СИСТЕМА MR|M|∞ В УСЛОВИИ РАСТУЩЕГО ВРЕМЕНИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

И. Лапатин*, **С. Лопухова**

Томский государственный университет
Томск, Россия
* ilapatin@mail.ru

В работе рассматривается система массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает поток марковского восстановления. Исследуется стационарное распределение числа занятых приборов и выходящий поток системы в условии растущего времени обслуживания.

Ключевые слова: поток марковского восстановления, системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов, выходящий поток.

1. ВВЕДЕНИЕ

Системы массового обслуживания [1] с неограниченным числом приборов являются моделями реальных систем в различных сферах повседневной жизни: банковское дело, страхование, транспорт, торговля и т.д.

В случае простейшего входящего потока для таких систем удается найти аналитическое решение для стационарного распределения вероятностей числа занятых приборов в системе, а также для числа заявок, закончивших обслуживание на некотором промежутке времени [2]. Но в случае других моделей входящего потока общих подходов к исследованию нет. Для их исследования применяют методы численного анализа, имитационного моделирования и асимптотического анализа. Анализ числа занятых приборов в системе BMAP|GI|∞ можно найти, например, в работе немецкого ученого Д.Баума [3]. Асимптотический анализ выходящего потока системы MAP|GI|∞ приведен в работе [4].

В данной работе приводится исследование системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов и экспоненциальным временем обслуживания, на вход которой поступает поток марковского восстановления. Рассматривается стационарное распределение числа занятых приборов и выходящий поток в условии растущего времени обслуживания.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТОКА МАРКОВСКОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Рассмотрим двумерный однородный марковский случайный процесс $\{\xi(n);\tau(n)\}$ с дискретным временем $n = 1, 2, 3, ...$, первая компонента $\xi(n)$ которого принимает значения из некоторого дискретного множества. Вторая компонента $\tau(n)$ рассматриваемого процесса принимает неотрицательные значения (вообще говоря, из непрерывного множества).

По определению, марковской переходной функцией $F(k_2, x; k_1, y)$ двумерного однородного марковского случайного процесса $\{\xi(n); \tau(n)\}$ называется

$$F(k_2, x; k_1, y) = P\left\{\xi(n+1) = k_2, \tau(n+1) < x | \xi(n) = k_1, \tau(n) = y\right\}$$

Будем рассматривать только такие двумерные случайные процессы $\{\xi(n); \tau(n)\}$, для марковских переходных функций которых выполняются равенства

$$\begin{gathered} F(k_2, x; k_1, y) = \\ = P\left\{\xi(n+1) = k_2 | \xi(n) = k_1\right\} \cdot P\left\{\tau(n+1) < x | \xi(n) = k_1\right\} = \\ = P_{k_1 k_2} \cdot G_{k_1}(x) \end{gathered} \tag{1}$$

то есть марковская переходная функция не зависит от второго условия (не зависит от значений второй компоненты), а распределение значений процесса $\tau(n+1)$ зависит лишь от значения процесса $\xi(n)$ в предыдущий момент времени.

В силу свойства (1), первая компонента $\xi(n)$ рассматриваемого двумерного марковского процесса $\{\xi(n); \tau(n)\}$ также является марковским процессом, точнее цепью Маркова с дискретным временем и матрицей P вероятностей переходов за один шаг. А функции $G_k(x)$ - это набор условных функций распределения, которые будем записывать в виде диагональной матрицы $G(x)$.

Случайный поток однородных событий

$$t_1 < t_2 < t_3 < ...$$

будем называть потоком марковского восстановления или MR-потоком, заданным матрицей вероятностей перехода P и набором условных функций распределения $G_k(x)$, если для длин $\tau_{n+1} = t_{n+1} - t_n$ его интервалов выполняются равенства

$$\tau_{n+1} = \tau(n)$$

Для дальнейшего исследования определим процесс $k(t) = \xi(n), t_n \leq t < t_{n+1}$

3. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ MR|M|∞

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает поток марковского восстановления, заданный матрицей вероятностей переходов P и диагональной матрицей $G(x)$ условных функций распределения. Время обслуживания поступающих заявок будем считать экспоненциальным с параметром μ, одинаковой для всех заявок.

Обозначим $z(t)$ - длину интервала от момента t до момента наступления следующего события во входящем потоке, $i(t)$ - число занятых приборов системы в момент времени t, $m(t)$ - число заявок, закончивших обслуживание к моменту времени t, а процесс $k(t)$ определен выше.

Для распределения вероятностей

$$P(k,z,i,m,t)=P\{k(t)=k,z(t)<z,i(t)=i,m(t)=m\}$$

четырехмерного марковского процесса $\{k(t),z(t),i(t),m(t)\}$ запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\begin{gathered}\frac{\partial P(k,z,i,m,t)}{\partial t}=\frac{\partial P(k,z,i,m,t)}{\partial z}-\frac{\partial P(k,0,i,m,t)}{\partial z}+\\ +(i+1)\mu P(k,z,i+1,m-1,t)-i\mu P(k,z,i,m,t)+\\ +\sum_{\nu}\frac{\partial P(\nu,0,i-1,m,t)}{\partial z}G_{\nu}(z)P\end{gathered}\tag{2}$$

Обозначив функции

$$H(k,z,u,x,t)=\sum_{i}e^{jui}\sum_{m}e^{jxm}P(k,z,i,m,t),$$

систему (2) для функций $H(k,z,u,x,t)$ запишем в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial H(k,z,u,x,t)}{\partial t}=\frac{\partial H(k,z,u,x,t)}{\partial z}-\frac{\partial H(k,0,u,x,t)}{\partial z}-\\ -j\mu(e^{jx}e^{-ju}-1)\frac{\partial H(k,z,u,x,t)}{\partial u}+\\ +e^{ju}\sum_{\nu}\frac{\partial H(\nu,0,u,x,t)}{\partial z}G_{\nu}(z)P\end{gathered}$$

которую перепишем в матричном виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial H(z,u,x,t)}{\partial t}=\frac{\partial H(z,u,x,t)}{\partial z}-\frac{\partial H(0,u,x,t)}{\partial z}-\\ -j\mu(e^{jx}e^{-ju}-1)\frac{\partial H(z,u,x,t)}{\partial u}+\\ +e^{ju}\frac{\partial H(0,u,x,t)}{\partial z}PG(z)\end{gathered}\tag{3}$$

где $H(z,u,x,t)=\{H(1,z,u,x,t),H(2,z,u,x,t),...\}$.

Дифференциально-матричное уравнение (3) будем решать методом асимптотического анализа в условии растущего времени обслуживания, то есть при $\mu\to 0$.

4. АСИМПТОТИКА РАСТУЩЕГО ВРЕМЕНИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Так как выходящий поток существенно зависит от числа занятых приборов в системе, то сначала будем рассматривать стационарное распределения числа заявок в системе MR|M|∞.

4.1. Исследования числа занятых приборов в системе MR|M|∞. Для исследования стационарного распределения числа занятых приборов в уравнении (3) положим $x = 0$, а $t \to \infty$. Обозначая $h(z,u) = H(z,u,0,\infty)$, получим уравнение

$$\frac{\partial h(z,u)}{\partial z} = \frac{\partial h(0,u)}{\partial z}\left(I - e^{ju}P\cdot G(z)\right) + j\mu\left(e^{-ju}-1\right)\frac{\partial h(z,u)}{\partial u}. \quad (4)$$

Здесь I - единчная матрица соответствующей размерности.

Полагая, что ε некоторый малый параметр, в уравнении (4) сделаем следующие замены

$$\mu = \varepsilon,\ \ u = \varepsilon w,\ \ h(z,u) = F_1(z,w,\varepsilon), \quad (5)$$

тогда для функций $F_1(z,w,\varepsilon)$ получим уравнение

$$\frac{\partial F_1(z,w,\varepsilon)}{\partial z} = \frac{\partial F_1(0,w,\varepsilon)}{\partial z}\left(I - e^{j\varepsilon w}P\cdot G(z)\right) + j\left(e^{-j\varepsilon w}-1\right)\frac{\partial F_1(z,w,\varepsilon)}{\partial w}. \quad (6)$$

Теорема 1. *Если существует предел решения системы (6)*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F_1(z,w,\varepsilon) = F_1(z,w)$$

то

$$F_1(\infty,w)E = \mathbf{e}^{\{jw\kappa_1\}}$$

где E - единичный вектор-столбец соответствующей размерности, а κ_1 имеет смысл интенсивности входящего MR-потока.

Теорема 1 дает первое асимптотическое приближение характеристической функции числа занятых приборов в системе MR|M|∞ в условии растущего времени обслуживания

$$h(\infty,u)E \approx F_1(\infty,w)E = \mathbf{e}^{\{jw\kappa_1\} = \mathbf{e}^{\{ju\frac{\kappa_1}{\mu}\}}}.$$

Для более точного приближения в задаче (4) сделаем замену

$$h(z,u) = h_2(z,u)\mathbf{e}^{\{ju\frac{\kappa_1}{\mu}\}},$$

тогда получим уравнение

$$\frac{\partial h_2(z,u)}{\partial z} + j\mu\left(1-e^{-ju}\right)\frac{\partial h_2(z,u)}{\partial u} -$$
$$-\kappa_1\left(1-e^{-ju}\right)h_2(z,u) + \frac{\partial h_2(0,u)}{\partial z}\left\{e^{ju}P\cdot G(z) - I\right\} = 0 \quad (7)$$

Для выполнения асимптотического исследования в уравнении (7) сделаем следующие замены

$$\mu = \varepsilon^2,\ \ u = \varepsilon w,\ \ h_2(z,u) = F_2(z,w,\varepsilon), \quad (8)$$

тогда для функций $F_2(z,w,\varepsilon)$ получим уравнение

$$\frac{\partial F_2(z,w,\varepsilon)}{\partial z} + j\left(1-e^{-j\varepsilon w}\right)\frac{\partial F_2(z,w,\varepsilon)}{\partial w} -$$
$$-\kappa_1\left(1-e^{-j\varepsilon w}\right)F_2(z,w,\varepsilon) + \frac{\partial F_2(0,w,\varepsilon)}{\partial z}\left\{e^{j\varepsilon w}P\cdot G(z) - I\right\} = 0 \quad (9)$$

Теорема 2. *Если существует предел решения системы (9)*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F_2(z,w,\varepsilon) = F_2(z,w)$$

то

$$F_2(\infty,w)E = \mathbf{e}^{\left\{\frac{(jw)^2}{2}\kappa_2\right\}},$$

где величина κ_2 определяется равенством

$$\kappa_2 = \kappa_1 + \frac{\partial f_2(0)}{\partial z}E, \tag{10}$$

где вектор $f_2(z)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial f_2(z)}{\partial z} + \frac{\partial f_2(0)}{\partial z}\left(P\cdot G(z) - I\right) + \frac{\partial R(0)}{\partial z}P\cdot G(z) - \kappa_1 R(z) = 0,$$

здесь $R(z)$ - совместное распределение процессов $k(t)$ и $z(t)$.

Используя результаты теоремы 2 и выражение для функии $h_2(z,u)$ можно записать асимптотическое приближение характеристической функции числа занятых приборов в системе MR|M|∞ в условии растущего времени обслуживания

$$Me^{jui(t)} = h(\infty,u)E \approx \mathbf{e}^{\left\{ju\frac{\kappa_1}{\mu} + \frac{(ju)^2}{2}\frac{\kappa_2}{\mu}\right\}}.(11)$$

4.2. Исследования выходящего потока системы MR|M|∞. Теперь будем исследовать выходящий поток рассматриваемой системы в условии растущего времени обслуживания, для чего в уравнении (3) сделаем следующие замены

$$\mu = \varepsilon,\ u = \varepsilon w,\ H(z,u,x,t) = F(z,w,x,t,\varepsilon),$$

для функций $F(z,w,x,t,\varepsilon)$ получим уравнение

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(z,w,x,t,\varepsilon)}{\partial t} &= \frac{\partial F(z,w,x,t,\varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial F(0,w,x,t,\varepsilon)}{\partial z} - \\ &- j(e^{jx}e^{-j\varepsilon w} - 1)\frac{\partial F(z,w,x,t,\varepsilon)}{\partial w} + \\ &+ e^{j\varepsilon w}\frac{\partial F(z,w,x,t,\varepsilon)}{\partial z}PG(z).\end{aligned} \tag{12}$$

Теорема 3. *Если существует предел решения системы (12)*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F(z,w,x,t,\varepsilon) = F(z,w,x,t)$$

то

$$F(\infty,0,x,t)E = \mathbf{e}^{\left\{\left(e^{jx}-1\right)\kappa_1 t\right\}}.$$

Теорема 3 дает асимптотическое приближение характеристической функции числа заявок, закончивших обслуживания за некоторое время tв системе MR|M|∞ в условии растущего времени обслуживания

$$Me^{jxm(t)} = H(\infty,0,x,t)E\mathbf{e}^{\left\{\left(e^{jx}-1\right)\kappa_1 t\right\}}.(13)$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе была рассмотрена система MR|M|∞. Было получено, что в условии растущего времени обслуживания стационарное распределение числа занятых приборов в системе является асимптотически нормальным (11), а выходящий поток является асимптотически пуассоновским (13). Полученные результаты определяют поведение рассматриваемых характеристик при дочтаточно больших значениях среднего времени обслуживания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. Изд. 3-е, испр. и доп.М.: КомКнига, 2007. 400 с.
2. *Mirasol N.M.* The output of an M|G|∞ queueing system is Poisson // Operations Research. 1963. №. 11. P. 282–284.
3. *Baum. D.* The infinite server queue with Markov additive arrivals in space // Proceedings of the International Conference "Probabilistic analysis of rare events". Riga, Latvia.1999. P. 136–142.
4. *Назаров А.А., Лапатин И.Л.* Асимптотический анализ выходящего потока системы MAP|GI|∞ // Известия политехнического университета. Управление, вычислительная техника и информатика.2009. Т. 315. № 5. С. 191–195.