ИНВАРИАНТНОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СОСТОЯНИЙ СЕТЕЙ С МНОГОРЕЖИМНЫМИ СТРАТЕГИЯМИ

А. Ерёмина

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

г. Гродно, Беларусь

aleksandrae@mail.ru

Рассматривается открытая сеть массового обслуживания, в которой циркулируют заявки различных типов. Количество работы по обслуживанию поступающего требования является случайной величиной с произвольной функцией распределения. Однолинейные узлы могут работать в нескольких режимах. Количество работы по переключению режима прибора также является случайной величиной с произвольной функцией распределения. Процессы обслуживания заявок и переключения режимов функционирования приборов не зависят друг от друга. Устанавливается инвариантность стационарного распределения состояний сети по отношению к функциональным формам распределений величин работ по обслуживанию заявок и переключению режимов при фиксированных первых моментах.

Ключевые слова: сеть массового обслуживания, многорежимное обслуживание, стационарное распределение, инвариантность.

1. ВВЕДЕНИЕ

Большую важность для практики представляет изучение сетей массового обслуживания, в которых обслуживающие приборы в узлах могут работать с различной интенсивностью, так как любые технические средства в процессе их эксплуатации могут полностью или частично выходить из строя, требовать замены или ремонта. В работе [1] были введены в рассмотрение сети массового обслуживания с многорежимными стратегиями, в узлах которых приборы могут функционировать в различных режимах. Каждый режим обслуживания характеризуется своими показателями, то есть при переходе прибора в более “худший” режим его производительность уменьшается. В [2] для открытой сети с многорежимными стратегиями, несколькими типами заявок и дисциплиной обслуживания LCFS PR было найдено стационарное распределение в мультипликативной форме. Однако считалось, что время обслуживания и время пребывания прибора в каждом режиме имеют экспоненциальное распределение. На практике указанные предположения чаще всего не выполняются. Поэтому в [3] были рассмотрены аналогичные открытые сети, в предположении, что время пребывания в каждом режиме имеет показательное распределение, а количество работы по обслуживанию поступающих в узел заявок – произвольное. Было установлено, что стационарное распределение вероятностей состояний указанных сетей не зависит от вида законов распределения величин работ по обслуживанию заявок в узлах, если фиксированы первые моменты этих законов.

В настоящей статье исследуются открытые сети массового обслуживания, для которых количество работы по обслуживанию поступающего требования и количество работы по переключению с одного режима функционирования прибора на другой одновременно являются случайными величинами с произвольными функциями распределения. Устанавливается инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний указанных сетей по отношению к виду распределений длительностей обслуживания и времен пребывания в режимах при фиксированных математических ожиданиях.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается открытая сеть массового обслуживания, состоящая из N однолинейных узлов, в которой циркулируют заявки M типов. Поступающий в сеть поток заявок – простейший с параметром λ. Каждая заявка входного потока независимо от других заявок с вероятностью $p_{0(l,u)}$ направляется в l-й узел и становится заявкой u-го типа ($\sum\limits_{l=1}^{N}\sum\limits_{u=1}^{M} p_{0(l,u)} = 1,\ l = \overline{1,N},\ u = \overline{1,M}$). Заявка u-го типа, обслуженная в l-м узле, независимо от других заявок мгновенно с вероятностью $p_{(l,u)(k,v)}$ направляется в k-й узел и становится заявкой типа v, а с вероятностью $p_{(l,u)0}$ покидает сеть ($\sum\limits_{k=1}^{N}\sum\limits_{v=1}^{M} p_{(l,u)(k,v)} + p_{(l,u)0} = 1,\ l,k = \overline{1,N};\ u,v = \overline{1,M}$).

В l-м узле находится единственный прибор, который может работать в $r_l + 1$ режимах: 0, 1, ..., r_l, $l = \overline{1,N}$. По истечении времени пребывания в режиме прибор переходит в другой режим мгновенно.

Дисциплина обслуживания заявок прибором – LCFS PR. Заявка, поступающая в узел, вытесняет заявку с прибора и начинает обслуживаться, а вытесненная заявка становится в начало очереди на обслуживание, сдвигая стоящие в ней заявки. При повторном поступлении на прибор требование продолжает дообслуживаться оставшееся время в режиме, в котором работал прибор на момент указанного поступления. Таким образом, поступающая в узел заявка имеет абсолютный приоритет перед всеми остальными заявками, находящимися в узле. Нумерация заявок в очереди на каждый узел осуществляется от конца очереди к прибору.

Состояние сети в момент времени t будем характеризовать вектором $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_N(t))$, где состояние l-го узла в момент времени t описывается вектором $x_l(t) = (\bar{x}_l(t), j_l(t)) = (x_{l1}(t), x_{l2}(t), ..., x_{l,n(l)}(t), j_l(t))$, $x_{l1}(t)$ – тип заявки, стоящей последней в очереди на обслуживание в l-м узле в момент времени t, $x_{l2}(t)$ – тип заявки, стоящей предпоследней в очереди на обслуживание в l-м узле в момент времени t, и т.д., $x_{l,n(l)-1}(t)$ – тип заявки, стоящей первой в очереди на облуживание в l-м узле в момент времени t, $x_{l,n(l)}(t)$ – тип заявки, находящейся на облуживании в l-м узле в момент времени t, $j_l(t)$ – номер режима, в котором работает прибор в l-м узле в момент времени t, $n(l)$ – общее число заявок в l-м узле. Процесс $x(t)$ имеет пространство состояний $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_N$, где $X_l = \{(0, j_l), (x_{l1}, j_l), (x_{l1}, x_{l2}, j_l), ... : x_{lk} = \overline{1, M}, k = 1, 2, ...; j_l = \overline{0, r_l}\}$.

Время пребывания в основном (нулевом) режиме работы имеет произвольную функцию распределения $\Phi_l(0, \tilde{u})$, после чего прибор переходит в режим 1. Для состояний x_l, у которых $1 \leq j_l \leq r_l - 1$, время пребывания в режиме j_l также имеет произвольную функцию распределения $\Phi_l(j_l, \tilde{u})$, при этом с вероятностью $\frac{v_l(j_l)}{v_l(j_l)+\varphi_l(j_l)}$ прибор l-го узла переходит в режим $j_l + 1$, а с вероятностью $\frac{\varphi_l(j_l)}{v_l(j_l)+\varphi_l(j_l)}$ – в режим $j_l - 1$. Время пребывания в последнем r_l-м режиме имеет произвольную функцию распределения $\Phi_l(r_l, \tilde{u})$, после чего прибор переходит в режим $r_l - 1$. Во время переключения прибора с одного режима на другой число заявок в узле не меняется.

При этом

$$v_l^{-1}(0) = \int\limits_0^\infty (1 - \Phi_l(0, \tilde{u}))\, d\tilde{u}, \tag{1}$$

$$(v_l(j_l) + \varphi_l(j_l))^{-1} = \int\limits_0^\infty (1 - \Phi_l(j_l, \tilde{u}))\, d\tilde{u},\ 1 \leq j_l \leq r_l - 1, \tag{2}$$

$$\varphi_l^{-1}(r_l) = \int\limits_0^\infty (1 - \Phi_l(r_l, \tilde{u}))\, d\tilde{u}. \tag{3}$$

Длительности обслуживания заявок в узлах не зависят от процесса поступления в случае открытой сети, друг от друга и от длительностей пребывания в режимах и имеют произвольную функцию распределения $B_l(\bar{x}_l, \tilde{u})$ для l-го узла, зависящую от очереди заявок $\bar{x}_l$ в узле, причём

$$\mu_l^{-1}(x_{l1}, x_{l2}, ..., x_{l,n(l)}) = \int\limits_0^\infty \left(1 - B_l(x_{l1}, x_{l2}, ..., x_{l,n(l)}, \tilde{u})\right) d\tilde{u}. \tag{4}$$

Будем предполагать, что матрица $(p_{(l,u)(k,v)})$, $u, v = \overline{1, M}$, $l, k = \overline{0, N}$, $p_{(0,u)(0,v)} = 0$, неприводима.

Тогда уравнение трафика

$$\varepsilon_{lu} = p_{0(l,u)} + \sum_{k=1}^N \sum_{v=1}^M \varepsilon_{kv} p_{(k,v)(l,u)},\ l = \overline{1, N},\ u = \overline{1, M}, \tag{5}$$

имеет единственное положительное решение $(\varepsilon_{lu};\ l = \overline{1, N},\ u = \overline{1, M})$.

Пусть $\psi_{lk}(t)$ – остаточное время обслуживания с момента t до завершения обслуживания заявки, стоящей в момент времени t на k-й позиции в l-м узле, $\psi_l(t) = (\psi_{l1}(t), \psi_{l2}(t), ..., \psi_{l,n(l)}(t))$, $l = \overline{1,N}$. Пусть $\xi_{lj_l}(t)$ – остаточное время пребывания прибора l-го узла в режиме j_l с момента t до перехода в соседний режим, $\xi(t) = (\xi_{1,j_1(t)}(t), \xi_{2,j_2(t)}(t), ..., \xi_{N,j_N(t)}(t))$. Таким образом, $\frac{\partial \psi_{lk}(t)}{\partial t} = -\mu_l(x_{l1}, x_{l2}, \ldots, x_{lk})$, $\frac{\partial \xi_{lj_l}(t)}{\partial t} = -\left(v_l(j_l)I_{(j_l \neq r_l)} + \varphi_l(j_l)I_{(j_l \neq 0)}\right)$, когда состояние l-го узла есть $(x_{l1}, x_{l2}, \ldots, x_{l,n(l)}, j_l)$.

В общем случае процесс $x(t)$ не является марковским, поэтому рассмотрим кусочно-линейный марковский процесс $\zeta(t) = (x(t), \psi(t), \xi(t))$, полученный путем добавления к $x(t)$ непрерывных компонент $\psi(t) = (\psi_1(t),\ \psi_2(t),\ ...,\ \psi_N(t))$ и $\xi(t)$.

Под $P = \{P(x)\}$ будем понимать стационарное распределение вероятностей состояний процесса $x(t)$.

Введем в рассмотрение стационарные функции распределения вероятностей состояний кусочно-линейного процесса $\zeta(t)$

$$\begin{gathered}F(x, y, z) = F(x,\ y_{11},\ y_{12}, ..., y_{1,n(1)}; ...;\ y_{N1},\ y_{N2}, ..., y_{N,n(N)};\ z_{1,j_1}, ..., z_{N,j_N}) = \\ = \lim_{t\to\infty} P\left\{x(t) = x; \psi_{l1}(t) < y_{l1}, ..., \psi_{l,n(l)}(t) < y_{l,n(l)}, l = \overline{1,N};\right. \\ \left.\xi_{1,j_1(t)}(t) < z_{1,j_1}, ..., \xi_{N,j_N(t)}(t) < z_{N,j_N}\right\}\end{gathered} \tag{6}$$

Обозначим $\vartheta_l(j_l) = v_l(j_l)I_{(j_l\neq r_l)} + \varphi_l(j_l)I_{(j_l\neq 0)}$, $l = \overline{1,N}$, $j_l = \overline{0,r_l}$.

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть длительности обслуживания заявок в узлах и длительности пребывания приборов в режимах имеют показательное распределение, т.е. для l-го узла, $l = \overline{1,N}$, $B_l(\bar{x}_l, \tilde{u}) = 1 - \mathbf{e}^{-\mu_l(\bar{x}_l)\tilde{u}}$ и $\Phi_l(j_l, \tilde{u}) = 1 - \mathbf{e}^{-(v_l(j_l)+\varphi_l(j_l))\tilde{u}}$, $(\tilde{u} > 0)$. Тогда $x(t)$– однородный марковский процесс с непрерывным временем и не более чем счетным фазовым пространством состояний $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_N$, где $X_l = \left\{(0, j_l), (x_{l1}, j_l), (x_{l1}, x_{l2}, j_l), (x_{l1}, x_{l2}, x_{l3}, j_l),\ ... : x_{lk} = \overline{1,M},\ k = 1, 2,\ ...;\ j_l = \overline{0,r_l}\right\}$.

Из работы [2] следует, что если положить $v_l(\bar{x}_l, j_l) = v_l(j_l)$, $\varphi_l(\bar{x}_l, j_l) = \varphi_l(j_l)$, то при выполнении условия

$$\sum_{x\in X} q(x) \prod_{l=1}^{N} \left[\lambda^{n(l)} \prod_{w=1}^{n(l)} \frac{\varepsilon_{l,x_{lw}}}{\mu_l(x_{l1}, x_{l2}, ..., x_{lw})} \prod_{k=1}^{j_l} \frac{v_l(k-1)}{\varphi_l(k)}\right] < \infty, \tag{7}$$

процесс $x(t)$ эргодичен, а его финальное стационарное распределение имеет мультипликативную форму $P(x) = p_1(x_1)p_2(x_2) \times ... \times p_N(x_N)$.

При этом

$$p_l(\bar{x}_l, j_l) = \left(\lambda^{n(l)} \prod_{w=1}^{n(l)} \frac{\varepsilon_{l,x_{lw}}}{\mu_l(x_{l1}, x_{l2}, ..., x_{lw}, j_l)} \prod_{k=1}^{j_l} \frac{v_l(k-1)}{\varphi_l(k)}\right) p_l(0, 0),$$

где $q(x) = \lambda + \sum\limits_{l=1}^{N} \left(\mu_l^{-1}(\bar{x}_l) + v_l(j_l) + \varphi_l(j_l)\right)$, а $(\varepsilon_{lu};\ l = \overline{1,N},\ u = \overline{1,M})$ – положительное решение уравнения трафика (5).

Пусть теперь длительность обслуживания заявки прибором l-го узла имеет произвольную функцию распределения $B_l(\bar{x}_l, \tilde{u})$, а время пребывания прибора l-го узла в режиме j_l – произвольную функцию распределения $\Phi_l(j_l, \tilde{u})$, причем математические ожидания фиксированы с помощью равенств (1)-(4).

Основной результат формулируется следующим образом.

Теорема 1. *Процесс $\zeta(t)$ эргодичен, если выполняются соотношения (7). При этом стационарные функции распределения вероятностей состояний $F(x, y, z)$ определяются по формулам*

$$F(x,y,z) = p_1(x_1)p_2(x_2) \times ... \times p_N(x_N) \times$$
$$\times \prod_{l=1}^{N} \prod_{w=1}^{n(l)} \mu_l(x_{l1}, ..., x_{lw}) \int_0^{y_{l,w}} (1 - B_l(x_{l1}, ..., x_{lw}, \tilde{u}))d\tilde{u} \prod_{l=1}^{N} \vartheta_l(j_l) \int_0^{z_{l,j_l}} (1 - \Phi_l(j_l, \tilde{u}))d\tilde{u}, \tag{8}$$

где

$$p_l(\bar{x}_l, j_l) = \left(\lambda^{n(l)} \prod_{w=1}^{n(l)} \frac{\varepsilon_{l,x_{lw}}}{\mu_l(x_{l1}, ..., x_{lw})} \prod_{k=1}^{j_l} \frac{v_l(k-1)}{\varphi_l(k)} \right) p_l(0,0), \tag{9}$$

$\varepsilon_{l,x_{lw}}$ находятся из (5), а

$$p_l(0,0) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{r_l} \lambda^i \prod_{w=1}^{i} \frac{\varepsilon_{l,x_{lw}}}{\mu_l(x_{l1}, ..., x_{lw})} \prod_{k=1}^{j} \frac{v_l(k-1)}{\varphi_l(k)} \right)^{-1}, \ x \in X, \ l = \overline{1, N}. \tag{10}$$

Из теоремы 1 с учетом равенства $P(x) = F(x, +\infty, +\infty)$ получаем следующее утверждение.

Следствие. *Если выполняются соотношения (7), то процесс $x(t)$ эргодичен, а его стационарное распределение $P = \{P(x), \ x \in X\}$ не зависит от функционального вида распределений $B_l(\bar{x}_l, \tilde{u})$, $\Phi_l(k, \tilde{u})$ и имеет вид $P(x) = p_1(x_1)p_2(x_2) \times ... \times p_N(x_N)$, где $p_l(x_l)$ определяются по формулам (9)-(10).*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малинковский Ю. В., Нуеман А. Ю.* Мультипликативность стационарного распределения в открытых сетях с многорежимными стратегиями обслуживания // Весцi НАН Беларусi. 2001. № 3. С. 129–134.
2. *Летунович Ю. Е.* Стационарное распределение состояний открытой неоднородной сети с многорежимными стратегиями и немедленным обслуживанием // Современные информационные компьютерные технологии: сб. науч. ст. в 2 ч (ч. 2). Гродно, 2008. С. 97–99.
3. *Малинковский Ю. В., Старовойтов А. Н., Ерёмина А. Р.* Инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний сетей с многорежимными стратегиями обслуживания, разнотипными заявками и дисциплиной обслуживания LCFS PR // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. № 3(8). С. 33–39.