

О РАДИУСЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОЙ БУЛЕВОЙ ЗАДАЧИ В СЛУЧАЕ НОРМЫ l_1 В ПРОСТРАНСТВЕ РЕШЕНИЙ

We obtain lower and upper attainable bounds for the stability radius of the vector Boolean problem with regularized linear criteria in case of linear norm in the solutions space.

В работе [1] найдены нижняя и верхняя оценки радиуса устойчивости векторной задачи целочисленного линейного программирования с паретовским принципом оптимальности в случае регулярно-сти нормы в критериальном пространстве. В данной статье исследована количественная характеристика устойчивости векторной линейной булевой задачи с лексикографическим принципом оптимальности в случае линейной нормы l_1 в пространстве решений задачи. Удалось не только получить нижнюю и верхнюю оценки радиуса устойчивости такой задачи, но и доказать достижимость оценок.

Пусть $\mathbf{R}^m$ – критериальное пространство, $\mathbf{R}^n$ – пространство решений, $C = [c_{ij}]$ – матрица размера $m \times n$ со строками $C_i \in \mathbf{R}^n$, $i \in N_m = \{1, 2, \dots, m\}$, $m \geq 1$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in X \subseteq \mathbf{E}^n$, $n \geq 2$, $\mathbf{E} = \{0, 1\}$, $|X| \geq 2$. Под лексикографической булевой задачей

$$Z^m(C): \text{lex min}\{Cx: x \in X\}, \quad m \geq 1,$$

будем понимать задачу поиска лексикографического множества (множества лексикографических оптимумов), которое зададим традиционным способом (см., например, [2–4]):

$$L^m(C) = \{x \in X: \nexists x' \in X (x \succ x')\},$$

где

$$x \succ x' \Leftrightarrow \exists k \in N_m (C_k x > C_k x' \text{ \& } k = \min\{i \in N_m: C_i x \neq C_i x'\}).$$

Известна следующая цепочка включений [3, 5]

$$X \supseteq L_1^m(C) \supseteq L_2^m(C) \supseteq \dots \supseteq L_m^m(C) = L^m(C),$$

где

$$L_i^m(C) = \text{Arg min}\{C_i x: x \in L_{i-1}^m(C)\}, \quad i \in N_m, \quad L_0^m(C) = X.$$

Поэтому задачу $Z^m(C)$ можно рассматривать как задачу последовательной оптимизации критериев $C_i x$, $i \in N_m$.

В пространстве решений $\mathbf{R}^n$ зададим линейную норму l_1 , а в критериальном пространстве $\mathbf{R}^m$ – традиционную для подобных исследований (см., например, [2, 6, 7]) чебышевскую норму l_∞ . Тем самым полагаем

$$\|C_i\|_1 = \sum_{j \in N_n} |c_{ij}|, \quad i \in N_m, \quad \|C\| = \max_{i \in N_m} \|C_i\|_1 = \max_{i \in N_m} \sum_{j \in N_n} |c_{ij}|.$$

Как обычно [1, 7], радиусом устойчивости $\rho = \rho(m, n)$ задачи $Z^m(C)$, $m \geq 1$, назовем число

$$\rho(m, n) = \begin{cases} \sup \Xi, & \text{если } \Xi \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \Xi = \emptyset, \end{cases}$$

где

$$\Xi = \{\varepsilon > 0: \forall C' \in \Omega(\varepsilon) \quad (L^m(C + C') \subseteq L^m(C))\},$$

$$\Omega(\varepsilon) = \{C' \in \mathbf{R}^{m \times n}: \|C'\| < \varepsilon\} - \text{множество возмущающих матриц}.$$

Ясно, что при выполнении равенства $L^m(C) = X$ радиус устойчивости задачи бесконечен. Задачу $Z^m(C)$, для которой множество $X \setminus L^m(C)$ непусто, будем называть нетривиальной.

Положим

$$\varphi = \varphi(m, n) = \min_{x \notin L^m(C)} \max_{x' \in L^m(C)} C_1(x - x'). \quad (1)$$

Очевидно, что $\varphi(m, n) \geq 0$.

Теорема 1. При $m \geq 1$ и $n \geq 2$ для радиуса устойчивости лексикографической нетривиальной задачи $Z^m(C)$, $m \geq 1$, справедливы следующие достижимые оценки

$$\varphi(m, n) \leq \rho(m, n) \leq n\varphi(m, n).$$

Доказательство. Сначала покажем, что $\rho \geq \varphi$. Это неравенство очевидно при $\varphi = 0$. Пусть $\varphi > 0$ и пусть вектор $x \in X \setminus L^m(C)$. Тогда согласно (1) существует такой вектор $x^* \in L^m(C)$, что $C_1(x - x^*) \geq \varphi$. Отсюда, полагая $C' \in \Omega(\varphi)$, получаем

$$(C_1 + C')(x - x^*) \geq \varphi - \|C'\|_1 > 0,$$

т. е. $x \notin L^m(C + C')$. Итак, для любой возмущающей матрицы $C' \in \Omega(\varphi)$ верно включение $L^m(C + C') \subseteq L^m(C)$. Следовательно, выполняется неравенство $\rho \geq \varphi$.

Докажем неравенство $\rho \leq n\varphi$. В силу (1) существует такой вектор $x^* \notin L^m(C)$, что для любого вектора $x \in L^m(C)$ справедливо неравенство

$$C_1(x^* - x) \leq \varphi. \quad (2)$$

Полагая $\varphi < \delta < \varepsilon/n$, построим элементы возмущающей матрицы $C^0 = [c_{ij}^0] \in \mathbf{R}^{m \times n}$ по правилу

$$c_{ij}^0 = \begin{cases} -\delta, & \text{если } i = 1, x_j^* = 1, \\ \delta, & \text{если } i = 1, x_j^* = 0, \\ 0, & \text{если } i \in N_m \setminus \{1\}, j \in N_n. \end{cases}$$

Тогда $\|C^0\|_1 = \|C_1^0\|_1 = n\delta$, $C^0 \in \Omega(\varepsilon)$, $C_1^0(x^* - x) = -\delta\|x^* - x\|_1 \leq -\delta < -\varphi$. Отсюда и из (2) выводим, что для любого вектора $x \in L^m(C)$ справедливо неравенство $(C_1 + C_1^0)(x^* - x) < 0$. Поэтому методом от противного легко доказать, что $L^m(C) \cap L^m(C + C^0) = \emptyset$. Следовательно, для всякого числа $\varepsilon > n\varphi$ существует такая возмущающая матрица $C^0 \in \Omega(\varepsilon)$, что $L^m(C + C^0) \not\subseteq L^m(C)$, т. е. $\rho \leq n\varphi$. Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 вытекает следующее

Следствие [7]. Нетривиальная задача $Z^m(C)$, $m \geq 1$, устойчива ($\rho(m, n) > 0$) тогда и только тогда, когда $L^m(C) = L_1^m(C)$.

Теорема 2. При $m \geq 1$ и $n \geq 2$ существует такой класс лексикографических задач $Z^m(C)$, что для радиуса устойчивости любой задачи из этого класса справедлива формула

$$\rho(m, n) = \varphi(m, n).$$

Доказательство. Пусть $\varphi > 0$, $X = \{x^1, x^2\}$, $x^1 \notin L^m(C)$, $x^2 \in L^m(C)$ и пусть существует такой индекс $p \in N_n$, что $x_p^1 = 0$, $x_p^2 = 1$.

Полагая $\varphi < \delta < \varepsilon$, построим возмущающую матрицу $C^0 = [c_{ij}^0] \in \mathbf{R}^{m \times n}$ по правилу: $c_{ij}^0 = \delta$, если $i = 1$, $j = p$, и $c_{ij}^0 = 0$ в противном случае. Тогда $C_1^0(x^1 - x^2) = -\delta$, $C^0 \in \Omega(\varepsilon)$. Поэтому, учитывая очевидное в силу (1) равенство $C_1(x^1 - x^2) = \varphi$, имеем $(C_1 + C_1^0)(x^1 - x^2) = \varphi - \delta < 0$. Это означает, что $x^1 \in L^m(C + C^0)$. Тем самым для всякого числа $\varepsilon > \varphi$ существует такая возмущающая матрица $C^0 \in \Omega(\varepsilon)$, что $L^m(C + C^0) \not\subseteq L^m(C)$, т. е. $\rho \leq \varphi$. Следовательно, в силу теоремы 1 $\rho = \varphi$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. При $m = 1$ и $n \geq 2$ существует такой класс лексикографических задач $Z^1(C)$, что для радиуса устойчивости любой задачи из этого класса справедлива формула

$$\rho(1, n) = n\varphi(1, n).$$

Доказательство. Пусть $\varphi > 0$, $m = 1$, $X = \{x^*, x^1, x^2, \dots, x^n\} \subset \mathbf{E}^n$, $n \geq 2$; $x^* = (0, \dots, 0)^T$, $x^j = e^j$, $j \in N_n$; $C = (-c, -c, \dots, -c) \in \mathbf{R}^n$, $c > 0$. Здесь e^j — j -й столбец единичной матрицы $E \in \mathbf{R}^{n \times n}$. Тогда имеем $Cx^* = 0$, $Cx^j = -c$, $j \in N_n$, т. е. $x^* \notin L^1(C)$, $x^j \in L^1(C)$, $j \in N_n$. Отсюда согласно (1) справедливо равенство $\varphi = c$. Пусть теперь $C' = (c'_1, c'_2, \dots, c'_n)$ — произвольная возмущающая вектор-строка из множества $\Omega(n\varphi)$. Поскольку $\|C'\|_1 = \sum_{j \in N_n} |c'_j| < n\varphi$, то легко доказать, что существует хотя бы один

такой индекс p , что $|c'_p| < \varphi$. Поэтому выводим

$$(C + C')(x^* - x^p) = c - c'_p = \varphi - c'_p > 0.$$

Поэтому при любой возмущающей строке $C' \in \Omega(n\varphi)$ вектор $x^* \notin L^1(C + C')$, т. е. $\rho \geq n\varphi$. Следовательно, в силу теоремы 1 $\rho = n\varphi$. Теорема 3 доказана.

В заключение отметим, что в случае, когда и в пространстве решений $\mathbf{R}^n$ и в критериальном пространстве $\mathbf{R}^m$ задана одна и та же чебышевская норма l_∞ , в [8] получена следующая формула радиуса устойчивости лексикографической нетривиальной задачи $Z^m(C)$:

$$\rho(m, n) = \min_{x \in L^m(C)} \max_{x' \in L^m(C)} \frac{C_1(x - x')}{\|x - x'\|_1}, \quad m \geq 1, \quad n \geq 2.$$

1. Емеличев В.А., Кузьмин К.Г. // Кибернетика и системный анализ. 2010. № 1. С. 82.
2. Гуревский Е.Е., Емеличев В.А. // Тр. Ин-та матем. НАН Беларуси. 2008. Т. 16. № 2. С. 14.
3. Емеличев В.А., Карпук А.В., Кузьмин К.Г. // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2010. Т. 17. № 3. С. 32.
4. Гуревский Е.Е., Емеличев В.А. // Дискрет. матем. 2009. Т. 21. Вып. 3. С. 3.
5. Ehrgott M. Multicriteria Optimization. Berlin; Heidelberg, 2005.
6. Emelichev V., Podkopaev D. // Discrete Optimization. 2010. Vol. 7. P. 48.
7. Emelichev V.A., Girlich E., Nikulin Yu.V., Podkopaev D.P. // Optimization. 2002. Vol. 51. № 4. P. 645.
8. Емеличев В.А., Бердышева Р.А. // Докл. НАН Беларуси. 1999. Т. 43. № 3. С. 41.

Поступила в редакцию 16.12.10.

Владимир Алексеевич Емеличев – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической кибернетики.

Владимир Владимирович Коротков – аспирант кафедры математической кибернетики. Научный руководитель – В.А. Емеличев.