

(LC_i)	i	$(\dots, \ell, \dots)$
		$T_{0,1}^5 = \dots = > \dots = + \dots = \frac{0,1}{9},$ $\dots = + T_{0,1}^5 + \dots - t_{9,1}^{0,1} = \dots + \dots$
		$T_{0,1}^4 = \dots > \dots + \dots = \frac{0,1}{10}$ $T \dots T_{0,1}^4 + \dots - t_{10,1}^{0,1} = \dots + \dots$
		$T_{0,1}^4 = \dots = < \dots + \dots = \frac{0,1}{11},$ $T \dots = T_{0,1}^4 - t_{11,1}^{0,1} = \dots + \dots$
		$T_{0,1}^3 = \dots = < \dots = \frac{0,1}{15},$ $\dots = T_{0,1}^3 + \dots - t_{15,1}^{0,1} = \dots + \dots$

УДК 517.925.7

Е.В. ГРИЦУК

О АЛГЕБРОИДНЫХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

The convergence of formal series development of the solutions in a neighbourhood of a mobile algebraic special point of the nonlinear differential equations is proved.

В настоящей работе для дифференциальных уравнений

$$w^{(n)} = R(w^{(n-1)}, \dots, w', w, z),$$

где $R(w^{(n-1)}, \dots, w', w, z)$ – рациональная функция относительно первых n аргументов, имеющая аналитические по z в области $G \subset \mathbb{C}$ коэффициенты, устанавливается связь между методом резонансов в

случае его применения для исследования уравнений на наличие разложений решения в окрестности подвижной алгебраической особой точки и представлением этих уравнений в виде систем Брио и Буке.

Метод резонансов для случая подвижной алгебраической особой точки

Метод резонансов [1–3] применяется к дифференциальным уравнениям, представленным в полиномиальном виде

$$w^{(n)}Q(w^{(n-1)}, \dots, w', w, t) = P(w^{(n-1)}, \dots, w', w, t). \quad (1)$$

Здесь $t = z - z_0$, z_0 – произвольная точка из области G , а P и Q – полиномы $w^{(n-1)}, \dots, w', w$ с аналитическими по t коэффициентами в G . Метод резонансов для случая подвижной алгебраической особой точки (*слабый тест* см., например, [2, с. 22]) представляет собой последовательное выполнение следующих шагов.

Первый шаг. Определяется наименьшая возможная степень переменной t в формальном разложении решения уравнения (1) вида

$$w = \sum_{pj=0}^{\infty} c_j t^{j-\frac{s}{p}} := c_0 t^{-\frac{s}{p}} + c_{\frac{1}{p}} t^{\frac{1-s}{p}} + c_{\frac{2}{p}} t^{\frac{2-s}{p}} + \dots \quad (2)$$

С этой целью и для определения пар $(c_0, s/p)$ в уравнение (1) подставляется выражение (2). Если $c_0 \neq 0$ и при этом дробь s/p такова, что $p \in \mathbb{N}$, s – натуральное взаимно простое с p , то первый шаг пройден и анализ уравнения может быть продолжен. Заметим, что случай s – целое отрицательное сводится к предыдущему заменой $w \rightarrow w^{-1}$.

Мономы уравнения (1), которые в результате подстановки (2) в (1) определяют наименьшую степень t , называют ведущими (или доминантными) членами уравнения (1).

Второй шаг теста связывается с отысканием индексов Фукса для каждой пары значений $(c_0, s/p)$. Индексами Фукса, или резонансами, называются номера j , коэффициентов c_j в разложении решения (2), для которых коэффициенты c_{j_r} остаются произвольными.

Определяются индексы Фукса подстановкой выражения

$$w \sim c_0 t^{-s/p} + \beta t^{r-s/p} \quad (3)$$

в ведущие члены уравнения (1). Приравняв к нулю сумму коэффициентов при β , получаем уравнение $\tilde{Q}(r) = 0$, называемое уравнением резонансов.

В случае, когда для каждой пары значений $(c_0, s/p)$ все корни уравнения резонансов являются однократными, а отличные от -1 и, возможно, от 0 числами вида s_i/p , s_i – натуральные, второй шаг метода считается пройденным.

Третий шаг. Если все коэффициенты c_j в разложении (2) могут быть определены, а количество произвольных коэффициентов среди них равно $n - 1$, то считается, что дифференциальное уравнение (1) проходит третий шаг метода резонансов. Таким образом, прохождение дифференциальным уравнением (1) трех шагов метода резонансов позволяет определить у решений этого уравнения наличие подвижных алгебраических особых точек. При этом, разумеется, еще остается возможность существования подвижных особых точек логарифмического типа или подвижных существенно особых точек.

Используемое в описанном тесте разложение (2) – формальное, доказательство его сходимости требует дополнительных исследований. Оказывается, для доказательства сходимости формального разложения (2) в общем случае может быть использована теория систем Брио и Буке. В частности, применим следующий результат (см. теорему А 12 из [4, с. 272]): если система Брио и Буке

$$tu'_j = f_j(t, u_1, \dots, u_n), j = 1, 2, \dots, n,$$

с аналитическими в некоторой окрестности точки $t = u_1 = \dots = u_n = 0$ функциями f_j , $j = 1, 2, \dots, n$, с условиями $f_j(0, 0, \dots, 0) = 0$ допускает формальное решение

$$u_j = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(j)} t^k, C_k^{(j)} \in \mathbb{C}, \quad (4)$$

то разложение (4) сходится в области $0 < |t| < \rho$, $\rho > 0$.

Пример. Применим сформулированную теорему А 12 к уравнению (2.63) из [2, с. 22]

$$w'' = -(aw^2 + b)w' + cw - dw^2 - \beta w^3, \quad (5)$$

где константы $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$, $d \in \mathbb{R}$. Подставляя в уравнение (5) разложение (2), находим

$(c_0, s/p) = (c_0, 1/2)$, $c_0^2 = \frac{3}{2a}$. При этом ведущими членами уравнения являются w'' и $-aw^2w'$, а индексы

Фукса равны $r_1 = -1$, $r_2 = 3/2$. Формальное полярное разложение решения имеет вид

$$w = t^{-\frac{1}{2}} \left(c_0 + \frac{c_0(3\beta - ab)}{2a} t + c_{3/2} t^{3/2} + \dots \right). \quad (6)$$

Условие $d = 0$ обеспечивает произвольность коэффициента $c_{3/2}$. Все c_j с номерами $j > 3/2$ однозначно определяются через c_0 и $c_{3/2} = h$, где h – произвольная постоянная. Для доказательства сходимости ряда (6) в уравнении (5) положим

$$w = (c_0 + u_1(t)) t^{-1/2}, \quad w' = (-c_0 / 2 + u_2(t)) t^{-3/2}. \quad (7)$$

Тогда относительно $u_1(t)$, $u_2(t)$ имеем систему

$$tu'_1 = \frac{1}{2}u_1 + u_2, \quad tu'_2 = \frac{3}{2}u_1 + F_1(u_1, u_2, t), \quad (8)$$

где $F_1 = a(c_0 / 2u_1^2 - 2c_0u_1u_2 - u_1^2u_2) + bt(c_0 / 2 - u_2) + ct^2(c_0 + u_1) - dt^{3/2}(c_0 + u_1)^2 - \beta t(c_0 + u_1)^3$ с собственными значениями матрицы постоянных коэффициентов линейной части $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3/2$. Однако применить теорему А 12 из [4] на данном этапе не представляется возможным, так как функция $F_1(u_1, u_2, t)$ не является аналитической в окрестности точки $t = u_1 = u_2 = 0$ и, кроме того, формальные ряды $u_j(t)$ не являются степенными. Также заметим, что собственные значения матрицы постоянных коэффициентов системы (8) совпали с резонансами.

В системе (8) положим $t = \tau^2$ и получим систему Брио и Буке

$$\tau U'_1 = U_1 + 2U_2, \quad \tau U'_2 = 3U_1 + F_2(U_1, U_2, \tau), \quad (9)$$

где $F_2(U_1, U_2, \tau) = 2F_1(u_1, u_2, \tau^2)$, $U_j(\tau) = u_j(\tau^2)$.

Собственные значения матрицы постоянных коэффициентов линейной части системы (9) равны $\tilde{\lambda}_1 = -2$, $\tilde{\lambda}_2 = 3$. Так как функция $F_2(U_1, U_2, \tau)$ является аналитической в окрестности точки $\tau = U_1 = U_2 = 0$ и, кроме того, формальные ряды $U_j(\tau)$ – степенные со свойством $U_j \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$. В силу (6) и (7) система Брио и Буке (9) имеет однопараметрическое семейство формальных решений вида (4). Пользуясь теперь сформулированной выше теоремой А 12 из [4], заключаем, что ряды $U_j(\tau)$ сходятся в области $0 < |\tau| < \rho$, $\rho > 0$. Отсюда следует, что разложение (6) сходится в области $0 < |t| < \rho^2$.

Заметим также, что собственные значения $\tilde{\lambda}_j$ системы (9) находятся в соотношении $\tilde{\lambda}_j = 2r_j$ с резонансами r_j уравнения (5).

Метод резонансов и системы Брио и Буке

Рассмотрим уравнение (1) и представим его в виде

$$w^{(n)} (Q_1(w^{(n-1)}, \dots, w, t) + Q_2(w^{(n-1)}, \dots, w, t)) = P_1(w^{(n-1)}, \dots, w, t) + P_2(w^{(n-1)}, \dots, w, t), \quad (10)$$

где $w^{(n)}Q_1$ и P_1 – некоторая совокупность ведущих членов уравнения (1).

Разложим все коэффициенты уравнения (10) в окрестности точки $t = 0$ в степенные ряды. Тогда i -й и j -й ведущие члены уравнения (10) соответственно имеют вид

$$a_i w^{(n)} (w^{(n-1)})^{m_{i1}} (w^{(n-2)})^{m_{i2}} \dots (w')^{m_{i(n-1)}} w^{m_{in}}, \quad b_j (w^{(n-1)})^{\eta_{j1}} (w^{(n-2)})^{\eta_{j2}} \dots (w')^{\eta_{j(n-1)}} w^{\eta_{jn}}, \quad (11)$$

где $a_i, b_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $m_{is}, \eta_{js} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Будем считать для определенности, что число ведущих членов уравнения (10) равно N_1 и N_2 соответственно.

Получим уравнение резонансов для выбранной совокупности ведущих членов. Для этого выполним в уравнении (10) подстановку (3). Сравнивая степени t в ведущих членах обеих частей уравнения (10), с учетом (11) находим условие на степень $k := s/p$:

$$k + n + \sigma_1 = \sigma_2, \quad (12)$$

где

$$\sigma_1 = (k + n - 1)m_{i1} + (k + n - 2)m_{i2} + \dots + (k + 1)m_{i(n-1)} + km_{in}, \quad i \in \{1, 2, \dots, N_1\},$$

$$\sigma_2 = (k + n - 1)\eta_{j1} + (k + n - 2)\eta_{j2} + \dots + (k + 1)\eta_{j(n-1)} + k\eta_{jn}, \quad j \in \{1, 2, \dots, N_2\}.$$

Для удобства последующих преобразований введем дополнительные обозначения

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = -k, \quad \alpha_2 = k(k + 1), \dots, \quad \alpha_n = (-1)^n k(k + 1) \dots (k + n - 1). \quad (13)$$

Собрав коэффициенты при $t^{-(k+n+\sigma_1)}$ во всех ведущих членах уравнения (10), с учетом (13) находим соотношение для определения констант c_0

$$c_0 \alpha_n A_0 = B_0, \quad (14)$$

$$\text{где } A_0 = \sum_{i=1}^{N_1} a_i c_0^{m_{i1}+m_{i2}+\dots+m_{in}} \alpha_{n-1}^{m_{i1}} \alpha_{n-2}^{m_{i2}} \dots \alpha_0^{m_{in}}, \quad B_0 = \sum_{j=1}^{N_2} b_j c_0^{\eta_{j1}+\eta_{j2}+\dots+\eta_{jn}} \alpha_{n-1}^{\eta_{j1}} \alpha_{n-2}^{\eta_{j2}} \dots \alpha_0^{\eta_{jn}}.$$

Пусть пара (c_0, k) , $k = s/p$, $p \in \mathbb{N}$, s – натуральное взаимно простое с p , $c_0 \neq 0$, удовлетворяет условиям (12), (14). Тогда для получения уравнения резонансов, соответствующего выбранной паре (c_0, k) , в уравнении (10) положим

$$\begin{aligned} w &\sim c_0 \alpha_0 t^{-k} + \beta t^{r-k}, \quad w' \sim c_0 \alpha_1 t^{-k-1} + \beta(r-k) t^{r-k-1}, \dots, \\ w^{(n)} &\sim c_0 \alpha_n t^{-k-n} + \beta(r-k)(r-k-1)\dots(r-k-n+1) t^{r-k-n}. \end{aligned} \quad (15)$$

Умножая обе части уравнения (10) на $t^{k+n+\sigma_1}$ при βt^r , находим уравнение резонансов

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(r) &:= c_0 \alpha_n \sum_{i=1}^{N_1} a_i \gamma_i(r) c_0^{m_{i1}+m_{i2}+\dots+m_{in}-1} - \sum_{j=1}^{N_2} b_j \delta_j(r) c_0^{\eta_{j1}+\eta_{j2}+\dots+\eta_{jn}-1} + \\ &+ A_0(r-k)(r-k-1)\dots(r-k-n+1) = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_i(r) &= m_{i1}(r-k)\dots(r-k-n+2) \alpha_{n-1}^{m_{i1}-1} \alpha_{n-2}^{m_{i2}} \dots \alpha_1^{m_{i(n-1)}} \alpha_0^{m_{in}} + \\ &+ m_{i2}(r-k)\dots(r-k-n+3) \alpha_{n-1}^{m_{i1}} \alpha_{n-2}^{m_{i2}-1} \dots \alpha_1^{m_{i(n-1)}} \alpha_0^{m_{in}} + \dots \\ &+ m_{i(n-1)}(r-k) \alpha_{n-1}^{m_{i1}} \alpha_{n-2}^{m_{i2}} \dots \alpha_1^{m_{i(n-1)}-1} \alpha_0^{m_{in}} + \\ &+ m_{in} \alpha_{n-1}^{m_{i1}} \alpha_{n-2}^{m_{i2}} \dots \alpha_1^{m_{i(n-1)}} \alpha_0^{m_{in}-1}, \\ \delta_j(r) &= \eta_{j1}(r-k)\dots(r-k-n+2) \alpha_{n-1}^{\eta_{j1}-1} \alpha_{n-2}^{\eta_{j2}} \dots \alpha_1^{\eta_{j(n-1)}} \alpha_0^{\eta_{jn}} + \\ &+ \eta_{j2}(r-k)\dots(r-k-n+3) \alpha_{n-1}^{\eta_{j1}} \alpha_{n-2}^{\eta_{j2}-1} \dots \alpha_1^{\eta_{j(n-1)}} \alpha_0^{\eta_{jn}} + \dots \\ &+ \eta_{j(n-1)}(r-k) \alpha_{n-1}^{\eta_{j1}} \alpha_{n-2}^{\eta_{j2}} \dots \alpha_1^{\eta_{j(n-1)}-1} \alpha_0^{\eta_{jn}} + \\ &+ \eta_{jn} \alpha_{n-1}^{\eta_{j1}} \alpha_{n-2}^{\eta_{j2}} \dots \alpha_1^{\eta_{j(n-1)}} \alpha_0^{\eta_{jn}-1}. \end{aligned}$$

Лемма. Для всех пар (c_0, k) , $k = s/p$, $p \in \mathbb{N}$, s – натуральное взаимно простое с p , $c_0 \neq 0$, удовлетворяющих условиям (12) и (14), один корень уравнения (16) равен -1 .

Доказательство. Учитывая обозначения (13) и вид выражений σ_i , при $r = -1$ получаем

$$\gamma_i(-1) = \frac{\sigma_1}{k} \alpha_{n-1}^{m_{i1}} \alpha_{n-2}^{m_{i2}} \dots \alpha_0^{m_{in}}, \quad \delta_j(-1) = \frac{\sigma_2}{k} \alpha_{n-1}^{\eta_{j1}} \alpha_{n-2}^{\eta_{j2}} \dots \alpha_0^{\eta_{jn}}. \quad (17)$$

Подставим в $\tilde{Q}(-1)$ выражения (17). Тогда с учетом (12) и (14) имеем

$$\tilde{Q}(-1) = \frac{1}{kc_0} (A_0 c_0 \alpha_n (k+n+\sigma_1) - B_0 \sigma_2) = \frac{\sigma_2}{kc_0} (A_0 c_0 \alpha_n - B_0) = 0.$$

Следовательно, $r = -1$ есть корень уравнения (16). Лемма доказана.

Заметим, что в силу структуры $\tilde{Q}(r)$ степень уравнения (16) относительно r равна n только в случае $A_0 \neq 0$.

Теорема. Если уравнение (1) проходит три шага метода резонансов, то в окрестности подвижной алгебраической особой точки оно может быть преобразовано к системе Брио и Буке и разложения вида (2) для уравнения (1) являются сходящимися.

Доказательство. Пусть уравнение (1) прошло три шага метода резонансов. Фиксируем один из наборов ведущих членов и представим уравнение (1) в виде (10) с введенными ранее обозначениями (11). Согласно первому шагу метода резонансов в уравнение (10) подставим формальный ряд (2). Тогда получим систему соотношений (12) и (14) для определения пар (c_0, k) , $k = s/p$, $p \in \mathbb{N}$, s – натуральное взаимно простое с p , $c_0 \neq 0$, соответствующих фиксированному выбору ведущих членов уравнения. Для случая $p = 1$ доказательство проведено в работе [5]. Далее считаем, что $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Фиксируем одну из пар $(c_0, s/p)$. Выполним преобразование (15) и получим уравнение резонансов (16).

Отметим, что в силу леммы уравнение резонансов (16) имеет один корень, равный -1 . Так как уравнение (10) проходит три шага метода резонансов, то уравнение резонансов $\tilde{Q}(r) = 0$ имеет еще $n-1$ однократный корень. Следовательно, $A_0 \neq 0$.

По предположению теоремы формальное решение уравнения (10) можно представить в виде

$$w = (c_0 \alpha_0 + u_1(t)) t^{-s/p}, \quad (18)$$

где формальный ряд $u_1(t)$ обладает свойством $u_1(t) \rightarrow 0, t \rightarrow 0$. Введем формальные ряды $u_j(t)$, $j = 2, 3, \dots, n$, соотношениями

$$u_2 = t^{s/p+1} w' - c_0 \alpha_1, u_3 = t^{s/p+2} w'' - c_0 \alpha_2, \dots, u_n = t^{s/p+n-1} w^{(n-1)} - c_0 \alpha_{n-1}. \quad (19)$$

Тогда формальные ряды $u_j(t)$, $j = 2, 3, \dots, n$, обладают свойством $u_j(t) \rightarrow 0, t \rightarrow 0$ и удовлетворяют уравнениям

$$tu'_j = (s/p + n - 1)u_j + u_{j+1}, j = 1, 2, \dots, n-1. \quad (20)$$

Уравнение (10) после умножения на $t^{n+s/p+\sigma_1}$, учитывая (18) и замену (19), принимает вид

$$tu'_n - (s/p + n - 1)u_n + c_0 \alpha_n = \frac{B_0 + B_1 u_1 + B_2 u_2 + \dots + B_n u_n + F_2}{A_0 + A_1 u_1 + A_2 u_2 + \dots + A_n u_n + F_1}, \quad (21)$$

где $F_i(u_1, u_2, \dots, u_n, t)$ не являются, вообще говоря, голоморфными в нуле по t , так как могут содержать переменную t в рациональной степени. Коэффициенты A_s и B_s с $s \geq 1$ имеют следующий вид:

$$A_s = \sum_{i=1}^{N_1} a_i m_{i(n-s+1)} c_0^{m_{i1}+m_{i2}+\dots+m_{in}-1} \alpha_{n-1}^{m_{i1}} \alpha_{n-2}^{m_{i2}} \dots \alpha_0^{m_{in}},$$

$$B_s = \sum_{j=1}^{N_2} b_j \eta_{j(n-s+1)} c_0^{\eta_{j1}+\eta_{j2}+\dots+\eta_{jn}-1} \alpha_{n-1}^{\eta_{j1}} \alpha_{n-2}^{\eta_{j2}} \dots \alpha_0^{\eta_{jn}}.$$

Так как $A_0 \neq 0$, то уравнение (21) преобразуется к виду

$$tu'_n = B_0 / A_0 - c_0 \alpha_n + \tilde{A}_1 u_1 + \tilde{A}_2 u_2 + \dots + \tilde{A}_n u_n + (s/p + n - 1)u_n + F(u_1, u_2, \dots, u_n, t), \quad (22)$$

где

$$\tilde{A}_j = (A_0 B_j - B_0 A_j) / A_0^2, \quad (23)$$

и $F(u_1, u_2, \dots, u_n, t)$ не является голоморфной в нуле по t по той же причине. Заметим, что в силу (14) свободный член правой части (22) обращается в нуль, и, следовательно, для определения $u_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, n$, имеем систему

$$tu'_1 = s/p u_1 + u_2, tu'_2 = (s/p + 1)u_2 + u_3, \dots, tu'_{n-1} = (s/p + n - 2)u_{n-1} + u_n, \\ tu'_n = \tilde{A}_1 u_1 + \tilde{A}_2 u_2 + \dots + (\tilde{A}_n + s/p + n - 1)u_n + F(u_1, u_2, \dots, u_n, t). \quad (24)$$

Характеристическое уравнение линейной части системы (24) имеет вид

$$\Delta_1(\lambda) := \begin{vmatrix} s/p - \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & s/p - \lambda + 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{A}_1 & \tilde{A}_2 & \dots & \tilde{A}_n + s/p - \lambda + n - 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (25)$$

Таким образом, для каждой пары $(c_0, s/p)$ уравнению (10) отвечает система (24) с характеристическим многочленом вида (25). Согласно третьему шагу метода резонансов формальный ряд $u_1(t)$ известен. Поэтому из рекуррентных соотношений (20) определяются и остальные формальные ряды $u_j(t)$.

В системе (24) произведем замену $t = \tau^p$ после умножения на p , получим систему Брио и Буке

$$\tau U'_1 = sU_1 + pU_2, \tau U'_2 = (s+p)U_2 + pU_3, \dots, \tau U'_{n-1} = (s+p(n-2))U_{n-1} + U_n, \\ \tau U'_n = p\tilde{A}_1 U_1 + p\tilde{A}_2 U_2 + \dots + (p\tilde{A}_n + s + p(n-1))U_n + \Phi(U_1, U_2, \dots, U_n, \tau), \quad (26)$$

где степенные ряды $U_j(\tau) = u_j(\tau^p)$, $j = 1, 2, \dots, n$, и функция $\Phi(U_1, U_2, \dots, U_n, \tau) = pF(u_1, u_2, \dots, u_n, \tau^p)$ – аналитическая в окрестности точки $U_1 = U_2 = \dots = U_n = \tau = 0$. Системе (26) в силу замены (18) удовлетворяют формальные степенные ряды $U_j(\tau)$, $j = 1, 2, \dots, n$, и согласно теореме А 12 из [4, с. 272] они являются сходящимися в области $0 < |\tau| < \rho$ ($\rho > 0$), а, значит, формальные степенные ряды $u_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, n$, являются сходящимися в области $0 < |t| < \rho^p$. Тем самым доказана сходимость ряда (2). Рассмотрение других пар $(c_0, s/p)$ с тем же фиксированным значением s/p аналогичное. При другом наборе ведущих членов уравнения (1), а значит, при другом s/p рассуждения такие же. Перебор всех возможных вариантов выбора ведущих членов завершает доказательство. Теорема доказана.

Укажем на связь между корнями уравнения резонансов и собственными значениями системы Брио и Буке (26). Обозначим характеристический многочлен матрицы постоянных коэффициентов системы (26)

через $\Delta_2(\tilde{\lambda})$. Тогда очевидно равенство $\Delta_1(\lambda) = p^{-n} \Delta_2(p\lambda)$. Представим уравнение резонансов (16) в виде $\tilde{Q}(r) = A_0(r-s/p)(r-s/p-1)\dots(r-s/p-n+1) + (c_0\alpha_n A_1 - B_1) + (r-s/p)(c_0\alpha_n A_2 - B_2) + \dots + (r-s/p) \times (r-s/p-1)\dots(r-s/p-n+2)(c_0\alpha_n A_n - B_n) = 0$.

Учитывая (14) и обозначения (23), для $\tilde{Q}(r)$ имеем представление

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(r) = & -A_0 \left(\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2(r-s/p) + \dots \right. \\ & \left. + \tilde{A}_n(r-s/p)\dots(r-s/p-n+2) - (r-s/p)\dots(r-s/p-n+1) \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Множитель при A_0 правой части (27) находим из (25). Тогда имеем

$$\tilde{Q}(r) = (-1)^n A_0 \Delta_1(r) = (-p)^{-n} A_0 \Delta_2(pr).$$

Следовательно, для собственных значений $\tilde{\lambda}$ матрицы постоянных коэффициентов системы (26) и корней r уравнения (16) имеет место равенство $\tilde{\lambda} = pr$, т. е. собственные значения матрицы постоянных коэффициентов системы (26) для пары $(c_0, s/p)$ равны в p раз увеличенным индексам Фукса уравнения (10).

Следствие. Одно собственное значение системы Брио и Буке (26) равно $-p$.

1. Ablowitz M.J., Ramani A., Segur H.J. // J. Math. Phys. 1980. Vol. 21. P. 715.
2. Conte R., Musette M. The Painleve' Handbook. Dordrecht, 2008. P. 256.
3. Гориэли А. Интегрируемость и сингулярность. М., 2006.
4. Gromak V.I., Laine I., Shimomura S. Painleve' Differential Equations in the Complex Plane. Berlin; New York, 2002. Vol. 28.
5. Грицук Е.В., Громак В.И. // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 10. С. 1371.

Поступила в редакцию 23.06.11.

Евгений Васильевич Грицук – аспирант кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа. Научный руководитель – доктор математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа В.И. Громак.