поступает ММР-поток заявок из внешнего источника, определяемый диагональной матрицей Λ условных интенсивностей λ_n и матрицей Q инфинитезимальных характеристик $q_{\nu n}$ цепи Маркова $n(t)$, управляющей ММР-потоком. Заявка, заставшая прибор свободным, занимает его для обслуживания в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром μ. По завершении обслуживания заявка покидает прибор. Если во время обслуживания некоторой заявки поступает другая, то поступившая заявка переходит в ИПВ. Из ИПВ после случайной задержки, заявка с динамической (зависящей от состояния ИПВ) интенсивностью σ/i, вновь обращается к прибору с повторной попыткой его захвата, i – число заявок в ИПВ, то есть вероятность обращения к прибору за время Δt для любой заявки из ИПВ составляет $\frac{\sigma}{i}\Delta t+o(\Delta t)$, если в ИПВ находится i заявок. Если прибор свободен, то заявка становится на обслуживание, если же он занят, то возвращается в ИПВ. Задачей данной работы является нахождение распределения числа заявок в источнике повторных вызовов.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ МАРКОВСКОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ RQ-СИСТЕМЫ С ВХОДЯЩИМ ММР-ПОТОКОМ ЗАЯВОК

Состояние системы в момент времени t определяется трёхмерной цепью Маркова $\{k(t), n(t), i(t)\}$, где $i(t)$ – число заявок в ИПВ, $n(t)$ – значения цепи Маркова, управляющей ММР-потоком, а $k(t)$ определяет состояние прибора следующим образом:

$$k=\begin{cases}0, \text{ если прибор свободен,}\\ 1, \text{ если прибор занят обслуживанием.}\end{cases}$$

Обозначим $P\{k(t)=k, n(t)=n, i(t)=i\}=P(k,n,i,t)$ – вероятность того, что в момент времени i прибор находится в состоянии k, цепь Маркова в состоянии n и в ИПВ i заявок.

Таким образом, распределение вероятностей $P(k,n,i,t)$ удовлетворяет следующим равенствам

$$\begin{cases} P(0,n,0,t+\Delta t) = (1-\lambda_n\Delta t)(1+q_{nn}\Delta t)P(0,n,0,t) + \mu\Delta t P(1,n,0,t) + \\ + \sum\limits_{\nu\neq n} q_{\nu n}\Delta t P(0,\nu,0,t) + o(\Delta t), \\ P(1,n,0,t+\Delta t) = (1-\lambda_n\Delta t)(1-\mu\Delta t)(1+q_{nn}\Delta t)P(1,n,0,t) + \\ +\sigma\Delta t P(0,n,1,t) + \lambda_n\Delta t P(0,n,0,t) + \sum\limits_{\nu\neq n} q_{\nu n}\Delta t P(1,\nu,0,t) + o(\Delta t), \\ \ldots \\ P(0,n,i,t+\Delta t) = (1-\lambda_n\Delta t)(1-\sigma\Delta t)(1+q_{nn}\Delta t)P(0,n,i,t) + \mu\Delta t P(1,n,i,t) + \\ + \sum\limits_{\nu\neq n} q_{\nu n}\Delta t P(0,\nu,i,t) + o(\Delta t), \\ P(1,n,i,t+\Delta t) = (1-\lambda_n\Delta t)(1-\mu\Delta t)(1+q_{nn}\Delta t)P(1,n,i,t) + \sigma\Delta t P(0,n,i+1,t) + \\ +\lambda_n\Delta t P(0,n,i,t) + \lambda_n\Delta t P(1,n,i-1,t) + \sum\limits_{\nu\neq n} q_{\nu n}\Delta t P(1,\nu,i,t) + o(\Delta t), \end{cases}$$

из которых составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова для распределения вероятностей $P(k,n,i,t)$

$$\begin{cases} \frac{\partial P(0,n,i,t)}{\partial t} = -(\lambda_n+\sigma)P(0,n,i,t) + \mu P(1,n,i,t) + \sum\limits_{\nu} P(0,\nu,i,t)q_{\nu n} \\ \frac{\partial P(1,n,i,t)}{\partial t} = -(\lambda_n+\mu)P(1,i,t) + \sigma P(0,n,i+1,t) + \lambda_n P(0,n,i,t) + \\ +\lambda_n P(0,n,i-1,t) + \sum\limits_{\nu} P(1,\nu,i,t)q_{\nu n}. \end{cases} \qquad (1)$$

Будем полагать, что система функционирует в стационарном режиме, то есть

$$P(k,n,i,t) \equiv P(k,n,i).$$

Запишем систему (1) для стационарного распределения:

$$-\lambda_n P(0,n,0) + \mu P(1,n,0) + \sum_{\nu} P(0,\nu,0)q_{\nu n} = 0, \quad i=0,$$

$$-(\lambda_n+\mu)P(1,n,0) + \lambda_n P(0,n,0) + \sigma P(0,n,1) + \sum_{\nu} P(1,\nu,0)q_{\nu n} = 0, \quad i=0,$$

$$-(\lambda_n+\sigma)P(0,n,i) + \mu P(1,n,i) + \sum_{\nu} P(0,\nu,i)q_{\nu n} = 0, \quad i\geq 1, \qquad (2)$$

$$-(\lambda_n+\mu)P(1,n,i) + \lambda_n P(0,n,i) + \lambda_n P(1,n,i-1) + \sigma P(0,n,i+1) + \sum_{\nu} P(1,\nu,i)q_{\nu n} = 0, \quad i\geq 1.$$

Для дальнейшего исследования запишем систему (2) в матричном виде. Обозначив

$$P(0,i) = \{P(0,1,i), P(0,2,i), ..., P(0,N,i)\},$$

$$P(1,i) = \{P(1,1,i), P(1,2,i), ..., P(1,N,i)\},$$

получим

$$P(0,0)(Q-\Lambda) + P(1,0)\mu = 0, \quad i=0,$$

$$\begin{gathered}
P(1,0)(Q-\Lambda-\mu I)+P(0,0)\Lambda+P(0,1)\sigma=0, \quad i=0, \\
P(0,i)(Q-\Lambda-\sigma I)+P(1,i)\mu=0, \quad i\geq 1, \\
P(1,i)(Q-\Lambda-\mu I)+P(0,i)\Lambda+P(1,i-1)\Lambda+P(0,i+1)\sigma=0, \quad i\geq 1.
\end{gathered} \tag{3}$$

Чтобы решить систему (3), определим векторные характеристические функции

$$H(k,u)=\sum_{i=0}^{\infty} e^{jui}P(k,i). \tag{4}$$

Из системы (3), с учетом равенства (4), получаем следующую систему для функций $H(k,u)$:

$$\begin{cases} H(0,u)(Q-\Lambda-\sigma I)+H(1,u)\mu=-\sigma P(0,0), \\ H(0,u)(\Lambda e^{ju}+\sigma I)+H(1,u)(Q+\Lambda(e^{ju}-1)-\mu I)e^{ju}=\sigma P(0,0). \end{cases} \tag{5}$$

Из системы (5) получаем выражения для $H(0,u)$ и $H(1,u)$:

$$\begin{gathered}
H(0,u)=P(0,0)\left\{\sigma I+\frac{\sigma}{\mu}e^{ju}\left(Q+\Lambda\left(e^{ju}-1\right)-\mu I\right)\right\}\left\{\sigma I(1-e^{ju})+Qe^{ju}-\right. \\
\left.-\frac{1}{\mu}\left(Q-\Lambda-\sigma I\right)\left(Q+\Lambda(e^{ju}-1)\right)e^{ju}\right\}^{-1}, \qquad (6) \\
H(1,u)=-\frac{1}{\mu}\left[\sigma P(0,0)I+H(0,u)(Q-\Lambda-\sigma I)\right].
\end{gathered}$$

Перепишем уравнение (6) с учётом замен $H(k,u)=G(k,e^{ju})=G(k,x)$, $e^{ju}=x$:

$$\begin{gathered}
G(0,x)=P(0,0)\left\{\sigma I+\frac{\sigma}{\mu}x\left(Q+\Lambda\left(x-1\right)-\mu I\right)\right\}\left\{\sigma I(1-x)+Qx-\right. \\
\left.-\frac{1}{\mu}\left(Q-\Lambda-\sigma I\right)\left(Q+\Lambda(x-1)\right)x\right\}^{-1}
\end{gathered} \tag{7}$$

и обозначим матрицы

$$A(x)=\sigma I+\frac{\sigma}{\mu}x\left(Q+\Lambda\left(x-1\right)-\mu I\right),$$

$$B(x)=\sigma I(1-x)+Qx-\frac{1}{\mu}\left(Q-\Lambda-\sigma I\right)\left(Q+\Lambda(x-1)\right)x,$$

тогда равенство (7) перепишется в следующем виде

$$G(0,x)=P(0,0)A(x)B^{-1}(x).$$

Производящая функция $G(0,x)$ определена для всех значений $x\in[0,1]$, но матрица $B(x)$ вырождена при $x=x_\nu$, где x_ν – корни уравнения

$$|B(x)|=0,$$

принадлежащие рассматриваемому интервалу [0, 1].

Обратную матрицу $B^{-1}(x)$ запишем в виде

$$B^{-1}(x) = \frac{1}{|B(x)|} D^T(x),$$

где элементами $D(x)_{n_1 n_2}$ матрицы $D(x)$ являются алгебраические дополнения к элементам $B(x)_{n_1 n_2}$ матрицы $B(x)$.

Из равенства нулю определителя $|B(x_\nu)| = 0$ следует, что компоненты вектора $P(0,0)$ удовлетворяют однородным системам линейных алгебраических уравнений

$$P(0,0)A(x_\nu)B^T(x_\nu) = 0, \quad \forall \ x_\nu.$$

Эта система определяет значения компонент вектора $P(0,0)$ с точностью до мультипликативной постоянной, значение которой определяется условием нормировки.

3. АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ЧИСЛЕННЫМ ИНТЕГРИРОВАНИЕМ

Векторную характеристическую функцию $H(u)$ для распределения вероятностей $P(i) = P(0,i) + P(1,i)$ числа заявок в ИПВ запишем в виде

$$H(u) = H(0,u) + H(1,u) = H(0,u)\left(I - \frac{1}{\mu}(Q - \Lambda - \sigma I)\right) - \frac{\sigma}{\mu}P(0,0).$$

Тогда распределение вероятностей $p(i) = P(i)E$ числа заявок в источнике повторных вызовов определяется обратным преобразованием Фурье от скалярной характеристической функции $h(u) = Me^{jui(t)} = \sum_i e^{jui}p(i) = H(u)E$:

$$p(i) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-jui}h(u)du. \qquad (8)$$

Для заданных значений параметров

$$\mu = 1, \quad \sigma = 5$$

и матриц

$$Q = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,2 & 0,4 \\ 0,1 & -0,4 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 & -0,5 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1,2 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

определяющих $h(u)$, численным интегрированием (8) получим распределение вероятностей числа заявок в ИПВ $p(i)$ (табл. 1).

Таблица 1 **Распределение вероятностей $p(i)$ числа заявок в ИПВ, $i = 0, 1, 2, \ldots$**

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(i)$	0,2994	0,1027	0,0859	0,0728	0,0620	0,0528	0,0450	0,0384	0,0327
δ_i	0,3431	0,8358	0,8477	0,8511	0,8522	0,8526	0,8528	0,8528	0,8528
i	9	10	11	12	13	14	15	16	...
$p(i)$	0,0279	0,0238	0,0203	0,0173	0,0148	0,0126	0,0107	0,0092	...
δ_i	0,8528	0,8528	0,8528	0,8528	0,8528	0,8528	0,8528	0,8528	...

Особенность данного распределения заключается в том, что последовательность отношения $\delta_i = p(i+1)/p(i)$ достаточно быстро стабилизируются и при $i \geq 4$ принимает постоянное значение с точностью до трёх знаков после запятой.

Аналогичные результаты имеют место и для других значений параметров λ, σ и матриц Λ и Q.

Приведем следующее определение [8].

Определение. Квазигеометрическим распределением дефекта n с параметром ρ будем называть такое распределение вероятностей $p(i)$, для которого существуют ρ и C, такие что для $i \geq n$

$$p(i) = C\rho^i,$$

а при $i = n - 1$

$$p(i) \neq C\rho^i.$$

Для аппроксимации полученного в табл. 1 распределения вероятностей $p(i)$ числа заявок в ИПВ целесообразно предложить так называемое квазигеометрическое распределение $p(i)$ дефекта 2.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной статье проведено исследование марковской динамической RQ-системы с входящим MMP-потоком заявок, то есть получено распределение вероятностей $p(i)$ числа i заявок в ИПВ. Обнаружено свойство стабилизации последовательности $\delta(i)$ для найденного распределения $p(i)$. Для аппроксимации распределения вероятностей, обладающего таким свойством, предложено квазигеометрическое распределение дефекта 2. Указанная аппроксимация является достаточно полезной при нахождении распределения вероятностей числа заявок в ИПВ приближёнными методами, такими как метод имитационного моделирования, метод асимптотического анализа, а также численными методами решения исходных систем уравнений Колмогорова для распределения вероятностей в марковских моделях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Назаров А. А., Терпугов А. Ф.* Теория массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2004.

2. *Любина Т. В., Назаров А. А.* Исследование марковской динамической RQ-системы с конфликтами заявок // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. №3 (12). С. 73–84.
3. *Cox D. R.* The analysis of non-Markovian stochastic processes // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1955. V. 51. P. 433–441.
4. *Neuts M. F.* A versatile Markovian arrival process // Journal of Appl. Prob. 1979. V. 16. P. 764–779.
5. *Лопухова С. В.* Асимптотические и численные методы исследования специальных потоков однородных событий: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18; Томский гос. ун-т. Томск; 2008.
6. *Назаров А. А., Терпугов А. Ф.* Теория вероятностей и случайных процессов. Томск: Изд-во НТЛ, 2006.
7. *Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания. 4-е изд. М.: Изд-во ЛКИ, 2007.
8. *Любина Т. В., Назаров А. А.* Аппроксимация допредельного распределения в динамической RQ-системе с конфликтами заявок // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур: тезисы докладов Восьмой Российской конференции с международным участием. Томск: Изд-во НТЛ, 2010. С. 38.