имеется полный набор инструментов для работы с соответствующими математическими объектами. Использование MAPLE представляет собой программную задачу, сочетающую использование стандартных инструментов пакета с реализацией необходимых дополнительных алгоритмов. При этом программные средства MAPLE дают возможность построения формализма решения в традиционных терминах и обозначениях известных классических подходов [4] к решениям такого рода задач. Это важно не только с методической точки зрения, но и по ряду существенных моментов, включающих апробацию рассматриваемого метода построения решений, его интерпретацию и применение [5,6].

Литература

1. Андрушкевич, И. Е. *Обобщенный метод Фурье разделения переменных* / И. Е Андрушкевич. // Вестник Полоцкого государственного университета. 2005. № 4. С. 28–34.

2. Андрушкевич, И. Е. *Новые возможности применения метода разделения переменных в электродинамике неоднородных и нестационарных сред* / И. Е. Андрушкевич, В. А. Жизневский. // Вестник БГУ. Сер. I. 2006. С. 47–53.

3. Колмогоров, А. Н. *О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения* / А. Н. Колмогоров. // Докл. АН СССР. 1957. Т. 114. С. 953–956.

4. Тихонов, А. Н. *Уравнения математической физики* // А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. М.: Наука, 1977.

5. Андрушкевич, И. Е. *Применение обобщенного метода Фурье в задаче полого волновода треугольного сечения* / И. Е. Андрушкевич, В. А. Жизневский. //Вестник Витебского государственного университета. 2002. № 2(24). С. 124–128.

6. Жизневский, В. А. *Решение краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца в прямоугольной области* / И. Е. Андрушкевич, В. А. Жизневский. // Вестник Витебского государственного университета. 2002. № 3 (25). С. 113–118.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ И УСТОЙЧИВОСТИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ АЭРОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов (Ульяновск, Россия)

В работе исследуется динамика и устойчивость деформируемых (вязкоупругих, упругих) элементов (пластин, стержней, оболочек) тонкостенных конструкций с учетом взаимодействия с потоком идеальной жидкости (газа). Определение устойчивости тела соответствует концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Механическое поведение вязкоупругого материала описывается моделью, согласно которой связь между напряжением и деформацией определяется линейным или нелинейным уравнением типа Вольтерра-Фойхта. Поведение упругого материала описывается нелинейной моделью, учитывающей продольную и поперечную составляющую деформации элементов. Рассматриваются, в частности, задачи с учетом теплового воздействия на элементы и эффектов запаздывания различных внешних воздействий.

Разработаны аналитические методики исследования устойчивости в задачах аэрогидроупругости, основанные на построении функционалов. Исследование динамики эле-

ментов проводится с помощью разработанных численно-аналитических методов.

Изучается устойчивость элементов при различных способах их закрепления. Количество элементов и места их расположения на конструкциях произвольны. Скорости движения газа предполагаются дозвуковыми, трансзвуковыми, сверхзвуковыми. Исследуется устойчивость движения элементов летательных аппаратов, трубопроводных систем, датчиков измерения параметров газожидкостных сред. Подобные задачи рассматривались в работах [1] – [3].

Для примера приведем в линейной постановке плоскую задачу аэрогидроупругости о малых колебаниях, возникающих при бесциркуляционном обтекании пластины потоком газа.

Пусть на плоскости xOy, в которой происходят совместные колебания упругой пластины и газа, пластине соответствует на оси Ox отрезок $[0, l]$. В бесконечно удаленной точке скорость газа равна V и имеет направление, совпадающее с направлением оси Ox. Введем обозначения: $w(x,t)$ – прогиб пластины и $\varphi(x,y,t)$ – потенциал скорости возмущенного потока газа. Тогда математическая постановка задачи имеет вид:

$$\Delta\varphi \equiv \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \qquad (x,y) \in G = \mathbb{R}^2 \backslash [0,l],$$

$$\varphi_y^{\pm}(x,0,t) = \lim_{y \to \pm 0} \varphi_y(x,y,t) = w_t(x,t) + V w_x(x,t), \quad x \in [0,l],$$

$$|\nabla\varphi|_\infty^2 \equiv \left(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_t^2\right)_\infty = 0.$$

$$Dw''''(x,t) + M\ddot{w}(x,t) + Nw''(x,t) + \beta_0 w(x,t) + \beta_1 \dot{w}(x,t) +$$

$$+\beta_2 \dot{w}''''(x,t) = \rho\left(\varphi_t^+ - \varphi_t^-\right) + \rho V\left(\varphi_x^+ - \varphi_x^-\right), \; x \in (0,l),$$

Здесь индексы x, y, t снизу обозначают частные производные по соответствующей переменной; штрих обозначает производную по x, а точка – производную по t; N – сжимающее (растягивающее) пластину усилие; ρ, D, M, β_2, β_1, β_0 – другие постоянные параметры системы.

Решение задачи можно свести к исследованию интегро-дифференциального уравнения в частных производных для неизвестной функции деформации пластины:

$$Dw''''(x,t) + M\ddot{w}(x,t) + Nw''(x,t) + \beta_0 w(x,t) + \beta_1 \dot{w}(x,t) + \beta_2 \dot{w}''''(x,t) =$$

$$= -\frac{\rho}{\pi}\int_0^l \left(\ddot{w}(\tau,t) + V\dot{w}'(\tau,t)\right) K(\tau,x)d\tau - \frac{V\rho}{\pi}\int_0^l \left(\dot{w}(\tau,t) + Vw'(\tau,t)\right)\frac{\partial K(\tau,x)}{\partial x}d\tau,$$

$$x \in (0,l), \quad K(\tau,x) = 2\,ln\left|\frac{\sqrt{x(l-\tau)} + \sqrt{\tau(l-x)}}{\sqrt{x(l-\tau)} - \sqrt{\tau(l-x)}}\right|, \; \tau \neq x,$$

для которого: 1) построен функционал типа Ляпунова и на основании его исследования получены условия динамической устойчивости; 2) на основании метода Галеркина $\left(w(x,t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t) g_i(x)\right)$ проведено исследование динамики и получена численно область устойчивости приближенных решений для конкретных значений параметров механической системы; 3) проведено сравнение численных и аналитических расчетов.

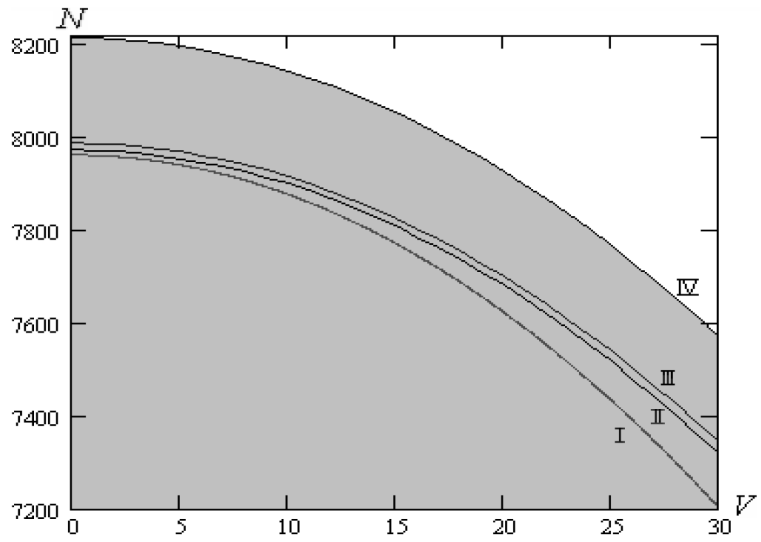

Рис. 1. Области устойчивости на плоскости (N, V)

На рис. 1: кривая I - граница аналитической области устойчивости точного решения, II, III, IV – границы областей устойчивости, полученные численно для решения в шестом ($n = 6$), четвертом ($n = 4$) и втором ($n = 2$) приближениях соответственно в случае жестко закрепленных концов пластины при значениях параметров $D = 806,7$; $M = 42,4$; $l = 2$; $\beta_0 = 4$; $\beta_1 = 0,1$; $\beta_0 = 0,2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы "Развитие научного потенциала высшей школы"Минобрнауки РФ (проект 2.1.1/6194).

Литература

1. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. *Устойчивость вязкоупругих элементов стенок проточных каналов.* Ульяновск: УлГТУ, 2000.

2. Ankilov A. V., Velmisov P. A. *Stability of the solutions of one class of aerohydroelasticity problems.* J. "Applications of Mathematics in Engineering and Economics". American Institute of Physics, USA, 2008. P. 414–426.

3. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Горбоконенко В. Д., Покладова Ю. В. *Математическое моделирование механической системы "трубопровод - датчик давления".* Ульяновск: УлГТУ, 2008.

ВЕРХНИЙ ПОРОГ ПЕРКОЛЯЦИИ БЕРНУЛЛИЕВСКОГО ПОЛЯ НА ГЕКСОГОНАЛЬНОЙ РЕШЕТКЕ

Е. С. Антонова, Ю. П. Вирченко (Белгород, Россия)

Бесконечное множество $V \in \mathbb{R}^2$ называют *периодическим*, если существует пара $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ неколлинеарных векторов в $\mathbb{R}^2$ (параллелограмм периодов) таких, что, для любого $n_i \in \mathbb{Z}$, $i \in \{1, 2\}$ имеет место равенство $V = V + n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2$. *Кристаллической решеткой* в $\mathbb{R}^2$, мы называем периодическое множество, которое состоит из изолированных точек. Кристаллическая решетка допускает диъюнктивное разложение

$$V = \bigcup_{\langle n_1, n_2 \rangle \in \mathbb{Z}^2} \{V_0 + n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2\}$$