

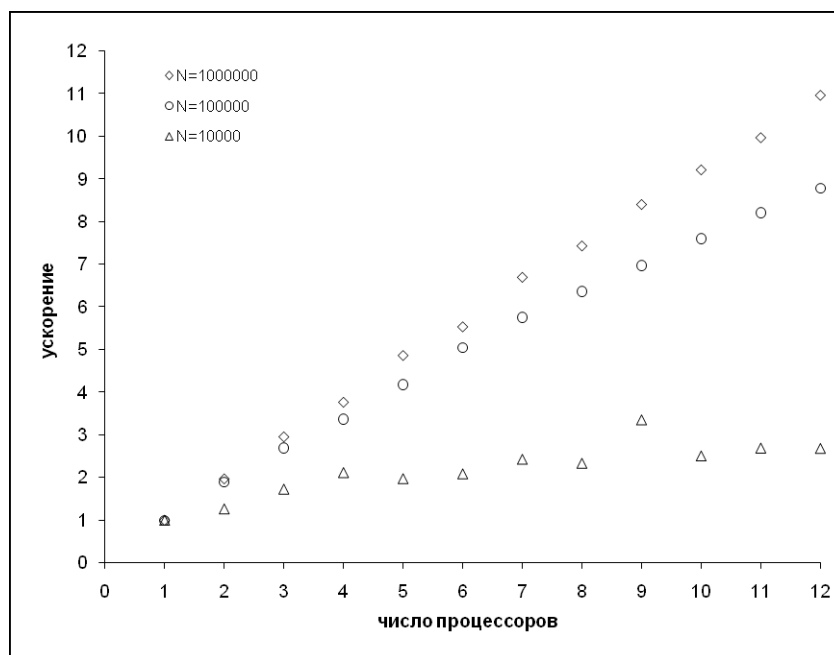


Рис. 1. Зависимость ускорения алгоритма от числа процессоров

На графике показана зависимость ускорения программы от числа процессоров, на которых она запускалась. Ускорение U параллельной системы определяется выражением: $U = T_n/T_1$, где T_1 – время решения задачи на однопроцессорной системе; T_n – время решения той же задачи на n -процессорной системе. Эксперимент проходил на вычислительном кластере, состоящем из 12 машин. На всех машинах установлена операционная система Ubuntu Linux. Тесты проводились для матриц трех размеров: 10000, 100000 и 100000. Размер блока составлял 200, 2000 и 20000 соответственно. Для тестовых задач были сгенерированы симметричные, пятидиагональные матрицы с диагональным преобладанием и числом обусловленности 10^5 .

Литература

1. Мулярчик С. Г. *Численное моделирование микроэлектронных структур*. Мн., 1989.
2. Хейгеман Л., Янг Д. *Прикладные итерационные методы*. М., 1968.

ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КЛАССА ФУКСА ПРИ МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ПОДЗЕМНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Э. Н. БЕРЕСЛАВСКИЙ, Л. А. АЛЕКСАНДРОВА, Е. В. ПЕСТЕРЕВ (САНКТ-ПЕТЕРБУРГ,
Россия)

Хорошо известно, что дифференциальные уравнения класса Фукса тесно связаны с задачами о конформном отображении верхней полуплоскости на круговые многоугольники, ограниченные дугами окружностей и отрезками прямых. При интегрировании подобных уравнений с числом особых точек, большим трех, возникают сложности принципиального характера. Дело в том, что коэффициенты дифференциальных уравнений (которые, в конечном счете, и определяют характер его интегралов) помимо неопределенных аффиксов вершин многоугольников содержат еще и так называемые акцессор-

ные параметры, также неизвестные заранее. Эти параметры не определяются полностью положением особых точек уравнения и показателями в них. Известно лишь, что эти постоянные должны однозначно определяться геометрией многоугольника, однако связь указанных параметров с характеристиками заданного многоугольника также заранее неизвестна и до настоящего времени не существует общего и удобного метода решения этой проблемы. В силу указанных причин существенно ограничивается применение, в частности, в механике жидкости и газа таких методов, которые основаны на рассмотрении комплексной скорости потоков: Н.Е. Жуковского и особых точек С.А. Чаплыгина в теории струй, П.Я. Полубариновой-Кочиной в теории фильтрации, С.В. Фальковича в газовой динамике и др. Поэтому представляет интерес изучение частных случаев, которые характерны для задач гидро- и аэромеханики. Здесь весьма типичны круговые многоугольники в полярных сетках, которые ограничены дугами концентрических окружностей и отрезками прямых, проходящих через начало координат, а также многоугольники, не принадлежащие этому классу, но подобные им.

Согласно общепринятому методу такие многоугольники посредством функции $w = \ln z$ преобразуются в прямолинейные с последующим применением формулы Кристоффеля-Шварца. Однако этот путь ведет к существенному увеличению числа неизвестных параметров конформного отображения. Во-первых, приходится каждый раз учитывать расположение относительно отображаемой области (на границе или внутри) точек ветвления $z = 0$ и $z = \infty$ логарифма, в которых нарушается конформность отображения. Чтобы добиться однозначности, например, в первом случае необходимо проводить дополнительный разрез от точки $z = 0$ до границы области, что увеличивает количество параметров сразу на три.

Во-вторых, общее число констант конформного отображения существенно возрастает, когда приходится учитывать параметры, появляющиеся при решении конкретной гидродинамической или аэромеханической задачи. Речь идет о масштабной постоянной моделирования, которая возникает при применении интеграла Кристоффеля-Шварца, а также аффиксах устранимых особых точек, имеющих место на физической плоскости z . Таким образом, решение задачи еще более усложняется.

В отличие от традиционного подхода, в докладе предлагается воспользоваться специальными методами, приспособленными именно к классу многоугольников в полярных сетках, которые опираются на идею нахождения частных решений уравнений фуксового типа в виде линейных комбинаций с неопределенными коэффициентами из известных частных решений некоторых более простых уравнений с тремя особыми точками. При этом неизвестные параметры конформного отображения определяются в ходе построения частных решений и поэтому в дальнейшем проблемы аксессуарных параметров не возникает. Учитывая специфические особенности, характерные для рассматриваемых классов многоугольников, получаемые на каждом этапе решения выражаются в замкнутой форме через специальные или элементарные функции и являются, таким образом, наиболее простыми и удобными для их последующего приложения.

В качестве применения полученных результатов в рамках двумерной установившейся фильтрации жидкости рассматриваются две математические модели фильтрационных течений под заглубленной прямоугольной платиной, углы которой округлены по кривым постоянной величины скорости обтекания, и под шпунтом Жуковского. Для их изучения формулируются и с применением линейных дифференциальных уравнений класса Фукса решаются смешанные краевые задачи теории аналитических функций. С

помощью полученных точных аналитических зависимостей и численных расчетов анализируется влияние всех физических параметров моделей на фильтрационные потоки. Отмечаются частные и предельные случаи, изученные ранее Н.Е. Жуковским, П.Я. Полубариновой-Кочиной и др.

МНОГОЭТАПНЫЕ АЛГОРИТМЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ЗАДАЧ

В. В. Бобков (Минск, Беларусь)

Главное внимание в данном сообщении уделяется начальной задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$u'(t) = f(t, u(t)).$$

Основные результаты имеют непосредственное отношение и к другим эволюционным задачам, в частности, к соответствующим задачам математической физики.

Обращается внимание на трудности, которые необходимо преодолевать при численном решении такого рода задач, особенно в ситуации существенно разноскоростного характера изменения составляющих решения. Такие трудности предопределены, прежде всего, большой величиной интервала наблюдения и необходимостью на каждом этапе численного анализа рассматриваемого процесса особенно тщательно обеспечивать сохранение основных законов его эволюции, заложенных в исходных дифференциальных уравнениях.

Традиционный подход к численному решению многих дифференциальных задач, связанный с процедурой дробления шага дискретизации для повышения точности приближений, в данном случае обычно малоэффективен (а часто и практически неприемлем). Рассматриваемый же здесь подход взамен процедуры дробления шага сетки предполагает для повышения уровня точности численного наблюдения использование специализированных многоэтапных алгоритмов (при фиксированном шаге). Разработка такого рода алгоритмов базируется на новом способе математического описания погрешности аппроксимации и понятии дифференциальной невязки. При этом для локальной погрешности метода решения задачи удастся указать приемлемые для практики способы последовательного нахождения ее главной части, что можно использовать не только для оценки уровня достигнутого локального приближения, но и для последующего повышения точности приближенного решения.

Литература

1. Bobkov V. V. *Spectrally consistent approximations to the matrix exponent and their applications to boundary layer problem* // Computational methods in applied mathematics. 2002. Vol. 2, No. 4. PP. 354–377.
2. Бобков В. В. *К вопросу о погрешности аппроксимации дифференциальных уравнений* // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2006. № 1. С. 76–79.
3. Бобков В. В. *Некоторые аспекты численного моделирования эволюционных задач* // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2007. № 2. С. 65–70.
4. Бобков В. В. *Новые варианты метода дифференциальных невязок* // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2008. № 2. С. 63–66.