

ЛИТЕРАТУРА

1. Программный комплекс «Алгебра-9». – Минск : НПП «Инфотриумф», 2007.
2. Wieman, C. Transforming physics education / C. Wieman, K. Perkins // Phys. Today. – Nov. 2005. – P. 36–41.
3. Clenets, D. H. Rethinking Concrete Manipulatives. Teaching Children Mathematics / D. H. Clenets, S. McMillen // National Council of Teachers of Mathematics. – 1996. – Vol. 2 (5), – P. 270–279.
4. Режим доступа: <http://nlvm.usu.edu>.

ОБ АЛГОРИТМАХ РЕАЛИЗАЦИИ В СИСТЕМЕ MATHEMATICA ФРАКТАЛЬНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Е. Ю. Сергиенко

*Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь
E-mail: katerina_werwolf@mail.ru*

Сопоставление алгоритмов формирования фрактальных изображений в различных программных приложениях и компьютерной технической системе Mathematica.

Ключевые слова: фрактал, комплексные отображения, графическая визуализация, системы компьютерной алгебры.

Алгебраические фракталы, к которым относятся множества Жюлиа, Ньютона и Мандельброта, порождаются одномерными нелинейными комплексными отображениями[1]. Задаваемые таким образом множества генерируются бесконечным повторением (итерацией) алгебраических функций или систем функций, причем значение вычисленной функции при следующей операции подставляется как аргумент. Эти числа отображаются точками на комплексной плоскости, где формируется пространственно-временной образ множества.

Множество Мандельброта, порождаемое простейшим квадратичным отображением $z_{n+1} = z_n^2 + c$, при фиксации параметра c представляет собой множество Жюлиа. Каждой точке множества Мандельброта на комплексной плоскости соответствует свое множество Жюлиа (рис. 1). Точки, лежащие внутри множества Мандельброта, точно соответствуют связным множествам Жюлиа, а снаружи – несвязным.

Доказано [2], что точка лежит снаружи множества Мандельброта, если она удаляется более чем на 2 от начала координат. На каждой итерации значение модуля $|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ сравнивается с «границей бесконечности» (обычно значение равно 2). Таким образом, если $|z_n|^2 < 4$ при любом числе итераций, то точка принадлежит множеству. Значение n фактически обозначает скорость движения z_n в бесконечность. Чтобы определить принадлежность точки множеству, нужно ограничить максимальное количество итераций. Если точка не вышла за указанную границу, считается, что она принадлежит множеству.

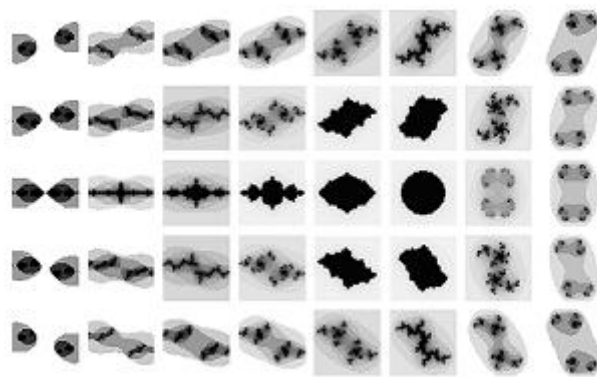


Рис. 1. Множества Жюлиа, соответствующие различным точкам множества Мандельброта

Строго математически, изображения фрактальных множеств должны быть черно-белыми: точка либо попадает внутрь множества, либо нет. Можно построить цветные изображения, раскрашивая точки снаружи множества в цвет, определяемый по количеству итераций, за которое они уходят в «бесконечность». Значение n может задаваться индексом в таблице цветов. Изображение, полученное таким способом, является лишь приближением к реальному множеству Мандельброта, теоретически более качественные результаты можно получать, увеличивая значение максимального количества итераций, однако при этом вырастает и время расчетов.

Возможность классификации и изучения хаотических структур, сегодня открывает широкие перспективы в визуализации научных данных. Программ для генерации фрактальных изображений на рынке не много и по большей части это бесплатные приложения, разработанные энтузиастами. Наиболее известны такие программы как Ultra Fractal, Fractal Explorer, Aros Fractal, Fractint, ChaosPro и др.

Эффективные инструменты визуализации и исследования научных данных предоставляют системы компьютерной математики. Лидерами систем компьютерной алгебры являются Mathematica, Maple. Практика последних лет подтверждает эффективность применения таких систем при решении задач математической физики, механики сплошных сред, экономики и др. В частности, особый интерес представляют инструментарий, процесс, особенности проектирования и реализации в компьютерной технической системе (КТС) Mathematica модулей графической визуализации фрактальных изображений.

Программирование фракталов в Mathematica включает в себя следующие этапы:

- 1) написание функции для выявления принадлежности точек фрактальному множеству,
- 2) визуализация полученной пользовательской функции средствами встроенных функций графики КТС Mathematica.

БАЗОВЫЕ КОНСТРУКЦИИ ЗАДАНИЯ ПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКИХ ФУНКЦИЙ

В Mathematica вышеописанный алгоритм расчета точек изображения можно реализовать, используя классический процедурный подход, как и в любом языке высокого уровня, используя операторы цикла и ветвления. Процедура будет возвращать для каждой точки сетки количество итераций, необходимое для «ухода в бесконечность», а достижение заданного порога интерпретировать как принадлежность точки множеству.

Module[{ $x, y, \dots$ }, $expr$] – задание процедуры со списком локальных переменных $x, y, \dots$ и телом $expr$.

Имеем следующие базовые конструкции для множеств Мандельброта и Жюлиа:

```
Mandelbrot[c_] := Module[{z = 0, i = 0}, While[i < n && Abs[z] < 2,  
z = z2 + c; i++]; i];  
Julia[z_] := Module[{z = z, i=0}, While[i<n && Abs[z] < 2,  
z = z2 + c0]; i++]; i];
```

где c_0 – комплексная константа.

Лучшую производительность дает использование одной из базовых функций Mathematica – функции **Compile**, которая служит для компилирования программы и поддерживает многие конструкции Mathematica. Компилятор распознает только классы целых чисел, приближенных вещественных и приближенных комплексных чисел. Причем максимальное значение целых чисел ограничено разрядностью процессора, а приближенные числа могут быть определены только с машинной точностью. Формат ввода компилятора выглядит как **Compile**[args, expr], где args – аргументы функции, а expr – компилируемое выражение.

Для множеств Жюлиа:

```
Compile[{{c, _Complex}},  
Length[FixedPointList[f[#] + c0&, c, n, SameTest -> (Abs[#] > 2&)]]];
```

для множества Мандельброта:

```
Compile[{{c, _Complex}},  
Length[FixedPointList[f[#] + c&, c, n, SameTest -> (Abs[#] > 2&)]]];
```

где $f[z]$ – соответствующая нелинейная функция, определяющая комплексное отображение; n – максимальное количество итераций (соответствует максимально возможному количеству различных цветов на полученном изображении).

ГРАФИЧЕСКАЯ ВИЗУАЛИЗАЦИЯ

В КТС Mathematica для визуализации изображений аналитических фракталов целесообразно использовать функцию

DensityPlot[f, {x, a, b}, {y, c, d}] – строит график изолиний для аналитически заданной функции f переменных x и y , заданных в указанных интервалах. Аналогично используются **DensityGraphics** и **ListDensityPlot**.

Использование различных опций функций графики в КТС Mathematica дает возможность визуально подчеркнуть необходимые особенности фрактала. Отметим наиболее значимые. Цветовая настройка производится с использованием опции **ColorFunction** соответствующей функции **DensityPlot**. **ColorFunction** определяет функцию, используемую для раскраски областей между изолиниями. Возможные директивы: *GrayLevel*, *RGBColor*, *Hue*, *CMYKColor*. **PlotPoints** – задает количество точек выборки, участвующих в построении. Опция определяет, на сколько элементарных участков с одинаковой плотностью будет разбита область построения графика, что задает точность и качество полученного изображения. Чем больше данное значение, тем больше времени будет занимать расчет.

Перечисленное реализовано в двух специализированных программных модулях в блоках: *Fract_Compl.nb* и *Fract_Modl.nb*. *Fract_Line.nb* – реализация в рамках общих универсальных функций формирования графических изображений (размещена в сети Internet).

СРАВНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ

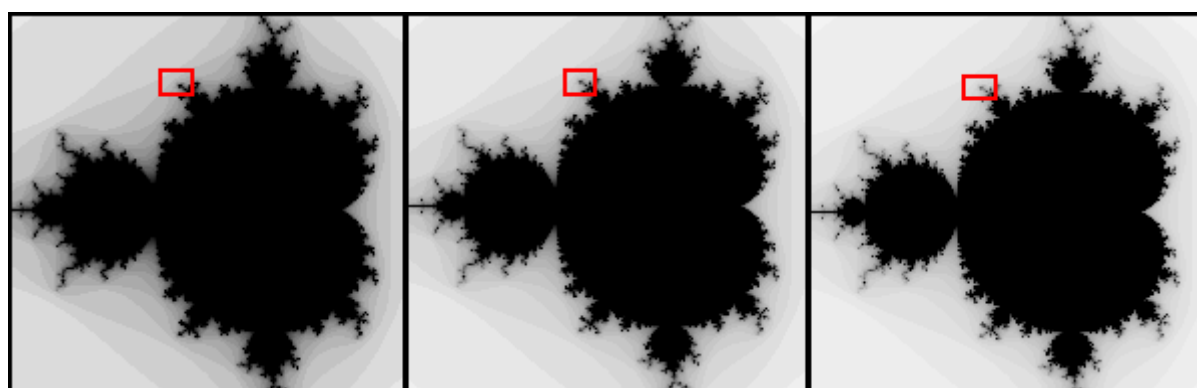
Сравним эффективность построения фракталов в Mathematica 5.2, используя два вышеописанных подхода организации расчета точек (табл. 1).

Сравнение возможностей и скорости построения фракталов в Mathematica 5.2

Значение n	Время выполнения, сек.				
	DensityPlot, Compile (Fract_Compl.nb)		DensityPlot, Module (Fract_Modl.nb)		Line, Module (Fract_Line.nb)
10	1.2*	5.2	4.3*	15.7	132.1
20	1.4*	5.7	5.2*	19.0	более 360
30	1.5*	6.0	6.1*	19.4	-
40	1.7*	6.6	7.0*	21.8	-
50	1.8*	6.7	7.8*	25.8	-
60	1.9*	7.0	8.6*	26.6	-
100	2.2*	7.8	12.0*	35.9	-

* Время формирования для ПК с 2-ядерным процессором

Контрольное значение n – граница количества итераций для фрактала с заданным размером. При генерации всего множества Мандельброта (размер 275×275 точек) для $n > 40$ (рис. 2), визуально качество изображения не изменяется (рис. 3), поэтому за контрольное значение принимается 40. При визуализации фрагмента изображения фрактала (на рис. 4 область размера 0.006×0.006) контрольное значение n надо увеличивать.



а) $n = 20$, $t = 1.4$ с

б) $n = 40$, $t = 1.7$ с

в) $n = 50$, $t = 1.8$ с

Рис. 2. Общий вид изображения множества Мандельброта, при заданном n , со временем построения t с показанными границами участка, выведенного в увеличенном масштабе на следующем рисунке

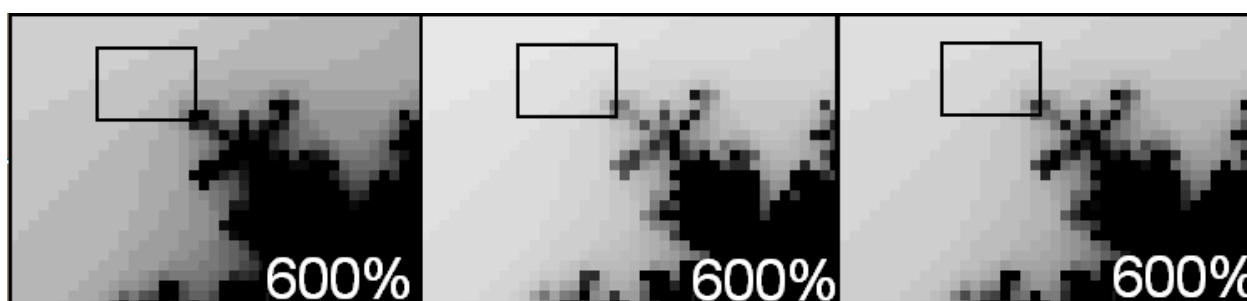
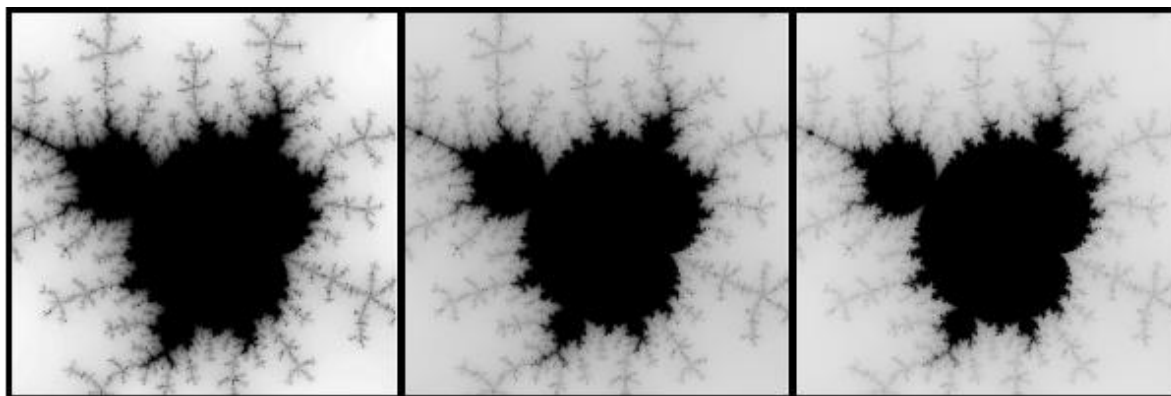


Рис. 3. Фрагменты ($-0.65 \leq x \leq -0.55$, $0.6 \leq y \leq 0.68$) приведенных выше рисунков, полученные с указанными n и t . Даны с отмеченным увеличением. Показаны границы дополнительного уточняющего фрагмента, показанного на рис. 4.



а) $n = 100, t = 5.3 \text{ с}$

б) $n = 150, t = 6.3 \text{ с}$

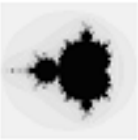
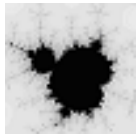
в) $n = 200, t = 6.6 \text{ с}$

Рис. 4. Изображения площадей $(-0.601 \leq x \leq -0.595, 0.660 \leq y \leq 0.666)$, рассчитанных с разным числом итераций по показанным участкам

Сравним эффективность построения фракталов в Mathematica 5.2, специализированных программах Aros Fractal и Ultra Fractal 3.0 на примере множества Мандельброта (табл. 2). Качество получаемых изображений в рассматриваемых программных продуктах при заданных параметрах не всегда одинаково. При визуализации участка множества максимальное количество итераций возрастает (в рассматриваемом примере достаточно взять около 200).

Таблица 2

Сравнение скорости построения множества Мандельброта

Характеристики	Значение n	Время выполнения, сек.		
		Mathematica 5.2	Aros Fractal	Ultra Fractal 3.0
Все множество: 3.0×3.0 	10	1.2		0.5
	20	1.4		0.6
	30	1.5		0.8
	40	1.7		0.9
	50	1.8		1.0
	60	1.9	менее 1.0	1.0
Фрагмент 0.006×0.006 	50	4.0	—	2.7
	100	5.3	—	3.5
	150	6.3	—	4.1
	200	6.6	—	4.6
	250	7.5	1.0	5.3

* Время формирования для ПК с 2-ядерным процессором

Скорость построения в КТС существенно зависит от установленной границы максимального количества итераций. Функция **Compile** по быстродействию является эффективнее функции **Module**. В то же время Mathematica уступает специализированной программе в быстродействии, однако позволяет контролировать процесс генерации и отслеживать координаты областей визуализируемых участков. Быстродействие и эффективность про-

граммы зависят от алгоритма ее вычисления и эффективности используемых встроенных функций графики Mathematica, установленных директив и опций.

КТС Mathematica универсальна и позволяет работать со сколь угодно малыми приближенными с машинной точностью числами. Зная необходимое комплексное преобразование, можно получить любое фрактальное изображение или его сколь угодно малый участок. Алгоритмы построения и расчета точек прозрачны, что позволяет их оптимизировать. Система показывает хорошие результаты по скорости построения изображений и обладает универсальным и удобным инструментарием для формирования фрактальных изображений и исследования фрактальных структур.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мандельброт, Б.* Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт ; перевод с англ. А. Р. Логунова. – М., 2002. – 656 с.
2. *Никулин, Е. А.* Компьютерная геометрия и алгоритмы машинной графики / Е. А. Никулин. – СПб. : БХВ-Петербург, 2003. – 560 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ППС «ГЕОМЕТРИЯ, 10 КЛАСС» НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В ГУМАНИТАРНЫХ КЛАССАХ

З. А. Сердюк

*Черкасский национальный университет
имени Богдана Хмельницкого
Черкассы, Украина
E-mail: serdyuk_z@ukr.net*

В статье рассматривается пример использования ППС «Геометрия, 10 класс» на уроке математики в гуманитарных классах.

Ключевые слова: обучение математике, гуманитарные классы, использование педагогических программных средств (ППС).

Изучение математики учениками гуманитарных классов часто сопровождается формальным отношением к ней как рядовому школьному предмету, не нужному им в будущем. В связи с этим нивелируются главные преимущества изучения математики – развитие мышления ученика. А от этого страдает его становление как гармоничной личности и полноценного члена современного общества. Развитие научно-технического прогресса движется с такой скоростью, что для того чтобы овладеть той или иной профессией, не-