

Решение краевой задачи (1)–(3) сведем к решению системы интегральных [2]

$$\begin{aligned} \int_0^{\theta_0} \varphi_1(t) K_{11}(x, t) dt + \int_0^{\theta_0} \varphi_2(t) K_{12}(x, t) dt &= f_1(x) + C f_0(x), 0 \leq x \leq \theta_0, \\ \varphi_1(x) + \int_0^{\theta_0} \varphi_1(t) K_{21}(x, t) dt + \int_0^{\theta_0} \varphi_2(t) K_{22}(x, t) dt &= f_2(x), 0 \leq x \leq \theta_0, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^{(1)} C_n, \quad K_{12} = -\frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{g} + \sum_{n=0}^{\infty} m_n^{(1)} C_n \right), \\ K_{12} &= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{p} K + p \sum_{n=0}^{\infty} m_n^{(2)} C_n \right), \quad C_n = \cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right) \cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right), \\ K_{22} &= -\frac{p}{\pi} \left(\frac{1}{2q} + \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^{(2)} C_n \right), \quad K = \ln \operatorname{ctg} \left(\frac{x+t}{4} \right) + \ln \operatorname{ctg} \left(\frac{|x-t|}{4} \right). \end{aligned}$$

Система уравнений (4) решена методом коллокаций. Проведен вычислительный эксперимент для случая $R = 1\text{м}$, $R_0 = 0,5\text{м}$, $\omega = 2\pi 10^3 \text{Гц}$, $\varepsilon = 1,3(\text{м})$, $\Delta = 0,01\text{м}$, $\varepsilon = \varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} 1 \frac{\text{Ф}}{\text{м}}$, $\varepsilon' = i \frac{\gamma}{\omega}$, $\gamma = 10^5 \frac{\text{См}}{\text{м}}$, $\mu = 100\mu_0$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$.

Исследованы экранирующие свойства оболочки во внутренней области.

Литература

1. Аполлонский С. М., Ерофеев В. Т. *Эквивалентные граничные условия в электродинамике*. СПб.: Безопасность, 1999.
2. Козловская И. С., Ерофеев В. Т. *Модели электрических процессов в сферической тонкостенной оболочке с отверстием* // Вестник БГУ. Серия 1. 2008. № 1. С. 59 – 63.

ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ В ФАРАДЕЕВЫХ КОМПОЗИТНЫХ СРЕДАХ

В. Т. ЕРОФЕЕНКО, А. В. ЩЕРБАКОВ (МИНСК, БЕЛАРУСЬ)

В последнее время значительное место в литературе занимают исследования уравнений Максвелла, описывающих распространение высокочастотных электромагнитных волн в фарадеевых средах [1]. В этом случае чисто аналитические методы решения задач не применимы. Используются, как правило, аналитико-численные методы решения уравнений Максвелла.

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ с фиксированной декартовой системой координат $Oxyz$, заполненное однородной анизотропной композитной средой, электромагнитное поле в которой подчиняется законам Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{E} = i\omega(\hat{\mu}\vec{H} + \hat{Z}\vec{E}), \quad \operatorname{rot} \vec{H} = -i\omega(\hat{\varepsilon}\vec{E} + \hat{G}\vec{H}), \quad 0 < z < \Delta, \quad (1)$$

где комплекснозначные тензоры, характеризующие среду, имеют вид

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix},$$

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} G_1 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 \end{pmatrix}, \quad \hat{Z} = \begin{pmatrix} Z_1 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 \end{pmatrix},$$

ω – круговая частота поля.

Поставим задачу о нахождении полной системы плоских электромагнитных полей $\vec{E}, \vec{H}$ вида

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \left(A\vec{e}_x + B\vec{e}_y + C\vec{e}_z \right) \exp(i(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \gamma z)), \\ \vec{H} &= \left(F\vec{e}_x + G\vec{e}_y + L\vec{e}_z \right) \exp(i(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \gamma z)), \end{aligned} \quad (2)$$

где α_1, α_2 – произвольные комплексные заданные числа. Постоянные A, B, C, F, Q, L, γ подлежат определению из уравнения (1).

Уравнения Максвелла для композитных сред (1) имеют четыре линейно-независимых решения вида (2) при фиксированных α_1, α_2 :

$$\begin{aligned} \vec{E}_s &= \left(A_s\vec{e}_x + B_s\vec{e}_y + C_s\vec{e}_z \right) \exp(i(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \gamma z)), \\ \vec{H}_s &= \left(F_s\vec{e}_x + G_s\vec{e}_y + L_s\vec{e}_z \right) \exp(i(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \gamma z)), \end{aligned} \quad (3)$$

где $s = 1, 2, 3, 4$;

$$\begin{aligned} A_s &= \frac{\alpha_1}{\mu_1 \mu_2} \gamma_s^3 + \frac{\alpha_2}{\mu_1} (a_{13} - a_{12}) \gamma_s^2 + \alpha_1 \left(\frac{\alpha_1^2}{\mu_2 \mu_3} + \frac{\alpha_2^2}{\mu_1 \mu_3} + a_{12} a_{13} - \frac{g_2}{\mu_2^2} \right) \gamma_s + \\ &\quad + \alpha_2 \left(\frac{\alpha_1^2}{\mu_3} (a_{13} - a_{12}) - a_{13} \frac{g_2}{\mu_2} \right), \\ B_s &= \frac{\alpha_2}{\mu_1 \mu_2} \gamma_s^3 + \frac{\alpha_1}{\mu_2} (a_{21} - a_{23}) \gamma_s^2 + \alpha_2 \left(\frac{\alpha_1^2}{\mu_2 \mu_3} + \frac{\alpha_2^2}{\mu_1 \mu_3} + a_{21} a_{13} - \frac{g_1}{\mu_1^2} \right) \gamma_s + \\ &\quad + \alpha_1 \left(\frac{\alpha_2^2}{\mu_3} (a_{13} - a_{23}) - a_{23} \frac{g_1}{\mu_1} \right), \\ C_s &= \frac{\gamma_s^4}{\mu_1 \mu_2} + \left(\frac{\alpha_1^2}{\mu_2 \mu_3} + \frac{\alpha_2^2}{\mu_1 \mu_3} - \frac{g_1}{\mu_1^2} - \frac{g_2}{\mu_2^2} + a_{12} a_{21} \right) \gamma_s^2 + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\mu_2} (a_{12} - a_{21}) \gamma_s + \frac{g_1 g_2}{\mu_1 \mu_2} - \\ &\quad - \frac{1}{\mu_3} \left(\alpha_1^2 \frac{g_1}{\mu_1} + \alpha_2^2 \frac{g_2}{\mu_2} \right), \\ F_s &= \frac{1}{\omega \mu_1} \left(\alpha_2 C_s - \gamma_s B_s - \omega Z_1 A_s \right), Q_s = \frac{1}{\omega \mu_2} \left(\gamma_s A_s - \alpha_1 C_s - \omega Z_2 B_s \right), \\ L_s &= \frac{1}{\omega \mu_3} \left(\alpha_1 B_s - \alpha_2 A_s - \omega Z_3 C_s \right), g_j = \omega^2 (\varepsilon_j \mu_j - Z_j G_j), a_{kj} = \omega \left(\frac{G_k}{\mu_k} - \frac{Z_j}{\mu_j} \right). \end{aligned}$$

Величины $\gamma = \gamma_s, s = 1, 2, 3, 4$ определяются численно как четыре корня дисперсионного уравнения

$$\gamma^4 + q_2 \gamma^2 + q_1 \gamma + q_0 = 0,$$

где

$$q_2 = \frac{\alpha_1^2}{g_3} \left(\frac{\mu_3}{\mu_1} g_1 + \frac{\mu_1}{\mu_3} g_3 + \mu_1 \mu_3 (a_{21} - a_{23}) (a_{32} - a_{12}) \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha_2^2}{g_3} \left(\frac{\mu_3}{\mu_2} g_2 + \frac{\mu_2}{\mu_3} g_3 + \mu_2 \mu_3 (a_{21} - a_{31}) (a_{13} - a_{12}) \right) + \mu_1 \mu_2 a_{12} a_{21} - \frac{\mu_2}{\mu_1} g_1 - \frac{\mu_1}{\mu_2} g_2, \\
& q_1 = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{g_3} \left(\frac{\mu_2}{\mu_3} g_1 (a_{23} - a_{32}) + \frac{\mu_1}{\mu_3} g_2 (a_{31} - a_{13}) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_3} g_3 (a_{12} - a_{21}) + \mu_1 \mu_2 \mu_3 g_1 (a_{13} a_{32} a_{21} - a_{31} a_{23} a_{12}) \right), \\
& q_0 = \frac{1}{g_3} \left(g_1 \alpha_1^4 + g_2 \alpha_2^4 + \alpha_1^2 \alpha_2^2 \left(\mu_1 \mu_2 (a_{13} - a_{23}) (a_{32} - a_{31}) + \frac{\mu_2}{\mu_1} g_1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} g_2 \right) - \right. \\
& \quad \left. - \alpha_1^2 g_1 \left(\frac{\mu_3}{\mu_2} g_2 + \frac{\mu_2}{\mu_3} g_3 - \mu_2 \mu_3 a_{23} a_{32} \right) - \alpha_2^2 g_2 \left(\frac{\mu_3}{\mu_1} g_1 + \frac{\mu_1}{\mu_3} g_3 - \mu_1 \mu_3 a_{13} a_{31} \right) \right) + g_1 g_2.
\end{aligned}$$

Для построения решений (3) использовалась методика работы [2].

Литература

1. Выговтов К. А. *Коэффициенты прохождения и отражения плоскопараллельной пластины из фарадеева кирального материала* // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, № 5. С. 55–60.
2. Ерофеев В. Т., Тавакколи В. П. *Модели граничных условий на экранах и оболочках с распределенными неоднородностями* // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. н. 2008. №1. С. 49–55.

ВЕРОЯТНОСТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПРОЦЕССОВ, ВОЗВРАЩАЮЩИХСЯ К ФИКСИРОВАННОМУ УРОВНЮ

Е. Е. Жук (Минск, Беларусь)

В различных прикладных областях (например, в экономике для вероятностного описания поведения цены на рынке) часто используются так называемые случайные процессы броуновского движения [1, 2]. В общем виде случайный процесс броуновского движения $X(t)$, $t \in T$, где $T \subseteq R$ – некоторое множество моментов времени, определяется следующей вероятностной (стохастической) моделью [1, 2]:

$$\Delta X(t) = \mu(X(t), t) \Delta t + \sigma(X(t), t) \Delta W(t), \quad (1)$$

где $\Delta X(t) = X(t + \Delta t) - X(t)$ – приращение процесса за промежуток времени Δt , $\Delta W(t) = W(t + \Delta t) - W(t)$, а $W(t)$ – стандартный винеровский случайный процесс [1, 2], обладающий следующими свойствами: $W(t)$ имеет независимые приращения, т. е. для любых $s < t \leq u < v$ приращения $W(t) - W(s)$ и $W(v) - W(u)$ являются независимыми случайными величинами, и для всяких $s < t$ приращение $W(t) - W(s)$ имеет нормальное (гауссовское) распределение вероятностей с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $t - s$.

Особое место среди процессов типа (1) занимают случайные процессы, возвращающиеся на фиксированный уровень [1, 2]. С их помощью описывают ситуацию, когда заведомо известно, что какой-либо наблюдаемый показатель $X(t)$ (например, цена на финансовом рынке) при $t \in T$ не преодолает некоторое пороговое значение H . Не ограничивая общности, будем считать, что процесс $X(t)$, $t \in T$, находится снизу от H , т. е. приближается к H , увеличивая свои значения: $X(t) < H$, $t \in T$. В противном случае