Известно [2], что анализ Фурье благодаря своей простоте удобен для проведения оперативного эпидемического анализа. Аппроксимирующая модель для исходного ряда данных с одной гармоникой выглядит следующим образом:

$$\hat{x}_\tau 298,7 + 3537,48\cos\tau + 4406,59\sin\tau, \quad \tau = \overline{1,n}.$$

Коэффициенты Фурье рассчитаны по методу наименьших квадратов. Построенная модель даже с одной гармоникой хорошо отражает частотные изменения и общую тенденцию наблюдаемого ряда.

Для оценки динамики эпидемического процесса интерес представляет не только аппроксимирующая функция, но и ее первая и вторая производные. Очевидно, что положительный знак перед значением первой производной (скорости) означает, что эпидемия расширяется и в ближайшее время можно ожидать рост числа больных. Отрицательный знак – эпидемия угасает. Положительный знак перед значением второй производной характеризует ускорение прироста числа больных, отрицательный знак – замедление.

В частичной сумме тригонометрического ряда Фурье на основе наименьшей средней ошибки аппроксимации (13,32%) определено оптимальное число гармоник, равное 5. Аппроксимирующая модель с 5 гармониками эффективна для построения долгосрочного прогноза.

Анализ Фурье позволяет создавать математическую модель практически любого эпидемического процесса в определенный момент времени и оценивать, на какой стадии находится процесс. Кроме того, с увеличением числа гармоник, можно с достаточно высокой точностью аппроксимировать этот процесс и прогнозировать его дальнейшее развитие. Однако, модели гармонического анализа уступают моделям Бокса-Дженкинса при построении краткосрочных прогнозов (24% ошибка прогноза против 4%).

Литература

1. Бокс Дж., Дженкинс Г. М. *Временные ряды: Прогноз и управление.* Ч. 1., Ч. 2. М.: Финансы и статистика, 1974.

2. Медик В. А., Токмачев М. С. *Математическая статистика в медицине.* М.: Финансы и статистика, 2007.

3. Славин М. Б. *Методы системного анализа в медицинских исследованиях.* М.: Медицина, 1989.

4. Петунин Ю. И. *Приложение теории случайных процессов в биологии и медицине.* Киев: Наука, 1981.

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ НА ЭКРАНАХ ИЗ КОМПОЗИТНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

В. Т. Ерофеенко (Минск, Беларусь)

Моделирование граничных условий на тонких композитных экранах является актуальной задачей электродинамики [1–3]. Разрабатываются методы решения задач в случае анизотропных композитных материалов [4], для которых в настоящей работе проведены исследования.

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ с фиксированной декартовой системой координат $Oxyz$, в которое помещен плоский материальный слой (экран) D $(0 < z < \Delta,$

$-\infty < x, y < \infty$) толщины Δ. Экран выполнен из композитного анизотропного материала, электромагнитное поле в котором подчиняется уравнениям Масквелла

$$\operatorname{rot} \vec{E} = i\,\omega\big(\hat{\mu}\vec{H} + \hat{Z}\vec{E}\big), \quad \operatorname{rot} \vec{H} = -i\,\omega\big(\hat{\varepsilon}\vec{E} + \hat{G}\vec{H}\big),\ 0 < z < \Delta, \tag{1}$$

где $\hat{\varepsilon}, \hat{\mu}, \hat{Z}, \hat{G}$ – тензоры общего вида, ω – круговая частота поля.

Поля $\vec{E}_j, \vec{H}_j$, $(j = 1, 2)$ в областях D_1 $(z < 0, -\infty < x, y < \infty)$, D_2 $(z > \Delta, -\infty < x, y < \infty)$ удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{rot} \vec{E}_j = i\,\omega\mu_0\vec{H}_j, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = -i\,\omega\varepsilon_0\vec{E}_j.$$

В предположении, что в рассматриваемой структуре распространяются плоские электромагнитные волны вида

$$\vec{E} = \Big(A\vec{e}_x + B\vec{e}_y + C\vec{e}_z\Big)\Phi \exp{(i\gamma z)}, \quad \vec{H} = \Big(F\vec{e}_x + G\vec{e}_y + L\vec{e}_z\Big)\Phi \exp{(i\gamma z)}, \tag{2}$$

где $\Phi = \exp{(i\alpha_1 x + i\alpha_2 y)}$; α_1, α_2 – произвольные заданные комплексные числа, величины $\gamma = \gamma(\alpha_1, \alpha_2)$ определяются из дисперсионного уравнения

$$\gamma^4 + q_3\gamma^3 + q_2\gamma^2 + q_1\gamma + q_0 = 0. \tag{3}$$

Ставится задача о разработке двухсторонних граничных условий, связывающих поля $\vec{E}_j, \vec{H}_j$ на плоскостях $\Gamma_1(z = 0)$ и $\Gamma_2(z = \Delta)$ по обе стороны экрана D в виде [3]

$$\vec{W}_2\Big|_{\Gamma_2} = \hat{B}\vec{W}_1\Big|_{\Gamma_1}, \tag{4}$$

где $\vec{W}_j = \big(E_{jx}, E_{jy}, H_{jx}, H_{jy}\big)^T$, $\hat{B}$ – матрица (4×4).

Для вывода граничных условий (4) рассмотрим четыре линейно независимых решения вида (2) уравнений (1)

$$\begin{aligned} \vec{E}_s &= \Big(A_s\vec{e}_x + B_s\vec{e}_y + C_s\vec{e}_z\Big)P_s(z)\Phi, \\ \vec{H}_s &= \Big(F_s\vec{e}_x + G_s\vec{e}_y + L_s\vec{e}_z\Big)P_s(z)\Phi, \end{aligned} \quad s = 1, 2, 3, 4. \tag{5}$$

где $P_s(z) = \exp{(i\gamma_s z)}$, γ_s – четыре корня дисперсионного уравнения (3). Плоское поле общего вида в слое D представим в виде линейной комбинации полей (5)

$$\vec{E} = \sum_{s=1}^{4} a_s\vec{E}_s, \quad \vec{H} = \sum_{s=1}^{4} a_s\vec{H}_s,\ 0 < z < \Delta. \tag{6}$$

Вычислим тангенциальные составляющие полей (6)

$$\begin{aligned} \vec{E}_\tau &= \sum_{s=1}^{4} a_s\Big(A_s\vec{e}_x + B_s\vec{e}_y\Big)P_s(z)\Phi, \\ \vec{H}_\tau &= \sum_{s=1}^{4} a_s\Big(F_s\vec{e}_x + G_s\vec{e}_y\Big)P_s(z)\Phi, \end{aligned} \tag{7}$$

тогда, учитывая непрерывность тангенциальных составляющих на плоскости $\Gamma_1 (z=0)$, получим

$$\begin{aligned} \vec{E}_\tau \Big|_{z=0} &= \vec{E}_{1\tau} = \sum_{s=1}^{4} a_s \Big(A_s \vec{e}_x + B_s \vec{e}_y \Big) \Phi, \\ \vec{H}_\tau \Big|_{z=0} &= \vec{H}_{1\tau} = \sum_{s=1}^{4} a_s \Big(F_s \vec{e}_x + G_s \vec{e}_y \Big) \Phi. \end{aligned} \tag{8}$$

Приравнивая коэффициенты при ортах $\vec{e}_x$ и $\vec{e}_y$, получим систему алгебраических уравнений

$$\hat{A}\vec{a} = \vec{f},$$

где

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \\ G_1 & G_2 & G_3 & G_4 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \frac{1}{\Phi} \vec{W}_1 = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Разрешим систему уравнений (9), тогда

$$a_s = \frac{1}{d} \sum_{e=1}^{4} f_e D_{es}, \tag{10}$$

где $d = det(\hat{A})$, D_{es} – алгебраические дополнения элементов матрицы $\hat{A}$.

Подставляя (10) в (7) и вычисляя компоненты полей на плоскости $\Gamma_2 (x = \Delta)$, получим граничное условие (4), где матричные элементы матрицы $\hat{B}$ определяются формулами

$$A_{1e} = \frac{1}{d} \sum_{s=1}^{4} D_{es} A_s P_s, \quad A_{2e} = \frac{1}{d} \sum_{s=1}^{4} D_{es} B_s P_s,$$
$$A_{3e} = \frac{1}{d} \sum_{s=1}^{4} D_{es} F_s P_s, \quad A_{4e} = \frac{1}{d} \sum_{s=1}^{4} D_{es} G_s P_s.$$

Граничные условия (4) используются для решения краевых задач проникновения электромагнитных полей через экраны D.

Литература

1. Халиуллин Д. Я., Третьяков С. А. *Обобщенные граничные условия импедансного типа для тонких слоев различных сред* // Радиотехника и электроника. 1998. Т. 43, № 1. С. 16 –29.

2. Неганов В. А., Осипов О. В. *Приближенные граничные условия для тонкого слоя, расположенного на идеально-проводящей плоскости*// Радиотехника и электроника. 2005. Т. 50, № 3. С. 292 –296.

3. Ерофеенко В. Т., Тавакколи В. П. *Модели граничных условий на экранах и оболочках с распределенными неоднородностями*// Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2008. № 1. С. 49 –55.

4. Вытовтов К. А. *Коэффициенты прохождения и отражения плоско-параллельной пластины из фарадеева кирального материала*// Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, № 5. С. 559 –566.