УДК 517.956.3

Ф.Е. ЛОМОВЦЕВ, Е.Н. НОВИКОВ

МЕТОД ДЮАМЕЛЯ РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ С КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В НЕСТАЦИОНАРНОМ ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

The formula of the classical solutions of the mixed problem for nonhomogeneous oscillation equation of the semibounded string with time-dependant boundary condition containing the oblique derivative is obtained and the necessary and sufficient conditions with respect to the right-hand side, the initial data and the boundary value are found.

Смешанная задача для однородного уравнения колебаний полуограниченной струны и зависящей от времени косой производной в граничном условии решена в [1]. В настоящей работе решается такая смешанная задача для неоднородного уравнения колебаний струны и устанавливаются необходимые и достаточные условия существования и единственности классических решений не только по начальным и граничным данным, но и по правой части уравнения. Достаточные условия на правую часть уравнения колебаний ограниченной струны, совпадающие с необходимыми условиями, были указаны В.А. Чернятиным лишь для первой смешанной задачи [2].

В области $G=[0,\infty[\times[0,\infty[$ поставлена смешанная задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t),\ \ a>0,\ \ \{x,t\}\in G, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x),\ \ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=o}=\psi(x),\ 0\le x<\infty, \tag{2}$$

$$\left(\alpha(t)\frac{\partial u}{\partial t}+\beta(t)\frac{\partial u}{\partial x}+\gamma(t)u\right)\bigg|_{x=0}=\mu(t),\ \ 0\le t<\infty. \tag{3}$$

Методом характеристик и методом Дюамеля доказана

Теорема. *Пусть* $\alpha,\ \beta,\ \gamma\in C^1[0,\infty[$ *и* $a\alpha(t)\ne\beta(t),\ t\in[0,\infty[$. *Смешанная задача* (1) – (3) *имеет единственные классические решения* $u(x,t)\in C^2(G)$ *вида*

$$u_1(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\tau)d\tau+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(s,\tau)ds\,d\tau,\ \ \{x,t\}\in A, \tag{4}$$

$$u_2(x,t)=\frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{at-x}^{x+at}\psi(\tau)d\tau+\varphi(0)e^{\int\limits_{t-\frac{x}{a}}^{0}a\gamma(s)\left(a\alpha(s)-\beta(s)\right)^{-1}ds}+$$

$$+\int\limits_0^{t-\frac{x}{a}}e^{\int\limits_{t-\frac{x}{a}}^{\eta}a\gamma(s)\left(a\alpha(s)-\beta(s)\right)^{-1}ds}\left(a\alpha(\eta)-\beta(\eta)\right)^{-1}\left[a\mu(\eta)-\beta(\eta)\left(a\varphi'(a\eta)+\psi(a\eta)\right)\right]d\eta+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(s,\tau)ds\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{t-\frac{x}{a}}e^{\int\limits_{t-\frac{x}{a}}^{\eta}a\gamma(s)\left(a\alpha(s)-\beta(s)\right)^{-1}ds}\left(\beta(\eta)-a\alpha(\eta)\right)^{-1}\Bigg\{a\alpha(\eta)\int\limits_0^{\eta}\left[f\left(a(\eta-\tau),\tau\right)+f\left(a(\tau-\eta),\tau\right)\right]d\tau+$$

$$+\beta(\eta)\int\limits_0^{\eta}\left[f\left(a(\eta-\tau),\tau\right)-f\left(a(\tau-\eta),\tau\right)\right]d\tau+\gamma(\eta)\int\limits_0^{\eta}\int\limits_{a(\tau-\eta)}^{a(\eta-\tau)}f(s,\tau)ds\,d\tau\Bigg\}d\eta,\ \{x,t\}\in B, \tag{5}$$

где множества $A=\{\{x,t\}\in G:x>at\},\ B=\{\{x,t\}\in G:x<at\}$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия*

$$f\in C(G),\varphi\in C^2[0,\infty[,\psi\in C^1[0,\infty[,\mu\in C^1[0,\infty[, \tag{6}$$

$$\mathrm{Y}_1\equiv\alpha(0)\psi(0)+\beta(0)\varphi'(0)+\gamma(0)\varphi(0)=\mu(0), \tag{7}$$

$$\mathrm{Y}_2\equiv\alpha(0)\left(a^2\varphi''(0)+f(0,0)\right)+\left(\alpha'(0)+\gamma(0)\right)\psi(0)+\beta(0)\,\psi'(0)+\beta'(0)\,\varphi'(0)+\gamma'(0)\varphi(0)=\mu'(0), \tag{8}$$

$$\int\limits_0^t f^{(1,0)}\left(x\pm a(t-\tau),\tau\right)d\tau\in C(G), \tag{9}$$

$$a\alpha\left(t-\frac{x}{a}\right)\int\limits_0^{t-\frac{x}{a}}\left[f^{(1,0)}\left(a(t-s)-x,s\right)-f^{(1,0)}\left(x-a(t-s),s\right)\right]ds+$$
$$+\beta\left(t-\frac{x}{a}\right)\int\limits_0^{t-\frac{x}{a}}\left[f^{(1,0)}\left(a(t-s)-x,s\right)+f^{(1,0)}\left(x-a(t-s),s\right)\right]ds\in C(B), \tag{10}$$

где одним и двумя штрихами над функциями обозначены первая и вторая производные этих функций соответственно, а индексом (1,0) *над функцией* $f(y,s)$ *обозначена частная производная по* y.

Доказательство. **Достаточность**. Если функции f, φ и ψ удовлетворяют условиям (6), (9), то в области A единственные классические решения задачи Коши (1), (2) выражаются известной полной формулой Даламбера (4) [3]. В области B классические решения смешанной задачи (1) – (3) можно искать в виде суммы $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$ классических решений v и w следующих двух вспомогательных смешанных задач:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0,\ \{x,t\}\in G, \tag{1′}$$

$$v\big|_{t=0}=\varphi(x),\ \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=o}=\psi(x),\ 0\le x<\infty, \tag{2′}$$

$$\left.\left(\alpha(t)\frac{\partial v}{\partial t}+\beta(t)\frac{\partial v}{\partial x}+\gamma(t)v\right)\right|_{x=0}=\mu(t),\ \ 0\le t<\infty, \tag{3′}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=f(x,t),\ \{x,t\}\in G, \tag{1″}$$

$$w\big|_{t=0}=0,\ \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=o}=0,\ 0\le x<\infty, \tag{2″}$$

$$\left.\left(\alpha(t)\frac{\partial w}{\partial t}+\beta(t)\frac{\partial w}{\partial x}+\gamma(t)w\right)\right|_{x=0}=0,\ \ 0\le t<\infty. \tag{3″}$$

Для функций φ, ψ и μ, удовлетворяющих условиям (6), формула классических решений v первой вспомогательной задачи (1′) – (3′) в области B выведена в [1].

Решим вторую вспомогательную задачу (1″) – (3″) в области B. Согласно методу характеристик и методу Дюамеля общим решением уравнения (1″) в области B является

$$w(x,t)=g(x+at)+h(x-at)+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(s,\tau)ds\,d\tau,\ \ \forall g,\,h\in C^2. \tag{11}$$

Подставив выражение (11) в граничное условие (3″) и в предельное значение на характеристике $x=at$ решения

$$w(x,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(s,\tau)ds\,d\tau,\ \ \{x,t\}\in A,$$

задачи Коши (1″), (2″) в области A, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} g(2at)+h(0)=0, \\ \Bigg\{a\alpha(t)\left(g'(at)-h'(-at)+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^t\left[f\left(a(t-\tau),\tau\right)+f\left(a(\tau-t),\tau\right)\right]d\tau\right)+ \\ +\beta(t)\left(g'(at)+h'(-at)+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^t\left[f\left(a(t-\tau),\tau\right)-f\left(a(\tau-t),\tau\right)\right]d\tau\right)+ \\ +\gamma(t)\left(g(at)+h(-at)+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^t\int_{a(t-\tau)}^{a(t-\tau)}f(s,\tau)ds\,d\tau\right)\Bigg\}=0. \end{cases}$$

Из первого уравнения этой системы находим функцию

$$g(y) = -h(0), \quad \forall y \geq 0, \tag{12}$$

подставляем ее во второе уравнение этой системы и приходим к дифференциальному уравнению

$$\left(a\alpha(t) - \beta(t)\right)h'(-at) - \gamma(t)h(-at) = \frac{\alpha(t)}{2}\int_0^t \left[f\left(a(t-\tau),\tau\right) + f\left(a(\tau-t),\tau\right)\right]d\tau +$$

$$+\frac{\beta(t)}{2a}\int_0^t \left[f\left(a(t-\tau),\tau\right) - f\left(a(\tau-t),\tau\right)\right]d\tau + \gamma(t)\left(\frac{1}{2a}\int_0^t \int_{a(t-\tau)}^{a(t-\tau)} f(s,\tau)\,ds\,d\tau - h(0)\right).$$

В этом уравнении делаем замену переменной $z = -at$, умножаем обе его части на интегрирующий множитель $\exp\left\{\int_0^z \gamma\left(-\frac{s}{a}\right)\left(\beta\left(-\frac{s}{a}\right) - a\alpha\left(-\frac{s}{a}\right)\right)^{-1} ds\right\}$, интегрируем полученное дифференциальное уравнение по z и имеем функцию

$$h(z) = h(0) - \int_0^z e^{\int_z^\eta \gamma\left(-\frac{s}{a}\right)\left(\beta\left(-\frac{s}{a}\right) - a\alpha\left(-\frac{s}{a}\right)\right)^{-1} ds}\left(\beta\left(-\frac{\eta}{a}\right) - a\alpha\left(-\frac{\eta}{a}\right)\right)^{-1} \times$$

$$\times\left\{\frac{\alpha\left(-\frac{\eta}{a}\right)}{2}\int_0^{-\frac{\eta}{a}}\left[f(-\eta - a\tau,\tau) + f(\eta + a\tau,\tau)\right]d\tau + \frac{\beta\left(-\frac{\eta}{a}\right)}{2a}\int_0^{-\frac{\eta}{a}}\left[f(-\eta - a\tau,\tau) - f(\eta + a\tau,\tau)\right]d\tau +\right.$$

$$\left. + \frac{\gamma\left(-\frac{\eta}{a}\right)}{2a}\int_0^{-\frac{\eta}{a}}\int_{\mu + a\tau}^{-\eta - a\tau} f(s,\tau)\,ds\,d\tau\right\}d\eta. \tag{13}$$

Подставив найденные выражения (12), (13) функций g и h в общее решение (11), получим единственные классические решения задачи (1″) – (3″) в области B

$$w(x,t) = \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s,\tau)\,ds\,d\tau + \frac{1}{2}\int_0^{t-\frac{x}{a}} e^{\int_{t-\frac{x}{a}}^{\eta} a\gamma(s)\left(a\alpha(s) - \beta(s)\right)^{-1} ds}\left(\beta(\eta) - a\alpha(\eta)\right)^{-1} \times$$

$$\times\left\{a\alpha(\eta)\int_0^\eta \left[f\left(a(\eta-\tau),\tau\right) + f\left(a(\tau-\eta),\tau\right)\right]d\tau + \beta(\eta)\int_0^\eta \left[f\left(a(\eta-\tau),\tau\right) - f\left(a(\tau-\eta),\tau\right)\right]d\tau +\right.$$

$$\left. + \gamma(\eta)\int_0^\eta \int_{a(\tau-\eta)}^{a(\eta-\tau)} f(s,\tau)\,ds\,d\tau\right\}d\eta \in C^2(B), \tag{14}$$

если функция $f \in C(G)$ удовлетворяет условиям (9) и (10). Тогда сумма выражения (14) решений w и выражения решений v, выведенных в работе [1], дает единственные решения u_2 вида (5) в области B.

Для завершения доказательства достаточности условий (6) – (10) остается показать, что предельные значения классических решений u_1 в области A и классических решений u_2 в области B вместе со своими частными производными до второго порядка включительно совпадают на характеристике $x = at$. Этот факт непосредственно вытекает из условий (7), (8) и следующих равенств:

$$u_2\big|_{x=at} = u_1\big|_{x=at} = \frac{\varphi(2at) + \varphi(0)}{2} + \frac{1}{2a}\int_0^{2at}\psi(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{a\tau}^{2at - a\tau} f(s,\tau)\,ds\,d\tau, \tag{15}$$

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial t}\right|_{x=at} - \left.\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{x=at} = -\frac{a\left(\Upsilon_1 - \mu(0)\right)}{a\alpha(0) - \beta(0)}, \tag{16}$$

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=at} - \left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=at} = \frac{\Upsilon_1 - \mu(0)}{a\alpha(0) - \beta(0)}, \tag{17}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\right|_{x=at} - \left.\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\right|_{x=at} = \frac{a\left(a\alpha'(0)-\beta'(0)+a\gamma(0)\right)\left(\Upsilon_1-\mu(0)\right)}{\left(a\alpha(0)-\beta(0)\right)^2} - \frac{a\left(\Upsilon_2-\mu'(0)\right)}{a\alpha(0)-\beta(0)}, \tag{18}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right|_{x=at} - \left.\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right|_{x=at} = \frac{\left(a\alpha'(0)-\beta'(0)+a\gamma(0)\right)\left(\Upsilon_1-\mu(0)\right)}{a\left(a\alpha(0)-\beta(0)\right)^2} - \frac{\left(\Upsilon_2-\mu'(0)\right)}{a\left(a\alpha(0)-\beta(0)\right)}, \tag{19}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u_2}{\partial x\partial t}\right|_{x=at} - \left.\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial t}\right|_{x=at} = -\frac{\left(a\alpha'(0)-\beta'(0)+a\gamma(0)\right)\left(\Upsilon_1-\mu(0)\right)}{\left(a\alpha(0)-\beta(0)\right)^2} + \frac{\Upsilon_2-\mu'(0)}{a\alpha(0)-\beta(0)}. \tag{20}$$

Достаточность условий (6) – (10) для существования классических решений (4), (5) задачи (1) – (3) нами установлена. Их единственность обеспечивается однозначностью метода решения.

Необходимость. Если функция $u \in C^2(G)$ является решением смешанной задачи (1) – (3), то требования гладкости функций $\varphi \in C^2[0,\infty[, \psi \in C^1[0,\infty[$ и $\mu \in C^1[0,\infty[$ непосредственно вытекают из равенств (2) и (3). Кроме того, из уравнения (1) следует, что

$$f \in C(G). \tag{21}$$

Для функций $f \in C(G)$, $f \neq 0$, неоднородное уравнение (1) всегда имеет в G непрерывно дифференцируемое частное решение вида

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s,\tau)\,ds\,d\tau \in C^1(G).$$

Тогда непрерывно дифференцируемыми в G должны быть значения его косых производных вдоль характеристик $x-at=C_1$ и $x+at=C_2$, $C_1, C_2 \in R$, соответственно

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} \pm a\frac{\partial u_0}{\partial x} = \int_0^t f\left(x \pm a(t-\tau),\tau\right)d\tau \in C^1(G), \tag{22}$$

т. е. функция $f \in C(G)$ должна удовлетворять условию (9).

Чтобы убедиться в необходимости ограничения (10) в области B, надо во вторых производных $\partial^2 u_2/\partial t^2$, $\partial^2 u_2/\partial x^2$ и $\partial^2 u_2/\partial x\partial t$ решения (5) исключить непрерывные слагаемые в области B для функций f, удовлетворяющих уже установленным необходимым включениям (21), (19), и функций $\phi \in C^2[0,\infty[$, $\psi \in C^1[0,\infty[$ и $\mu \in C^1[0,\infty[$.

Наконец, необходимость условий согласования (7), (8) на правую часть f, начальные данные φ, ψ и граничное данное μ непосредственно выводятся из уравнения (1), начальных условий (2) и граничного условия (3), потому что классическое решение $u \in C^2(G)$. Теорема доказана.

Замечание. Впервые на правую часть f необходимое и достаточное условие типа включения (22), эквивалентного в силу включения (21) условию (9), было найдено В.А. Чернятиным методами разделения переменных, периодического продолжения функций и суммирования рядов для первой смешанной задачи [2]. Новое необходимое и достаточное условие (10) на функции f порождено граничным условием (3) с косой производной решения по не характеристическому направлению $\{\beta(t),\alpha(t)\}$ в плоскости переменных $\{x,t\} \in R^2$, так как $a\alpha(t) \neq \beta(t)$, $t \in [0,\infty[$. Условие (10) при $\alpha(t)=\beta(t)=0$, $t \in [0,\infty[$, также исчезает в задаче (1) – (3), как и в случае первой смешанной задачи работы [2].

1. Барановская С.Н., Юрчук Н.И. // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1188.
2. Чернятин В.А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных: Автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук (01.01.02) / Ин-т математики АН УССР. Киев, 1990.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1977.

Поступила в редакцию 08.12.10.

Федор Егорович Ломовцев – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической кибернетики.
Евгений Николаевич Новиков – студент 4-го курса механико-математического факультета.