

УДК 531/534: [57+61]

И.Л. СЛАВАШЕВИЧ, Г.И. МИХАСЕВ, Л.Г. ПЕТРОВА

МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ РЕКОНСТРУИРОВАННОГО СРЕДНЕГО УХА, ПОДВЕРГНУТОГО ТИМПАНОСТАПЕДОПЛАСТИКЕ И ПЕРФОРАЦИИ ПОДНОЖНОЙ ПЛАСТИНЫ СТРЕМЕНИ

Biomechanical model of the reconstructed middle ear subjected to tympanostapedoplasty and the stapes footplate perforation is proposed. The basic goal of this study is to clear up the influence of the tangential displacements in an eardrum at modes and fundamental frequencies of the reconstructed middle ear. The reconstructed tympanic membrane is modeled as an isotropic elastic annular plate.

Механические повреждения тимпанальной мембраны (ТМ), патологические изменения ее механических свойств, вызванные отитом и другими заболеваниями, а также ограниченная подвижность цепи звукопроводящих косточек среднего уха (СУ) при отосклеротическом анкилозе могут приводить к значительному снижению порога акустической восприимчивости или к полной потере слуха человеком. Тимпанопластика – операция, направленная на ликвидацию воспалительного (гнойного) процесса, закрытие повреждений ТМ и восстановление трансмиссионного механизма слуховых косточек. В результате ограничения подвижности цепи звукопроводящих косточек при отосклеротическом анкилозе может возникнуть частичная или полная фиксация стремени. При данной патологии в клинической практике часто прибегают к стапедопластике, которая предполагает фенестрацию овального окна, заключающуюся в высверливании отверстия в подножной пластинке стремени, через которое вводится ствол протеза в улитку внутреннего уха [1]. Данный вариант стапедопластики называется стапедотомией. Наиболее сложным является случай тотальной реконструкции, предполагающий одновременно тимпаноластику и стапедотомию [2]. В этом случае основание протеза типа TORP [3] упирается в восстановленную ТМ, а конец ствола, введенного через перфорацию в стремени, покоится в кохлеарной жидкости улитки.

Целью работы является построение динамической модели звукопроводящей системы реконструированного среднего уха (PCY) с учетом тангенциальных деформаций ТМ и соответственно мембранных усилий.

Восстановленную колебательную систему СУ будем моделировать как состоящую из круглой упругой изотропной пластинки радиусом a , изготовленной из хрящевого имплантата, и сопряженного с ней твердого тела, моделирующего протез типа TORP (рис. 1 a). Данный протез состоит из круглой недеформируемой пластинки (основания) радиусом b и стержня, жестко сопряженного с ней под некоторым углом γ (рис. 2).

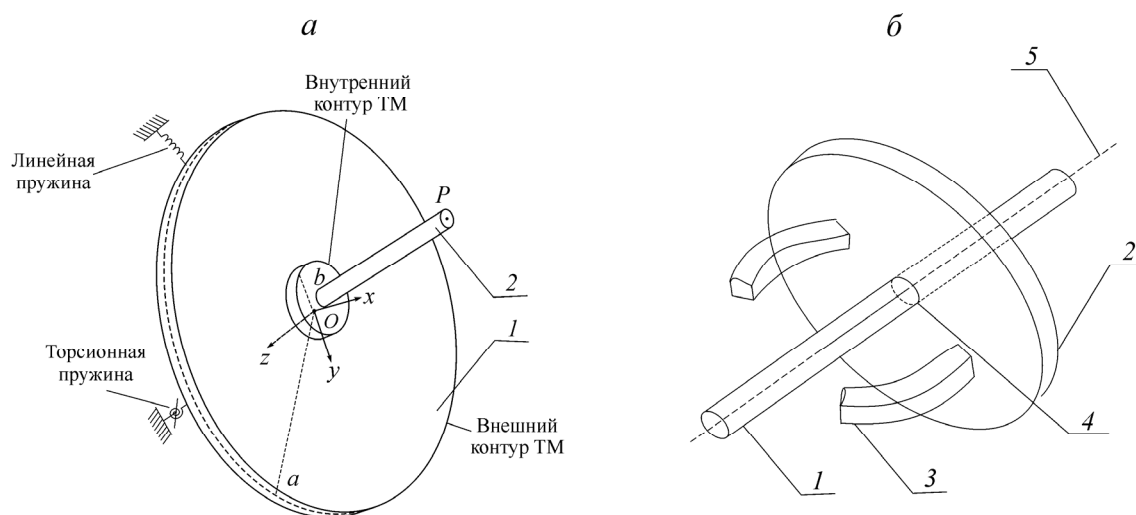


Рис. 1. Компоненты реконструированного среднего уха: *а* – реконструированная ТМ радиуса *a* (1) и протез типа TORP (2); *б* – ствол протеза, введенный в отверстие (перфорацию) подножной пластинки стремени (1); 2 – подножная пластинка стремени; 3 – остатки ножек стремени; 4 – перфорация в подножной пластинке; 5 – направление движения протеза

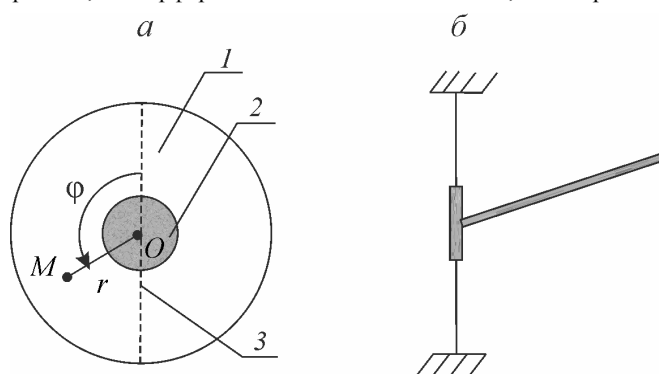


Рис. 2. Полярная система координат с центром в точке *O* (*а*): ТМ – 1; основание протеза – 2; линия, вдоль которой происходит тангенциальное смещение основания протеза, – 3 (*а*); поперечное сечение системы «ТМ-протез» (*б*)

Постановка задачи. Разрешающие уравнения

В работе [4] показано, что наиболее предпочтительной техникой установки протеза с точки зрения минимизации начальных напряжений является размещение основания протеза на восстановленной ТМ максимально близко к центру. Рассмотрим случай, когда центры восстановленной ТМ и основания протеза совпадают. Будем считать, что основание протеза и хрящевой имплантат жестко скреплены, при этом ТМ рассматриваем как кольцевую пластинку с внутренним и внешним радиусами *b* и *a* соответственно. Пусть перфорация подножной пластинки стремени выполняется в месте, где ее толщина максимальна. Тогда протез имеет лишь одну степень свободы, определяемую направляющей перфорации и совпадающую с направлением изогнутого ствола (рис. 1 б).

Введем глобальную декартову систему координат *Oxyz*, связанную с центром ТМ (см. рис. 1 а).

В качестве уравнений, описывающих движение РСУ, примем уравнения изгибно-плоскостных колебаний изотропной пластинки [5]:

$$D\Delta^2 W(r,t) + \rho h \frac{\partial^2 W(r,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$r \frac{\partial T_1}{\partial r} + T_1 - T_2 + \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \rho h \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad r \frac{\partial S}{\partial r} + 2S + \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} = \rho h \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \quad (2)$$

где

$$T_1 = K \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\nu}{r} U + \frac{\nu}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right), \quad T_2 = K \left(\nu \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r} U + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right),$$

$$S = \frac{K(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{r} V + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) -$$

– мембранные усилия, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, $K = \frac{Eh}{1-\nu^2}$ – жесткости пластины, E , ν и ρ – модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность хрящевой ткани соответственно, h – толщина пластины, W и U , V – нормальное и тангенциальные (радиальное и трансверсальное) перемещения точек пластины соответственно, а Δ – оператор Лапласа в полярной системе координат r , φ (см. рис. 2).

Поступательным колебаниям протеза будут соответствовать радиально-симметричные формы колебаний пластинки. Тогда граничные условия на внутреннем контуре сопряжения пластины с основанием протеза ($r = b$) в случае жесткой заделки примут вид

$$W|_{r=b} = W_p, \quad \left. \frac{\partial W}{\partial r} \right|_{r=b} = 0, \quad (3)$$

$$U|_{r=b} = -W_p \operatorname{tg} \gamma \cdot \cos \varphi, \quad V|_{r=b} = W_p \operatorname{tg} \gamma \cdot \sin \varphi, \quad (4)$$

где W_p – перемещение основания протеза вдоль оси Oz .

На внешнем контуре ТМ рассмотрим условия заделки, которые являются упругими в нормальном направлении и жесткими в плоскости пластинки [4, 6]:

$$(k_l W + Q)|_{r=a} = 0, \quad \left(k_t \frac{\partial W}{\partial r} + M_1 \right) \Big|_{r=a} = 0, \quad (5)$$

$$U|_{r=a} = 0, \quad V|_{r=a} = 0, \quad (6)$$

где k_l , k_t – коэффициенты линейной и торсионной жесткостей тимпанального кольца ТМ, найденные экспериментально для среднего уха в норме [6]. Здесь

$$Q_1 = -D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right), \quad (7)$$

$$M_1 = D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right)$$

– перерезывающая сила и изгибающий момент в срединной поверхности пластинки соответственно.

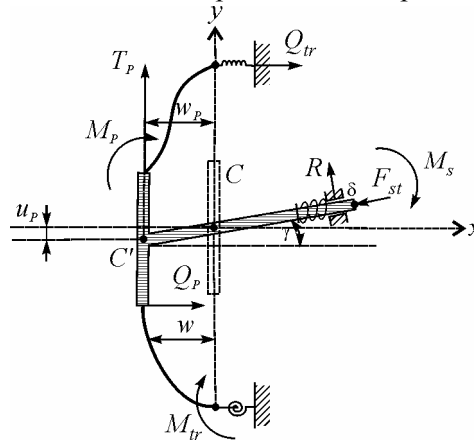


Рис. 3. Механическая модель колебательной системы «ТМ-протез»

Принимая во внимание наличие направляющей, обусловленной перфорацией подножной пластинки стремени (см. рис. 1 б), считаем далее, что протез совершает лишь поступательные движения. Тогда уравнения движения присоединенного стержня, моделирующего протез, имеют вид

$$Q_p - F_{st} \cos \gamma - R \sin \gamma = m \frac{\partial^2 W_p}{\partial t^2}, \quad T_p - F_{st} \sin \gamma + R \cos \gamma = m \frac{\partial^2 W_p}{\partial t^2} \operatorname{tg} \gamma, \quad (8)$$

где Q_p и T_p – равнодействующие перерезывающих и мембранных сил, возникающих вдоль внутреннего контура $r = b$ со стороны ТМ, а $F_{st} = k\delta$ – сила, являющаяся мерой взаимодействия внутреннего уха и основания стремени и возникающая в результате деформации мембраны круглого окна (рис. 3), $\delta = w_p / \cos \gamma$ – смещение стержня, $k = 8\pi T_0 (S / S_0)^2$ – коэффициент «жесткости» системы «кохлеарная жидкость – мембрана круглого окна» [7], $S_0 = \pi R_0^2$ – площадь мембраны круглого окна и T_0 – сила ее натяжения.

Решение краевой задачи

Проведем разделение переменных по формулам

$$W = w(r, t) \cos \omega t, \quad U = u(r, \varphi) \cos \omega t, \quad V = v(r, \varphi) \cos \omega t, \quad (9)$$

$$W_p = w_p \cos \omega t, \quad U_p = w_p \operatorname{tg} \gamma \cdot \cos \omega t, \quad (10)$$

где ω – искомая частота колебаний. Подстановка (9) в (1), (3) и (5) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \right)^2 w - \lambda^4 w = 0 \quad (11)$$

относительно нормального прогиба w с граничными условиями

$$\begin{aligned} (k_l w(r) + \frac{D}{a^2} (\frac{\partial w(r)}{\partial r} - a \frac{\partial^2 w(r)}{\partial r^2} - a^2 \frac{\partial^3 w(r)}{\partial r^3})) \Big|_{r=a} &= 0, \\ (k_t \frac{\partial w(r)}{\partial r} + \frac{D}{a} (a \frac{\partial^2 w(r)}{\partial r^2} + v \frac{\partial w(r)}{\partial r})) \Big|_{r=a} &= 0, \quad w(b) = w_p, \quad \frac{\partial w(r)}{\partial r} \Big|_{r=b} = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{где } \lambda^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D}.$$

Перейдем к рассмотрению системы уравнений (2). При исследовании низкочастотных изгибно-плоскостных форм колебаний пластинки силами инерции тангенциальных перемещений можно пренебречь. Тогда с учетом (9) уравнения (2) в перемещениях принимают вид

$$\begin{cases} r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} u + \frac{1-v}{2r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1+v}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \varphi} - \frac{3-v}{2r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0, \\ \frac{1-v}{2} r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1-v}{2} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1-v}{2r} v + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1+v}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} + \frac{3-v}{2r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Соответствующие граничные условия запишутся в форме

$$\begin{aligned} u|_{r=b} &= -w_p \operatorname{tg} \gamma \cdot \cos \varphi, \quad v|_{r=b} = w_p \operatorname{tg} \gamma \cdot \sin \varphi, \\ u|_{r=a} &= 0, \quad v|_{r=a} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Получили замкнутую краевую задачу (11) – (14), (8) на собственные значения λ . Решение неоднородной краевой задачи (11), (12) можно представить в виде

$$w = \frac{w_p}{|M|} [\overline{M}_{11} J_0(\lambda r) + \overline{M}_{12} Y_0(\lambda r) + \overline{M}_{13} I_0(\lambda r) + \overline{M}_{14} K_0(\lambda r)], \quad (15)$$

где J_0 , Y_0 – функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка, I_0 , K_0 – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка, $\mathbf{M}$ – матрица размерности 4×4 , элементы которой находятся из граничных условий (12) и ввиду их громоздкости здесь не выписываются, а $\overline{M}_{1j}$ ($j=1, \dots, 4$) – соответствующие миноры матрицы $\mathbf{M}$.

Принимая во внимание функциональную зависимость (14) тангенциальных перемещений u и v ТМ от окружной координаты φ на линии контакта с основанием протеза (при $r=b$), решение уравнений (13) ищем в виде

$$\begin{aligned} u &= u_0(r) + u_0^c(r) \cos \varphi + u_0^s(r) \sin \varphi, \quad v = v_0(r) + v_0^c(r) \cos \varphi + v_0^s(r) \sin \varphi, \\ u_0(r) &= C_{0,1} r + C_{0,2} \frac{1}{r}, \quad v_0(r) = C_{0,3} r + C_{0,4} \frac{1}{r}, \\ u_0^c(r) &= (1-3v) C_{1,1} r^2 + C_{1,2} \frac{1}{r^2} + C_{1,3} (3-v)^2 \ln r - C_{1,3} (1-v^2) - C_{1,4}, \\ v_0^c(r) &= -(5+v) C_{1,5} r^2 - C_{1,6} \frac{1}{r^2} + C_{1,7} (3-v)^2 \ln r + 2C_{1,7} (1+v) - C_{1,8}, \\ u_0^s(r) &= (1-3v) C_{1,5} r^2 + C_{1,6} \frac{1}{r^2} + C_{1,7} (3-v)^2 \ln r - C_{1,7} (1-v^2) - C_{1,8}, \\ v_0^s(r) &= (5+v) C_{1,1} r^2 + C_{1,2} \frac{1}{r^2} - C_{1,3} (3-v)^2 \ln r - 2C_{1,3} (1+v) + C_{1,4}. \end{aligned} \quad (16)$$

Постоянные C_{ij} находятся из граничных условий (14) и в силу их громоздкости также не приводятся. Заметим лишь, что C_{ij} – линейные функции параметра w_p .

Найденные перемещения (15), (16) позволяют определить силы Q_p и T_p , действующие на протез со стороны ТМ. Подстановка этих сил в систему уравнений (8) приводит к трансцендентному уравнению относительно искомого частотного параметра λ :

$$\begin{aligned} & 2\pi bD \frac{1}{|M|} \left[\frac{\partial^3}{\partial r^3} (\bar{M}_{11}J_0(\lambda r) + \bar{M}_{12}Y_0(\lambda r) + \bar{M}_{13}I_0(\lambda r) + \bar{M}_{14}K_0(\lambda r)) \right]_{r=b} + \\ & + \frac{1}{b} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\bar{M}_{11}J_0(\lambda r) + \bar{M}_{12}Y_0(\lambda r) + \bar{M}_{13}I_0(\lambda r) + \bar{M}_{14}K_0(\lambda r))_{r=b} - \frac{\partial}{\partial r} (\bar{M}_{11}J_0(\lambda r) + \\ & + \bar{M}_{12}Y_0(\lambda r) + \bar{M}_{13}I_0(\lambda r) + \bar{M}_{14}K_0(\lambda r))_{r=b} \Big] + k - m\omega^2 + tg\gamma [ktg\gamma - mtg\gamma\omega^2 - \\ & - \frac{bK\pi(3\nu-1)}{2bw_p} \left((1-3\nu)C_{1,1}r^2 + C_{1,2}\frac{1}{r^2} + C_{1,3}(3-\nu)^2 \ln r - C_{1,3}(1-\nu^2) - C_{1,4} \right) \Big]_{r=b} - \\ & - \frac{bK\pi(3\nu-1)}{2bw_p} \left((5+\nu)C_{1,1}r^2 + C_{1,2}\frac{1}{r^2} - C_{1,3}(3-\nu)^2 \ln r - 2C_{1,3}(1+\nu) + C_{1,4} \right) \Big]_{r=b} - \\ & - bK\pi \frac{1}{w_p} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left[(1-3\nu)C_{1,1}r^2 + C_{1,2}\frac{1}{r^2} + C_{1,3}(3-\nu)^2 \ln r - C_{1,3}(1+\nu) - C_{1,4} \right] \right) \Big]_{r=b} + \\ & + \frac{bK\pi(\nu-1)}{2w_p} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left[(5+\nu)C_{1,1}r^2 + C_{1,2}\frac{1}{r^2} - C_{1,3}(3-\nu)^2 \ln r - 2C_{1,3}(1+\nu) + C_{1,4} \right] \right) \Big]_{r=b} = 0. \end{aligned}$$

Численный анализ

Численное решение полученного уравнения позволяет исследовать влияние геометрических и физических параметров имплантата, а также протеза на частотные характеристики РСУ. В табл. 1 представлены зависимости первых шести собственных частот, соответствующих радиально-симметричным колебаниям, от массы протеза при $a = 5$ мм, $b = 1,5$ мм, $E = 3,4$ Н/мм², $\nu = 0,4$, $h = 0,15$, $k_l = 0,075$ Н·мм⁻², $k_t = 6,5 \cdot 10^{-5}$ Н, $T_0 = 10^{-5}$ Н/м [2, 6]. Из табл. 1 видно, что увеличение массы протеза приводит к заметному уменьшению частот ω_i . Объясняется это тем, что для рассматриваемых низко-частотных форм колебаний определяющим является поступательное движение протеза, а влияние перемещений точек ТМ (при отсутствии узловых линий) несущественно.

Таблица 1

Зависимость собственных частот ω_i , Гц от массы протеза m при $T_0 = 10^{-5}$ Н/м

$10^{-6} m$, кг	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
2,00	114,34	342,45	674,28	1090,72	1566,66	2133,81
6,00	107,1	327,36	657,49	1074,39	1550,84	2116,73
8,00	105,40	324,78	654,92	1072,01	1548,6	2114,36

Значительное влияние на динамические характеристики РСУ оказывает цилиндрическая жесткость восстановленной ТМ и, в частности, модуль упругости хрящевой ткани, замещающей барабанную перепонку. Приведенные в табл. 2 результаты указывают на то, что все собственные частоты РСУ возрастают вместе с модулем упругости хрящевого имплантата.

Таблица 2

Зависимость собственных частот ω_i , Гц от модуля Юнга E при $T_0 = 10^{-5}$ Н/м

E , Н/мм ²	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
1,2	65,31	198,14	402,88	676,43	1011,30	1396,02
3,4	107,10	327,36	657,49	1074,39	1550,84	2116,73
5,2	131,48	400,30	792,54	1265,45	1817,92	2533,25

Найденные здесь первые две частоты РСУ значительно ниже соответствующих частот для СУ в норме [6], что объясняется отсутствием связки овального окна, которая придает колебательной системе достаточно высокую интегральную жесткость [2]. При $i \geq 3$ наблюдается хорошее попадание частот ω_i в соответствующий диапазон, найденный методом конечно-элементного моделирования

для СУ в норме [6]. Таким образом, построенная динамическая модель может быть использована для прогнозирования динамических характеристик РСУ в случае тимпанопластики и стапедотомии при различных характеристиках имплантата и вводимого протеза TORP.

1. Hüttenbrink K.-B. // Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery (Eds. K.-B. Hüttenbrink). Dresden, 1997. P. 165.
2. Вульштейн Х. Слухулучшающие операции. М., 1972.
3. <http://www.kurz.med.com/>
4. Mikhasev G., Ermochenko S., Bornitz M. // Mathematical Medicine and Biology. 2010. Vol. 27 (4). P. 289.
5. Михасев Г.И., Товстик П.Е. Локализованные колебания и волны в тонких оболочках. М., 2009.
6. Wada H., Koike T., Kobayashi T. // Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery (Eds. K.-B. Hüttenbrink). Dresden, 1997. P. 76.
7. Чигарев А.В., Михасев Г.И., Борисов А.В. Биомеханика: Учеб. Мн., 2010.

Поступила в редакцию 02.04.11.

Ирина Леонидовна Славащев – аспирант кафедры био- и наномеханики. Научный руководитель – Г.И. Михасев.

Геннадий Иванович Михасев – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой био- и наномеханики.

Людмила Григорьевна Петрова – доктор медицинских наук, профессор, заведующая кафедрой оториноларингологии БЕЛМАПО.