АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ АСИНХРОННОГО ПОТОКА СОБЫТИЙ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ

А. Горцев, В. Зуевич*

Томский государственный университет

Томск, Россия

* zuevichv@ya.ru

Получены оптимальные оценки параметров асинхронного дважды стохастического потока с конечным числом состояний. Оценки оптимальны в смысле минимума среднеквадратического отклонения от истинных значений параметров потока. Оценивание производится на основе наблюдений за моментами наступления событий потока. Приведен алгоритм оценивания.

Ключевые слова: асинхронный дважды стохастический поток, MMPP-поток, оптимальная оценка параметров, алгоритм оценки параметров, цифровые сети интегрального обслуживания, ISDN.

1. ВВЕДЕНИЕ

Интенсивное развитие информационных технологий определило важную сферу приложений теории массового обслуживания – проектирование и создание компьютерных сетей связи, спутниковых сетей связи, телекоммуникационных сетей, информационно-вычислительных сетей и т.п., которых можно объединить одним термином – цифровые сети интегрального обслуживания (ЦСИО, ISDN). Возникла необходимость в разработке новых математических моделей потоков событий, адекватно описывающих реальные информационные потоки, функционирующие в ЦСИО. Одними из первых работ в этом направлении были [1, 2, 3]. Подчеркнем, что на практике параметры, характеризующие поток событий, частично либо полностью неизвестны, а также могут изменяться с течением времени случайным образом, что приводит к рассмотрению дважды стохастических потоков событий. Поскольку функционирование системы обслуживания непосредственно зависит от параметров входящего потока, важной задачей является оценка в произвольный момент времени параметров входящего потока по наблюдениям за этим потоком. Исследования по оценке параметров дважды стохастических потоков были проведены, например, в работах [4, 5, 6].

В настоящей статье решена задача оценки парамтеров асинхронного дважды стохастического потока событий с конечным числом состояний.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В статье рассматривается асинхронный дважды стохастический поток событий с произвольным конечным числом состояний [7] (далее асинхронный поток либо просто поток). Интенсивность потока является кусочно-постоянным случайным процессом $\lambda(t)$ с n состояниями: $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n > 0$. Процесс (поток) в момент времени t находится в i-м состоянии, если $\lambda(t) = \lambda_i$ $(i = \overline{1,n})$. В течение времени пребывания в i-м состоянии поток ведет себя как пуассоновский с интенсивностью λ_i $(i = \overline{1,n})$. Длительность пребывания в i-м состоянии есть экспоненциально распределенная случайная величина с функцией распределения $F_i(\tau) = 1 - e^{\alpha_{ii}\tau}$, где $\alpha_{ii} = -\sum_{j=1,j\neq i}^{n} \alpha_{ij}$ $(i = \overline{1,n})$; $\alpha_{ij} > 0$ $(i,j = \overline{1,n}, i \neq j)$ – интенсивность перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния i в состояние j, т.е. величины α_{ij} образуют матрицу интенсивностей (матрицу инфинитезимальных коэффициентов) переходов между состояниями $\|\alpha_{ij}\|_1^n$. В сделанных предпосылках $\lambda(t)$ — транзитивный марковский процесс [7].

Значения параметров потока λ_i, α_{ij} $(i,j = \overline{1,n}, i \neq j)$ неизвестны. Процесс $\lambda(t)$ является принципиально ненаблюдаемым. Предполагается, что известно только число состояний n и наблюдению доступны моменты наступления событий потока $t_1, t_2, \ldots$. Необходимо по наблюдениям $t_1, t_2, \ldots$ оценить параметры потока λ_i, α_{ij} $(i,j = \overline{1,n}, i \neq j)$ в момент окончания наблюдения за потоком.

Рассматривается стационарный (установившийся) режим функционирования наблюдаемого потока событий, поэтому переходными процессами на интервале наблюдения (t_0, t), где t_0 – начало наблюдений, t – окончание наблюдений (момент вынесения решения), пренебрегаем. Без потери общности можно положить $t_0 = 0$.

Обозначим $\theta = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \alpha_{ij}; i,j = \overline{1,n}, i \neq j)$ – вектор неизвестных параметров потока, $\hat{\theta}(t)$ – вектор соответствующих оценок параметров в момент времени t. θ_k и $\hat{\theta}_k(t)$ – k-е компоненты вектора параметров и вектора оценок соответственно. Обозначим N – размерность векторов θ и $\hat{\theta}(t)$, $N = n^2$. Обозначим $p(\theta|t) = p(\theta|t_1, t_2, \ldots, t_m)$ – апостериорная плотность распределения вероятностей вектора параметров θ в момент времени t при условии, что в моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_m$ $(0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m < t)$ наблюдались события потока. Обозначим $\Theta = \{\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n > 0,\ \alpha_{ij} > 0;\ i,j = \overline{1,n}, i \neq j\}$ – область значений вектора параметров θ. Будем использовать оценку $\hat{\theta}$, оптимальную в смысле минимума среднеквадратического отклонения от истинного значения вектора θ:

$$\hat{\theta}_k(t) = \int\limits_{\Theta} \theta_k p(\theta|t)\, d\theta \ \ (k = \overline{1,N}),$$

где $d\theta = d\theta_1 d\theta_2 \ldots d\theta_N$, или в векторной форме

$$\hat{\theta}(t) = \int\limits_{\Theta} \theta p(\theta|t)\, d\theta. \tag{1}$$

Выражение (1) дает оптимальную оценку параметров потока в виде апостериорного среднего. Для нахождения оценки параметров по формуле (1) необходимо найти выражение для апостериорной плотности $p(\theta|t)$.

3. ПОЛУЧЕНИЕ ЯВНОГО ВИДА АПОСТЕРИОРНОЙ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Для получения рекуррентной формулы воспользуемся известной методикой: рассмотрим дискретные наблюдения за потоком через равные достаточно малые промежутки времени длительности Δt, а затем устремим Δt к нулю. Пусть наблюдения за потоком начинаются в момент времени $t = 0$, и время t изменяется дискретно с конечным шагом Δt: $t = k\Delta t$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Обозначим $r(k\Delta t)$ – число событий, наблюденных на полуинтервале времени $[(k–1)\Delta t, k\Delta t)$, $r(k\Delta t) = 0, 1, \ldots,$ $(k = 0, 1, \ldots)$. На полуинтервале $[–\Delta t, 0)$ наблюдений не производится, поэтому $r(0)$ можем положить произвольным, например положим $r(0) = 0$. Обозначим $\vec{r}(m\Delta t) = (r(0), r(\Delta t), \ldots, r(m\Delta t))$ – последовательность значений количества наблюденных событий на временных полуинтервалах $[(k–1)\Delta t, k\Delta t)$ $(k = \overline{0, m})$. Рассмотрим момент времени t такой, что $t = m\Delta t, t + \Delta t = (m + 1)\Delta t$. Тогда имеем $r(m\Delta t) = r(t)$, $r((m + 1)\Delta t) = r(t + \Delta t)$, $\vec{r}(m\Delta t) = \vec{r}(t)$, $\vec{r}((m + 1)\Delta t) = \vec{r}(t + \Delta t)$.

Рассмотрим $p(\theta|\vec{r}(m\Delta t)) = p(\theta|\vec{r}(t)) = p(\theta|t)$ – апостериорную плотность вероятностей вектора параметров θ в момент времени t при условии, что на полуинтервалах времени $[(k–1)\Delta t, k\Delta t)$ $(k = \overline{0, m})$ наблюдалось $r(k\Delta t)$ событий потока соответственно. Также рассмотрим $p(\theta|t + \Delta t)$ – апостериорную плотность в момент времени $t + \Delta t$.

Теорема 1. *Апостериорная плотность* $p(\theta|t+\Delta t)$ *определяется рекуррентной формулой*

$$p(\theta|t + \Delta t) = p(\theta|t)\frac{\sum_{j=1}^{n} \omega(\lambda_j|t)\frac{(\lambda_j\Delta t)^{r(t+\Delta t)}}{r(t+\Delta t)!}e^{-\lambda_j\Delta t}}{\int\limits_{\Theta} p(\theta|t)\sum_{j=1}^{n} \omega(\lambda_j|t)\frac{(\lambda_j\Delta t)^{r(t+\Delta t)}}{r(t+\Delta t)!}e^{-\lambda_j\Delta t}\,d\theta}, \tag{2}$$

где $\omega(\lambda_j|t)$ $(j = \overline{1, n})$ *– апостериорная вероятность того, что поток в момент времени* t $(t > t_0)$ *находится в* j*-м состоянии;* $\omega(\lambda_j|t)$ $(j = \overline{1, n})$ *получены в явном виде в работе [7].*

Доказательство. Используя формулу для условной вероятности, находим

$$p(\theta|\vec{r}(t + \Delta t)) = \frac{p(\theta, r(t + \Delta t), \vec{r}(t))}{p(\vec{r}(t + \Delta t))} = \frac{p(r(t + \Delta t)|\theta, \vec{r}(t))p(\theta, |\vec{r}(t))p(\vec{r}(t))}{p(\vec{r}(t + \Delta t))},$$

или, используя в последней дроби формулу полной вероятности для условной вероятности, получаем

$$p(\theta|\vec{r}(t+\Delta t)) = p(\theta|\vec{r}(t))\frac{p(\vec{r}(t))}{p(\vec{r}(t + \Delta t))}\sum_{j=1}^{n} p(r(t+\Delta t)|\vec{r}(t), \theta, \lambda(t) = \lambda_j)p(\lambda(t) = \lambda_j|\vec{r}(t), \theta). \tag{3}$$

Рассмотрим в (3) произведение $p(r(t + \Delta t)|\vec{r}(t), \theta, \lambda(t) = \lambda_j)p(\lambda(t) = \lambda_j|\vec{r}(t), \theta)$. Во-первых, имеем $p(\lambda(t) = \lambda_j|\vec{r}(t), \theta) = \omega(\lambda_j|t)$ $(j = \overline{1, n})$, где $\omega(\lambda_j|t)$ $(j = \overline{1, n})$ – апостериорная вероятность того, что поток в момент времени t находится в j-м состоянии, определенная в [7]. Во-вторых, количество наблюденных на полуинтервале $[t, t+\Delta t)$ событий не зависит от последовательности $\vec{r}(t)$ наблюденных до момента t событий, а зависит только от состояния потока в момент времени t, т.е. от значения интенсивности наступления событий потока $\lambda(t) = \lambda_j$ $(j = \overline{1,n})$ в момент времени t. Поэтому имеем $p(r(t+\Delta t)|\vec{r}(t), \theta, \lambda(t) = \lambda_j) = p(r(t+\Delta t)|\theta, \lambda(t) = \lambda_j)$. А поскольку поток в любом состоянии ведет себя как пуассоновский, получаем $p(r(t+\Delta t)|\theta, \lambda(t) = \lambda_j) = \frac{(\lambda_j \Delta t)^{r(t+\Delta t)}}{r(t+\Delta t)!} e^{-\lambda_j \Delta t}$. Таким образом, получаем (3) в виде

$$p(\theta|\vec{r}(t+\Delta t)) = p(\theta|\vec{r}(t)) \frac{p(\vec{r}(t))}{p(\vec{r}(t+\Delta t))} \sum_{j=1}^{n} \omega(\lambda_j|t) \frac{(\lambda_j \Delta t)^{r(t+\Delta t)}}{r(t+\Delta t)!} e^{-\lambda_j \Delta t}.$$

Находя в последнем выражении множитель $p(\vec{r}(t))/p(\vec{r}(t+\Delta t))$ из условия нормировки $\int\limits_{\Theta} p(\theta|\vec{r}(t+\Delta t))\, d\theta = 1$, приходим к (2). □

Рассмотрим случай, когда на полуинтервале $[t, t+\Delta t)$ нет событий, т.е. $r(t+\Delta t) = 0$. Это означает, что полуинтервал $[t, t+\Delta t)$ находится на временной оси между моментами наступления соседних событий, скажем, между моментами t_k и t_{k+1} $(k = 1, 2, \ldots)$ либо между моментом начала наблюдений за потоком t_0 и моментом наступления первого события t_1. Для дальнейших выкладок введем обозначение $s(t, \theta) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \omega(\lambda_j|t)$.

Лемма 1. *Апостериорная плотность $p(\theta|t)$ между моментами наступления событий удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению*

$$\frac{dp(\theta|t)}{dt} = -p(\theta|t) \left[s(t,\theta) - \int\limits_{\Theta} s(t,\theta) p(\theta|t)\, d\theta \right] \quad (t_k < t < t_{k+1}, \;\; k = 0, 1, \ldots). \qquad (4)$$

Доказательство. Поскольку $r(t+\Delta t) = 0$, получаем (2) в виде

$$p(\theta|t+\Delta t) = p(\theta|t) \frac{\sum_{j=1}^{n} \omega(\lambda_j|t) e^{-\lambda_j \Delta t}}{\int\limits_{\Theta} p(\theta|t) \sum_{j=1}^{n} \omega(\lambda_j|t) e^{-\lambda_j \Delta t}\, d\theta},$$

или, раскладывая экспоненты в числителе и знаменателе в ряд с точностью до $o(\Delta t)$, получаем

$$p(\theta|t+\Delta t) = [p(\theta|t) - s(t,\theta)p(\theta|t)\Delta t + o(\Delta t)] \left[1 - \Delta t \int\limits_{\Theta} s(t,\theta) p(\theta|t)\, d\theta + o(\Delta t) \right]^{-1},$$

или, раскладывая второй сомножитель в ряд, находим

$$p(\theta|t+\Delta t) = p(\theta|t) - \Delta t s(t,\theta) p(\theta|t) + \Delta t p(\theta|t) \int\limits_{\Theta} s(t,\theta) p(\theta|t))\, d\theta + o(\Delta t).$$

Перенося в последнем равенстве $p(\theta|t)$ влево, деля на Δt и устремляя Δt к нулю, получаем (4). □

Асинхронный поток обладает свойством ординарности (поскольку в каждом состоянии ведет себя как пуассоновский), поэтому вероятность наступления на полуинтервале $[t, t+\Delta t)$ двух и более событий равна $o(\Delta t)$. Рассмотрим случай, когда на полуинтервале $[t, t+\Delta t)$ наступает одно событие потока, скажем, в момент времени t_k $(t < t_k < t + \Delta t)$. При этом $r(t + \Delta t) = 1$.

Лемма 2. *Апостериорная плотность $p(\theta|t)$ в моменты наступления событий пересчитывается по формуле*

$$p(\theta|t_k + 0) = \frac{p(\theta|t_k - 0)s(t_k - 0, \theta)}{\int\limits_{\Theta} p(\theta|t_k - 0)s(t_k - 0, \theta)\, d\theta} \ \ (k = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Доказательство. Поскольку $r(t + \Delta t) = 1$, получаем (2) в виде

$$p(\theta|t + \Delta t) = p(\theta|t)\frac{\Delta t \sum_{j=1}^{n} \omega(\lambda_j|t)\lambda_j e^{-\lambda_j \Delta t}}{\Delta t \int\limits_{\Theta} p(\theta|t) \sum_{j=1}^{n} \omega(\lambda_j|t)\lambda_j e^{-\lambda_j \Delta t}\, d\theta},$$

или, раскладывая экспоненты в числителе и знаменателе в ряд с точностью до $o(\Delta t)$, и вводя величины $\Delta t'$ и $\Delta t''$ такие, что $t = t_k - \Delta t', t + \Delta t = t_k + \Delta t''$, находим

$$p(\theta|t_k + \Delta t'') = p(\theta|t)\frac{\Delta t p(\theta|t_k - \Delta t')s(t_k - \Delta t', \theta) + o(\Delta t)}{\Delta t \int\limits_{\Theta} p(\theta|t_k - \Delta t')s(t_k - \Delta t', \theta)\, d\theta + o(\Delta t)}.$$

Поделим числитель и знаменатель последней дроби на Δt, после чего устремим Δt к нулю (при этом $t = t_k - \Delta t'$ стремится к t_k слева, $t + \Delta t = t_k + \Delta t''$ стремится к t_k справа). После предельного перехода получаем (5). □

Замечание к лемме 2. В момент времени t_0 начала наблюдений за потоком апостериорная плотность $p(\theta|t_0)$ задается исходя из априорных данных о параметрах асинхронного потока. Если таких данных нет, можно задать плотность $p(\theta|t_0)$ как произведение N плотностей равномерно распределенных случайных величин, каждая из которых распределена в некотором интервале допустимых значений для соответствующего параметра потока.

Теорема 2. *Поведение апостериорной плотности $p(\theta|t)$ на временной оси определяется интегро-дифференциальным уравнением* (4) *и формулой пересчета плотности вероятностей* (5), *в которых $t_k \le t < t_{k+1}$, $p(\theta|t_k) = p(\theta|t_k+0)$, $p(\theta|t_{k+1}) = p(\theta|t_{k+1}-0)$ $(k = 0, 1, \ldots)$. В момент времени t_0 апостериорная плотность $p(\theta|t_0)$ задается согласно замечанию к лемме 2.*

Доказательство. Доказательство следует из лемм 1 и 2 путем синхронизации формул (4) и (5). □

Теорема 3. *Апостериорная плотность вероятностей* $p(\theta|t)$ *вектора параметров* θ *на полуинтервале времени* $[t_k, t_{k+1})$ $(k = 0, 1, \ldots)$ *определяется формулой:*

$$p(\theta|t) = \frac{p(\theta|t_k)\mathbf{e}^{\left[-\int\limits_{t_k}^{t} s(\tau,\theta)\,d\tau\right]}}{\int\limits_{\Theta} p(\theta|t_k)\mathbf{e}^{\left[-\int\limits_{t_k}^{t} s(\tau,\theta)\,d\tau\right]} d\theta} \quad (t_k < t < t_{k+1}, k = 0, 1, \ldots), \qquad (6)$$

где $p(\theta|t_k) = p(\theta|t_k + 0)$ *вычисляется в момент наступления события* t_k $(k = 1, 2, \ldots)$ *по формуле* (5), *а в момент* t_0 *плотность* $p(\theta|t_0)$ *задается согласно замечанию к лемме 2.*

Доказательство. Преобразуем интегро-дифференциальное уравнение (4) к следующему виду:

$$\frac{dp(\theta|t)}{p(\theta|t)} = -\left[s(t,\theta) - \int\limits_{\Theta} s(t,\theta)p(\theta|t))\,d\theta\right] dt.$$

Интегрируя последнее интегро-дифференциальное уравнение в пределах от t_k до t, получаем

$$\ln\left[\frac{p(\theta|t)}{p(\theta|t_k)}\right] = -\int\limits_{t_k}^{t}\left[s(\tau,\theta) - \int\limits_{\Theta} s(\tau,\theta)p(\theta|\tau)\,d\theta\right] d\tau,$$

или, проделывая необходимые преобразования, получаем

$$p(\theta|t) = p(\theta|t_k)\mathbf{e}^{\left[-\int\limits_{t_k}^{t} s(\tau,\theta)\,d\tau\right]}\mathbf{e}^{\left[\int\limits_{t_k}^{t}\int\limits_{\Theta} s(\tau,\theta)p(\theta|\tau))\,d\theta\,d\tau\right]}.$$

Найдя в полученном выражении последний сомножитель из условия нормировки $\int\limits_{\Theta} p(\theta|t)\,d\theta = 1$, приходим к (6). □

Подставляя (6) в (1), получаем явный вид оценок параметров потока для произвольного момента времени наблюдения за потоком. При этом в момент времени t_{k+1} $(k = 0, 1, \ldots)$ имеем

$$\hat{\theta}(t_{k+1}) = \hat{\theta}(t_{k+1} + 0) = \int\limits_{\Theta} \theta p(\theta|t_{k+1} + 0)\,d\theta, \qquad (7)$$

где $p(\theta|t_k + 0)$ вычисляется по формуле (5).

4. АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ПОТОКА

Полученные в настоящей статье формулы позволяют сформулировать алгоритм расчета оценок параметров асинхронного дважды стохастического потока событий с конечным числом состояний в произвольный момент времени t наблюдения за потоком:

1) в момент времени $t_0 = 0$ задается $p(\theta|t_0)$, исходя из априорных данных о потоке, либо как произведение N плотностей равномерно распределенных случайных величин, каждая из которых распределена в некотором интервале допустимых значений для соответствующего параметра потока; также задаются начальные значения апостериорных вероятностей $\omega(\lambda_j|t_0)$, $(i = \overline{1,n})$, способ задания апостериорных вероятностей описан в [7];
2) по формуле (1) в момент времени $t_0 = 0$ рассчитываются оценки параметров потока $\hat{\theta}(t_0)$;
3) для $k = 0$ в любой момент времени t $(0 < t < t_{k+1})$, где t_{k+1} – момент наблюдения $(k+1)$-го события потока, по формуле (6) рассчитывается апостериорная плотность $p(\theta|t)$ и параллельно с этим по формуле (1) рассчитываются оценки параметров потока $\hat{\theta}(t)$; при этом вероятности $\omega(\lambda_j|t)$ $(j = \overline{1,n})$, входящие в (6), вычисляются согласно [7];
4) для $k = 0$ в момент времени t_{k+1} по формуле (5) рассчитывается апостериорная плотность $p(\theta|t_{k+1} + 0)$ и по формуле (7) находятся оценки $\hat{\theta}(t_{k+1})$; при этом $p(\theta|t_{k+1} - 0)$ вычисляется по формуле (6) в момент времени $t = t_{k+1}$, вероятности $\omega(\lambda_j|t)$ $(j = \overline{1,n})$, входящие в (6), в момент $t = t_{k+1}$ вычисляются согласно [7]; значение $p(\theta|t_{k+1}+0)$ является начальным для расчета плотности $p(\theta|t)$ на следующем шаге алгоритма;
5) шаги 3 – 4 алгоритма повторяются для $k = 1, 2, \ldots$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье получены оптимальные оценки параметров асинхронного дважды стохастического потока с конечным числом состояний [7]. Оценки оптимальны в смысле минимума среднеквадратического отклонения от истинных значений параметров потока. Приводится алгоритм оценки параметров асинхронного потока событий. Сформулированный алгоритм может быть реализован программно и применяться для оценки параметров реальных потоков. Оценки параметров реальных потоков используются при создании адекватных математических моделей реально существующих и проектируемых ЦСИО.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Башарин Г. П., Кокотушкин В. А., Наумов В. А.* О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч.1 // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1979. № 6. С. 92–99.

2. *Башарин Г. П., Кокотушкин В. А., Наумов В. А.* О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч.2 // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1980. № 1. С. 55–61.
3. *Neuts M. F.* A versatile Markov point process // J. Appl. Probab., 1979. V. 16. P. 764–779.
4. *Горцев А. М., Нежельская Л. А.* Оценка параметров синхронного МС-потока событий // Сети связи и сети ЭВМ (анализ и применение): тез. докл. Восьмой Белорусской зимней школы-семинара по теории массового обслуживания, Минск: Изд-во БГУ, 1992. С. 33.
5. *Горцев А. М., Шмырин И. С.* Оптимальная оценка параметров дважды стохастического пуассоновского потока событий при наличии ошибок в измерениях моментов наступления событий // Изв. вузов. Физика, 1999. № 4. С. 19–27.
6. *Бушланов И. В., Горцев А. М., Нежельская Л. А.* Оценка параметров синхронного дважды стохастического потока событий // АиТ, 2008. № 9. С. 76–93.
7. *Горцев А. М., Зуевич В. Л.* Оптимальная оценка состояний асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным числом состояний // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика, 2010. № 2(11). С. 44–65.