ИССЛЕДОВАНИЕ СУММАРНОГО ПОТОКА ОБРАЩЕНИЙ В СИСТЕМЕ M|GI|∞ С ПОВТОРНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ С УЧЕТОМ НОМЕРА ПОПЫТКИ

И. Ананина

Томский государственный университет
Томск, Российская Федерация
ananinaia@sibmail.com

В работе рассматривается система M|GI|∞, на вход которой поступает простейший поток. В системе реализуется многократное обслуживание заявок, при этом длительность обслуживания и вероятность возвращения в систему зависят от номера обращения этой заявки. Найдена производящая функция суммарного числа заявок, обратившихся к системе за время t.

Ключевые слова: M|GI|∞ , потоки обращений, повторное обслуживание, метод предельной декомпозиции.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается система массового обслуживания с неограниченным количеством обслуживающих приборов, на вход которой поступает простейший с параметром λ поток. В системе реализуется многократное обслуживание заявок. Заявка, выполняющая k-ое по счету обслуживание, называется k-заявкой. Первичные заявки, то есть заявки входящего простейшего потока, являются 1-заявкой. Завершив обслуживание, с вероятностью r_k покидает систему, а с вероятностью $1 - r_k$ возвращается на прибор для повторного обслуживания, становясь $(k+1)$-заявкой. Время обслуживания k-заявки имеет произвольную функцию распределения $B_k(x)$.

Обозначим $n_k(t)$ - число k-заявок, реализованных (появившихся) в системе за время t. Таким образом, имеем систему массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов и повторными обращениями с учетом номера попытки . Ставится задача нахождения производящей функции суммарного процесса

$$m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} n_k(t).$$

2. МЕТОД ПРЕДЕЛЬНОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ

Исследование суммарного потока обращений и нахождение его производящей функции будем осуществлять с помощью метода предельной декомпозиции [1]. Суть этого метода заключается в следующем.

Входящий поток делится по полиномиальной схеме с равными вероятностями на N независимых пуассоновских потоков с интенсивностями λ/N, заявки каждого потока направляются для обслуживания на соответствующий прибор. Таким образом, получаем совокупность N независимых однолинейных СМО. Будем полагать, что эти СМО с отказами. То есть новая заявка, поступившая в систему, занятую обслуживанием, теряется. При $N\to\infty$ вероятностью потерь заявок можно пренебречь, и тогда суммарные характеристики совокупности N однолинейных СМО сходятся к характеристикам исходной модели. Таким образом, задача нахождения распределения вероятностей числа обращений в СМО с неограниченным количеством обслуживающих приборов сводится к решению задачи нахождения распределения вероятностей числа обращений в однолинейной СМО с отказами.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЛИНЕЙНОЙ СМО С ОТКАЗАМИ И ПОВТОРНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ С УЧЕТОМ НОМЕРА ПОПЫТКИ

Рассмотрим однолинейную систему обслуживания с отказами. В указанной однолинейной системе будем рассматривать соответствующий случайный процесс - суммарное число обращений, реализованных за время t:

$$m(t,N)=\sum_{k=1}^{\infty}n_k(t,N).$$

Здесь $n_k(t,N)$ - процессы изменения числа обращений k-заявок в однолинейной СМО. Поскольку рассматриваемый процесс $m(t,N)$ не является марковским, введем в рассмотрение дополнительные переменные:

процесс $k(t)$ - состояние обслуживающего прибора, то есть $k(t)=k$ когда он занят обслуживанием k-заявки , и $k(t)=0$ когда прибор свободен;

$z(t)$ - длина интервала от момента времени t до момента окончания текущего обслуживания, если прибор занят.

Полученный трехмерный процесс $\{k(t),m(t,N),z(t)\}$ является марковским. Его распределение вероятностей обозначим следующим образом:

$P_0(m,t,N)=P\{k(t)=0,m(t,N)=m\}$ - вероятность того, что в момент времени t прибор свободен и за это время к системе обратилось m заявок;

$P_k(m,z,t,N)=P\{k(t)=k,m(t,N)=m,z(t)<z\}$ - вероятность того, что на момент времени t в системе: суммарное число обращений равно m, на приборе осуществляется обслуживание , и до его окончания остается времени меньше z. Для распределения вероятностей трехмерного марковского процесса $\{k(t),m(t,N),z(t)\}$ составим прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова [2]:

$$\frac{\partial P_0(m,t,N)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty}(1-r_k)\frac{\partial P_k(m,z,t,N)}{\partial z} - \frac{\lambda}{N}P_0(m,t,N),$$

$$\frac{\partial P_1(m,z,t,N)}{\partial t} = \frac{\partial P_1(m,z,t,N)}{\partial z} - \frac{\partial P_1(m,0,t,N)}{\partial z} + \frac{\lambda}{N}P_0(m-1,t,N)B_1(z),$$

$$\frac{\partial P_k(m,z,t,N)}{\partial t} = \frac{\partial P_k(m,z,t,N)}{\partial z} - \frac{\partial P_k(m,0,t,N)}{\partial z} + r_{k-1}B_k(z)\frac{\partial P_{k-1}(m-1,0,t,N)}{\partial z}.$$

Рассмотрим производящие функции

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^m P_0(m,t,N) = H_0(x,t,N), \tag{1}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^m P_k(m,z,t,N) = H_k(x,z,t,N),\ k \geq 1. \tag{2}$$

Перейдем к системе дифференциальных уравнений в частных производных [3] для функций $H_0(x,t,N)$, $H_k(x,z,t,N)$, $k \geq 1$ вида

$$\begin{gathered}
\frac{\partial H_0(x,t,N)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty}(1-r_k)\frac{\partial H_k(x,z,t,N)}{\partial z} - \frac{\lambda}{N}H_0(x,t,N),\\
\frac{\partial H_1(x,z,t,N)}{\partial t} = \frac{\partial H_1(x,z,t,N)}{\partial z} - \frac{\partial H_1(x,0,t,N)}{\partial z} + \frac{\lambda}{N}H_0(x,t,N)xB_1(z),\\
\frac{\partial H_k(x,z,t,N)}{\partial t} = \frac{\partial H_k(x,z,t,N)}{\partial z} - \frac{\partial H_k(x,0,t,N)}{\partial z} + r_{k-1}xB_k(z)\frac{\partial H_{k-1}(x,0,t,N)}{\partial z}.
\end{gathered} \tag{3}$$

Решение системы (3) будем искать в виде

$$H_0(x,t,N) = 1 + \frac{1}{N}F_0(x,t) + o(N^{-2}), \tag{4}$$

$$H_k(x,z,t,N) = \frac{1}{N}F_k(x,z,t) + o(N^{-2}),\ k \geq 1. \tag{5}$$

Тогда уравнения для $F_0(x,t)$ и $F_k(x,z,t)$, $k \geq 1$, имеют вид:

$$\frac{\partial F_0(x,t)}{\partial t} = -\lambda + \sum_{k=1}^{\infty}(1-r_k)f_k(x,t), \tag{6}$$

$$\frac{\partial F_1(x,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial F_1(x,z,t)}{\partial z} - f_1(x,t) + \lambda x B_1(z), \tag{7}$$

$$\frac{\partial F_k(x,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial F_k(x,z,t)}{\partial z} - f_k(x,t) + r_{k-1}xB_k(z)f_{k-1}(x,t), \tag{8}$$

где

$$f_k(x,t) = \frac{\partial F_k(x,0,t)}{\partial z},\ k \geq 1.$$

Решение дифференциального уравнения первого порядка в частных производных (7) определяется решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений для характеристических кривых

$$\frac{dt}{1} = \frac{dz}{-1} = \frac{dF_1(x,z,t)}{\lambda x B_1(z) - f_1(x,t)}.$$

Найдем два первых интеграла этой системы. Один из них найдем из уравнения

$$-dt = dz.$$

То есть

$$z = C_1 - t. \tag{9}$$

Другой первый интеграл находим из уравнения

$$dF_1(x,z,t) = [\lambda x B_1(z) - f_1(x,t)]dt.$$

Откуда, подставляя (9), получаем равенство

$$F_1(x,z,t) = \Phi(z+t) + \int_0^t [\lambda x B_1(z+t-s) - f_1(x,s)]ds, \tag{10}$$

где $\Phi(z)$ - произвольная дифференцируемая функция.

Для определения частного решения необходимо воспользоваться начальными условиями

$$P_0(m,0,N) = \begin{cases} 0, & m > 0, \\ R_0(N), & m = 0. \end{cases}$$

$$P_k(m,z,0,N) = \begin{cases} 0, & m > 0, \\ R_k(z,N), & m = 0. \end{cases} \tag{11}$$

$$R_0(N) + \sum_{k=1}^{\infty} R_k(z,N) = 1.$$

Здесь $R_0(N)$, $R_k(z,N)$, $k \geq 1$, - стационарное распределение вероятностей состояния прибора в однолинейной СМО. Из (1-2) следует, что выполняются равенства

$$H_0(1,t,N) = R_0(N),\ H_k(1,z,t,N) = R_k(z,N), \tag{12}$$

Стационарные вероятности $R_0(N)$, $R_k(z,N)$ можно представить в виде

$$R_0(N) = 1 + \frac{1}{N}R_0 + o(N^{-2}),\ R_k(z,N) = \frac{1}{N}R_k(z) + o(N^{-2}). \tag{13}$$

Тогда согласно (4-5), (10) и (11)

$$F_1(x,z,0) = \Phi(z) = R_1(z).$$

Вероятности R_0, $R_k(z)$, $k \geq 1$, с учетом (12) определяются решением системы (6-8) при $x = 1$ и условием нормировки, то есть

$$R_0 = -\lambda\left(b_1 + \sum_{k=2}^{\infty}\prod_{i=1}^{k-1} r_i b_{i+1}\right),$$

$$R_1(z) = \lambda \int_0^z (1 - B_1(y))dy, \tag{14}$$

$$R_k(z) = \lambda \prod_{i=1}^{k-1} r_i \int_0^z (1 - B_k(y))dy,$$

где b_k - математическое ожидание времени обслуживания k-заявки. Таким образом, частное решение уравнения (7) принимает вид

$$F_1(x, z, t) = \lambda \int_0^{z+t} (1 - B_1(y))dy + \int_0^t [\lambda x B_1(z + t - s) - f_1(x, s)]ds. \tag{15}$$

Дифференцируя это тождество по z в нуле, получаем интегральное уравнение для нахождения неизвестной функции $f_1(x, t)$:

$$f_1(x, t) = \lambda(1 - B_1(t)) + \lambda x B_1(t). \tag{16}$$

Таким же образом найдем решение уравнений (8):

$$F_k(x, z, t) = \lambda \prod_{i=1}^{k-1} r_i \int_0^{z+t} (1 - B_k(y))dy +$$

$$+ \int_0^t [r_{k-1} x B_k(z + t - s) f_{k-1}(x, s) - f_k(x, s)]ds. \tag{17}$$

Дифференцируя полученное тождество (17) для $F_k(x, z, t)$, $k \geq 2$, по z в нуле, получаем интегральное уравнение для нахождения функций $f_k(x, t)$, $k \geq 2$:

$$f_k(x, t) = \lambda \prod_{i=1}^{k-1} r_i (1 - B_k(t)) + x r_{k-1} \int_0^t b_k(t - s) f_{k-1}(x, s)ds, \tag{18}$$

где $b_k(t)$ - плотность распределения времени обслуживания k-заявки.

Соответственно решение уравнения (6) имеет вид

$$F_0(x, t) = -\lambda\left(b_1 + \sum_{k=2}^{\infty}\prod_{i=1}^{k-1} r_i b_{i+1}\right) - \lambda t + \sum_{k=1}^{\infty}(1 - r_k) \int_0^t f_k(x, s)ds. \tag{19}$$

При $z \to \infty\infty$ выражения (15) и (17) приобретают вид

$$F_1(x, t) = \lambda b_1 + \lambda x t - \int_0^t f_1(x, s)ds, \tag{20}$$

$$F_k(x,t) = \lambda b_k \prod_{i=1}^{k-1} r_i + r_{k-1} x \int_0^t f_{k-1}(x,s)ds - \int_0^t f_k(x,s)ds. \qquad (21)$$

Тогда, суммируя (19-21) по маргинальной компоненте k, согласно (4-5), получаем

$$F(x,t) = -F_0(x,t) + \sum_{k=1}^{\infty} F_k(x,t) = (x-1)\left[\lambda t + \sum_{k=1}^{\infty} r_k \int_0^t f_k(x,s)ds\right]. \qquad (22)$$

Производящая функция $G(x,t)$ числа суммарных обращений в исходной системе с неограниченным числом линий определяется выражением

$$G(x,t) = \mathbf{e}^{\{} Mm(t)\} = \lim_{N\to\infty} \mathbf{e}^{\{} M(m_1(t) + m_2(t) + \ldots + m_N(t))\}.$$

В силу того, что все m_i, $i = 1 \ldots N$, независимы и одинаково распределены, имеем

$$G(x,t) = \lim_{N\to\infty} (H(x,t,N))^N,$$

где $H(x,t,N)$ - производящая функция суммарного числа обращений в однолинейной СМО. Учитывая (4-5) получаем

$$G(x,t) = \lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{1}{N} F(x,t) + o(N^{-2})\right)^N.$$

Подставляя выражение (22), получаем искомое выражение, определяющее производящую функцию числа суммарных обращений в системе M|GI|∞ с повторным обслуживанием с учетом номера попытки:

$$G(x,t) = \mathbf{e}$$

$$\{(\text{x-1})\left[\lambda t + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} r_k \int_0^t f_k(x,s)ds\right]\Big\}.$$

Знание вида производящей функции суммарного числа обращений в системе позволяет расчитать числовые характеристики процесса $m(t)$ и определить, например, среднее число обращений к системе за время наблюдения t.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Морозова А.С., Моисеева С.П., Назаров А.А.* Исследование СМО с повторным обращением и неограниченным числом обслуживающих приборов методом предельной декомпозиции // Вычислительные технологии.– 2005.– Т.13, вып.5.– С. 88-92.
2. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1969.
3. *Эльцгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969.