

Д.А. НАВІЧКОВА

ДЫСКРЭТНЫ АНАЛАГ ГІПЕРГЕАМЕТРЫЧНАЙ ФУНКЦЫІ ГАЎСА

Discrete analogue of hypergeometric Gauss function is defined.

У [1] былі ўведзены колцы паслядоўнасцей $K = \{a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \mid a_n \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}_0\}$ і гіперпаслядоўнасцей $K' = \left\{ \left\{ \dots, 0, \dots, 0, a_{-m}, a_{-m+1}, \dots, \underline{a_0}, a_1, \dots \right\} \mid a_k \in \mathbb{C}, \forall k = \overline{-m, \infty}; m \in \mathbb{N}_0 \right\}$ (падкрэсліваецца элемент на нулявым месцы) са звычайнымі паэлементнымі складаннем, множаннем на скаляр і множаннем у выглядзе згорткі. Множанне на паслядоўнасць $h = \{0, 1, 0, 0, \dots\} \in K$ і гіперпаслядоўнасць $s = \{\dots, 0, 1, 0, 0, \dots\} \in K'$ задаюць адпаведна зрухі ўправа і ўлева. Элементы s і h з'яўляюцца ўзаемна адваротнымі ў колцы K' . Колца K пашыраецца да поля стасункаў $K/K = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in K \right\}$. Можна паказаць, што поле стасункаў $K/K = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in K \right\}$ супадае з K' і з'яўляецца полем адносна згорткі

$$a * b = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n-k} b_k \right\}_{n=-\infty}^{+\infty}. \quad (1)$$

На K' задаецца аперацыя алгебраічнага дыферэнцавання:

$$D: K' \rightarrow K': \begin{cases} Da = \{na_n\}_{n=0}^{\infty} * s, a \in K, \\ D \frac{a}{b} = \frac{(Da)b - a(Db)}{b^2}, \frac{a}{b} \in K'. \end{cases} \quad (2)$$

У полі K' пабудавана дыскрэтнае аперацыйнае злічэнне [1], з дапамогай якога даецца рашэнне рознасных раўнанняў з пастаяннымі і зменнымі каэфіцыентамі, якія зводзяцца да алгебраічных дыферэнцыяльных раўнанняў першага парадку.

У дадзеным артыкуле аперацыйны метад ужываецца для пабудовы дыскрэтнага аналага гіпергеаметрычнага раўнання і гіпергеаметрычнай функцыі Гаўса.

Азначэнне 1. Паслядоўнасць $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ назавем пашыранай гіперпаслядоўнасцю.

Пазначым мноства пашыраных гіперпаслядоўнасцей праз $\hat{K}$. У адрозненне ад гіперпаслядоўнасцей, пашыраныя гіперпаслядоўнасці могуць мець бясконцую колькасць ненулявых элементаў на месцах з адмоўнымі нумарамі. Відавочна, мае месца ўлучэнне $K' \subset \hat{K}$. Мноства $\hat{K}$ не з'яўляецца колцам адносна згорткі (1).

Праз $K'_- = \left\{ \left\{ \dots, a_n, \dots, a_{-1}, \underline{a_0}, \dots, a_m, 0, \dots, 0 \right\} \mid a_n \in \mathbb{C}, \forall n = \overline{-\infty, m}; m \in \mathbb{N}_0 \right\}$ пазначым мноства пашыраных гіперпаслядоўнасцей з канечнай колькасцю ненулявых элементаў на месцах з дадатнымі нумарамі, якое ўяўляе сабой «люстэркавы адбітак» колца K' . Назавем мноства K'_- люстэркавымі гіперпаслядоўнасцямі. Можна паказаць, што K'_- з'яўляецца полем адносна згорткі (1).

Аперацыя алгебраічнага дыферэнцавання задаецца на K'_- з дапамогай роўнасці

$$Da = \{na_n\}_{n=-\infty}^{\infty} * s, a \in K'_- \quad (3)$$

і валодае ўласцівасцямі, аналагічнымі (2).

Азначэнне 2. Назавем

$${}_2f_1[\alpha, \beta; \gamma] = \left\{ \dots, \frac{(\alpha)_{-n-1} (\beta)_{-n-1}}{(\gamma)_{-n-1}}, \dots, \frac{\alpha \beta}{\gamma}, 1, \underline{0}, \dots, 0, \dots \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{I}{h^{n+1}}, \quad (4)$$

дзе $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, $\gamma \neq 0, -1, -2, \dots$, $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+k-1)$, $k \in \mathbb{N}$ і $(\alpha)_0 = 1$,

$I = \{\dots, 0, \dots, 0, \underline{1}, 0, \dots, 0, \dots\}$, пашыранай гіпергеаметрычнай гіперпаслядоўнасцю.

Відавочна, ${}_2f_1[\alpha, \beta; \gamma] \in K'$. Пазначым праз

$${}_2f_1[\alpha, \beta; \gamma](n) := \frac{(\alpha)_{-n-1}(\beta)_{-n-1}}{(\gamma)_{-n-1}} \text{ элемент } {}_2f_1[\alpha, \beta; \gamma], \text{ які стаіць на } n\text{-м месцы, дзе } n = -1, -2, \dots$$

Тэарэма 1. Пашыраная гіпергеаметрычная гіперпаслядоўнасць (4) з'яўляецца развязкам наступнага раўнання:

$$(n^2 + (2 - \alpha - \beta)n + (1 + \alpha\beta - \alpha - \beta))a_n + (n + 1 - \gamma)a_{n-1} = \begin{cases} 1 - \gamma, & n = 0, \\ 0, & n = -1, -2, \dots, \end{cases} \quad (5)$$

дзе $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, $\gamma \neq 0, -1, -2, \dots$

Доказ. Формула (5) уяўляе сабой рознаскае раўнанне са зменнымі каэфіцыентамі, ад якога можна перайсці да эквівалентнага выразу ў тэрмінах пашыраных гіперпаслядоўнасцей:

$$h^2 s^2 \{n(n-1)a_n\}_{n=-\infty}^{n=+\infty} + h^2 s \{na_n\}_{n=-\infty}^{n=+\infty} + (3 - \alpha - \beta)hs \{na_n\}_{n=-\infty}^{n=+\infty} + (2 - \gamma)h \{a_n\}_{n=-\infty}^{n=+\infty} + (1 + \alpha\beta - \alpha - \beta) \{a_n\}_{n=-\infty}^{n=+\infty} = I(1 - \gamma). \quad (6)$$

Улічваючы азначэнне алгебраічнай вытворнай (3) і яе ўласцівасці, атрымаем формулу

$$D(Da) = D(s \{na_n\}_{n=-\infty}^{n=+\infty}) = -s^2 \{na_n\}_{n=-\infty}^{n=+\infty} + s^2 \{n^2 a_n\}_{n=-\infty}^{n=+\infty} = s^2 \{n(n-1)a_n\}_{n=-\infty}^{n=+\infty}. \quad (7)$$

Скарыстаўшы формулы (3) і (7), пераўтворым раўнанне (6) да дыферэнцыяльнага раўнання другога парадку ў полі K'_- :

$$h^2 D^2 a + (h^2 + (3 - \alpha - \beta)h)Da + ((2 - \gamma)h + (1 + \alpha\beta - \alpha - \beta))a = I(1 - \gamma). \quad (8)$$

Заўважым, што раўнанне выгляду (8) можна атрымаць у гіперфункцыях з дапамогай аперацыйнага злічэння Мікусінскага [2] з дыферэнцыяльнага раўнання Гаўса. Таму раўнанне (5) з'яўляецца дыскрэтным аналагам гіпергеаметрычнага раўнання Гаўса.

Пакажам, што ${}_2f_1[\alpha, \beta; \gamma] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n I}{(\gamma)_n h^{n+1}}$ дае рашэнне раўнання (5):

$$D_2 f_1[\alpha, \beta; \gamma] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n D h^{-(n+1)}}{(\gamma)_n} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n (n+1)I}{(\gamma)_n h^{n+2}}, \quad (9)$$

$$D^2 {}_2 f_1[\alpha, \beta; \gamma] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n (n+1)(n+2)I}{(\gamma)_n h^{n+3}}. \quad (10)$$

Падставім (9) і (10) у (8):

$$h^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n (n+1)(n+2)I}{(\gamma)_n h^{n+3}} - h^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n (n+1)I}{(\gamma)_n h^{n+2}} - (3 - \alpha - \beta)h \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n (n+1)I}{(\gamma)_n h^{n+2}} + (2 - \gamma)h \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n I}{(\gamma)_n h^{n+1}} + (1 + \alpha\beta - \alpha - \beta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n I}{(\gamma)_n h^{n+1}} = I(1 - \gamma),$$

што эквівалентна

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n (n+1)(n+2)I}{(\gamma)_n h^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n (n+1)I}{(\gamma)_n h^n} - (3 - \alpha - \beta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n (n+1)I}{(\gamma)_n h^{n+1}} + (2 - \gamma) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n I}{(\gamma)_n h^n} + (1 + \alpha\beta - \alpha - \beta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n I}{(\gamma)_n h^{n+1}} = I(1 - \gamma).$$

Праверым апошнюю роўнасць паэлементна: відавочна, элементы на месцах з дадатнымі нумарамі толькі нулявыя; на нулявым месцы маем $0 - 1 + 2 - \gamma = 1 - \gamma$; на $-(n+1)$ -м месцы маем

$$\frac{(\alpha)_n (\beta)_n (n+1)(n+2)}{(\gamma)_n} - \frac{(\alpha)_{n+1} (\beta)_{n+1} (n+2)}{(\gamma)_{n+1}} - (3 - \alpha - \beta) \frac{(\alpha)_n (\beta)_n (n+1)}{(\gamma)_n} + (2 - \gamma) \frac{(\alpha)_{n+1} (\beta)_{n+1}}{(\gamma)_{n+1}} + (1 + \alpha\beta - \alpha - \beta) \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \left((n+1)(n+2) - \frac{(\alpha+n)(\beta+n)(n+2)}{\gamma+n} - (3-\alpha-\beta)(n+1) + \right. \\
 &\quad \left. + (2-\gamma) \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{\gamma+n} + 1 + \alpha\beta - \alpha - \beta \right) = \\
 &= \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \left((n+1)(n+2-3+\alpha+\beta) + (2-\gamma-n-2) \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{\gamma+n} + 1 + \alpha\beta - \alpha - \beta \right) = \\
 &= \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} ((n+1)(n+\alpha+\beta-1) - (\alpha+n)(\beta+n) + 1 + \alpha\beta - \alpha - \beta) = \\
 &= \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} (n^2 + \alpha n + \beta n - n + n + \alpha + \beta - 1 - \alpha\beta - \alpha n - \beta n - n^2 + 1 + \alpha\beta - \alpha - \beta) = 0.
 \end{aligned}$$

Тэарэма даказана.

Заўважым, што раўнанне (5) не мае рашэнняў у полі K' для адвольных $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Пашыраная гіперпаслядоўнасць ${}_2f_1[\alpha, \beta; \gamma] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{I}{h^{n+1}}$ мае ўласцівасці, падобныя да ўласцівасцей

рашэння ${}_2F_1[\alpha, \beta; \gamma; z] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!}$ дыферэнцыяльнага гіпергеаметрычнага раўнання.

Укажам іх:

- ${}_2f_1[\alpha, \beta; \gamma] = {}_2f_1[\beta, \alpha; \gamma]$.
- ${}_2f_1[0, \beta; \gamma] = {}_2f_1[\alpha, 0; \gamma] = s = \{\dots, 0, \dots, 0, 1, \underline{0}, \dots, 0, \dots\}$.
- ${}_2f_1[\alpha, \beta; \gamma](k+j) = \frac{(\alpha)_{-j} (\beta)_{-j}}{(\gamma)_{-j}} {}_2f_1[\alpha-j, \beta-j; \gamma-j](k) \quad \forall j \in \mathbb{N}_0$.

Доказ. Замест доказу папярэдняй формулы дастаткова давесці, што

$$\frac{(\alpha)_{-j} (\beta)_{-j}}{(\gamma)_{-j}} \frac{(\alpha-j)_{-k-1} (\beta-j)_{-k-1}}{(\gamma-j)_{-k-1}} = \frac{(\alpha)_{-(k+j)-1} (\beta)_{-(k+j)-1}}{(\gamma)_{-(k+j)-1}}.$$

Зробім замену: $k = -n$, $j = -m$ і дакажам формулу

$$\frac{(\alpha)_m (\beta)_m (\alpha+m)_{n-1} (\beta+m)_{n-1}}{(\gamma)_m (\gamma+m)_{n-1}} = \frac{(\alpha)_{m+n-1} (\beta)_{m+n-1}}{(\gamma)_{m+n-1}}.$$

Улічваючы, што

$$(\alpha)_m (\alpha+m)_{n-1} = \alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+m-1)(\alpha+m) \cdots (\alpha+m+n-1-1) = (\alpha)_{m+n-1}, \quad (11)$$

$$\text{атрымаем } \frac{(\alpha)_m (\alpha+m)_{n-1} (\beta)_m (\beta+m)_{n-1}}{(\gamma)_m (\gamma+m)_{n-1}} = \frac{(\alpha)_{m+n-1} (\beta)_{m+n-1}}{(\gamma)_{m+n-1}}.$$

$$4. (\alpha)_m (-1)^m h^{1-m-\alpha} {}_2f_1[\alpha+m, \beta; \gamma] = D^m (h^{1-\alpha} {}_2f_1[\alpha, \beta; \gamma]) \quad \forall m \in \mathbb{N}_0, \alpha \in \mathbb{Z}.$$

Доказ. Метадам матэматычнай індукцыі па m даказваецца формула

$$D^m h^{-(n+\alpha)} = \frac{(-1)^m (n+\alpha)_m I}{h^{n+\alpha+m}}.$$

Скарыстаемся даведзенай формулай у далейшых падліках:

$$\begin{aligned}
 D^m (h^{1-\alpha} {}_2f_1[\alpha, \beta; \gamma]) &= D^m \left(h^{1-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{I}{h^{n+1}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{D^m h^{-(n+\alpha)}}{h^{n+1}} = \\
 &= (-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (n+\alpha)_m (\beta)_n}{(\gamma)_n h^{n+\alpha+m}} = (-1)^m h^{1-(\alpha+m)} (\alpha)_m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha+m)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n h^{n+1}} = (\alpha)_m (-1)^m h^{1-m-\alpha} {}_2f_1[\alpha+m, \beta; \gamma].
 \end{aligned}$$

$$5. D^m (h^{1-\gamma} {}_2f_1[\alpha, \beta; \gamma+m]) = (\gamma)_m (-1)^m h^{1-m-\gamma} {}_2f_1[\alpha, \beta; \gamma] \quad \forall m \in \mathbb{N}_0, \gamma \in \mathbb{N}.$$

Доказ. З улікам формулы (11) атрымаем: $\frac{(\gamma+n)_m}{(\gamma+m)_n} = \frac{(\gamma)_m}{(\gamma)_n}$.

Скарыстаемся гэтым у наступных пераўтварэннях:

$$\begin{aligned} D^m \left(h^{1-\gamma} {}_2f_1[\alpha, \beta; \gamma+m] \right) &= D^m \left(h^{1-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma+m)_n} \frac{I}{h^{n+1}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n D^m h^{-(n+\gamma)}}{(\gamma+m)_n} = \\ &= (-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n (n+\gamma)_m}{(\gamma+m)_n h^{n+\gamma+m}} = (-1)^m h^{1-(\gamma+m)} (\gamma)_m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n h^{n+1}} = \\ &= (\gamma)_m (-1)^m h^{1-m-\gamma} {}_2f_1[\alpha, \beta; \gamma], \text{ што і трэба даказаць.} \end{aligned}$$

Азначэнне 3. Па аналогіі з [3] назавем пашыраныя гіперпаслядоўнасці ${}_2f_1[\alpha \pm 1, \beta; \gamma]$, ${}_2f_1[\alpha, \beta \pm 1; \gamma]$, ${}_2f_1[\alpha, \beta; \gamma \pm 1]$ сумежнымі з пашыранай гіпергеаметрычнай гіперпаслядоўнасцю ${}_2f_1[\alpha, \beta; \gamma]$.

Можна паказаць, што маюць месца дыскрэтныя аналагі суадносінаў Гаўса [3] для сумежных пашыраных гіперпаслядоўнасцей:

- $\gamma {}_2f_1[\alpha, \beta-1; \gamma] - (\alpha-\beta) D_2 f_1[\alpha, \beta; \gamma+1] - \gamma {}_2f_1[\alpha-1, \beta; \gamma] = 0;$
- $(\gamma-\alpha) {}_2f_1[\alpha-1, \beta; \gamma] + (2\alpha-\gamma) {}_2f_1[\alpha, \beta; \gamma] - (\beta-\alpha) D_2 f_1[\alpha, \beta; \gamma] - \alpha D_2 f_1[\alpha+1, \beta; \gamma] - \alpha {}_2f_1[\alpha+1, \beta; \gamma] = 0;$
- $(\gamma-\beta) {}_2f_1[\alpha, \beta-1; \gamma] + (2\beta-\gamma) {}_2f_1[\alpha, \beta; \gamma] - (\alpha-\beta) D_2 f_1[\alpha, \beta; \gamma] - \beta D_2 f_1[\alpha, \beta+1; \gamma] - \beta {}_2f_1[\alpha, \beta+1; \gamma] = 0;$
- $\gamma(\gamma-1) D_2 f_1[\alpha, \beta; \gamma-1] + \gamma(\gamma-1) {}_2f_1[\alpha, \beta; \gamma-1] - \gamma(\gamma-1) {}_2f_1[\alpha, \beta; \gamma] - \gamma(2\gamma-\alpha-\beta-1) D_2 f_1[\alpha, \beta; \gamma] +$
 $+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) D_2 f_1[\alpha, \beta; \gamma+1] = 0, \quad \gamma \neq 1;$
- $(\beta-\alpha) {}_2f_1[\alpha, \beta; \gamma] + \alpha {}_2f_1[\alpha+1, \beta; \gamma] - \beta {}_2f_1[\alpha, \beta+1; \gamma] = 0;$
- $(\gamma-\alpha-\beta) {}_2f_1[\alpha, \beta; \gamma] + \alpha {}_2f_1[\alpha+1, \beta; \gamma] + \alpha D_2 f_1[\alpha+1, \beta; \gamma] - (\gamma-\beta) {}_2f_1[\alpha, \beta-1; \gamma] = 0;$
- $\gamma\alpha {}_2f_1[\alpha, \beta; \gamma] + \gamma(\gamma-\beta) D_2 f_1[\alpha, \beta; \gamma] - \alpha\gamma {}_2f_1[\alpha+1, \beta; \gamma] - \alpha\gamma D_2 f_1[\alpha+1, \beta; \gamma] - (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) D_2 f_1[\alpha, \beta; \gamma+1] = 0;$
- $(\gamma-\alpha-1) {}_2f_1[\alpha, \beta; \gamma] + \alpha {}_2f_1[\alpha+1, \beta; \gamma] - (\gamma-1) {}_2f_1[\alpha, \beta; \gamma-1] = 0, \quad \gamma \neq 1;$
- $(\gamma-\alpha-\beta) {}_2f_1[\alpha, \beta; \gamma] - (\gamma-\alpha) {}_2f_1[\alpha-1, \beta; \gamma] + \beta {}_2f_1[\alpha, \beta+1; \gamma] + \beta D_2 f_1[\alpha, \beta+1; \gamma] = 0;$
- $(\beta-\alpha) {}_2f_1[\alpha, \beta; \gamma] + (\beta-\alpha) D_2 f_1[\alpha, \beta; \gamma] - (\gamma-\alpha) {}_2f_1[\alpha-1, \beta; \gamma] + (\gamma-\beta) {}_2f_1[\alpha, \beta-1; \gamma] = 0;$
- $\gamma {}_2f_1[\alpha, \beta; \gamma] + \gamma D_2 f_1[\alpha, \beta; \gamma] - \gamma {}_2f_1[\alpha-1, \beta; \gamma] - (\gamma-\beta) D_2 f_1[\alpha, \beta; \gamma+1] = 0;$
- $(\alpha-1) {}_2f_1[\alpha, \beta; \gamma] + (\gamma-\beta-1) D_2 f_1[\alpha, \beta; \gamma] + (\gamma-\alpha) {}_2f_1[\alpha-1, \beta; \gamma] -$
 $-(\gamma-1) {}_2f_1[\alpha, \beta; \gamma-1] - (\gamma-1) D_2 f_1[\alpha, \beta; \gamma-1] = 0, \quad \gamma \neq 1;$
- $\gamma\beta {}_2f_1[\alpha, \beta; \gamma] + \gamma(\gamma-\alpha) D_2 f_1[\alpha, \beta; \gamma] - \beta\gamma {}_2f_1[\alpha, \beta+1; \gamma] - \beta\gamma D_2 f_1[\alpha, \beta+1; \gamma] - (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) D_2 f_1[\alpha, \beta; \gamma+1] = 0;$
- $(\gamma-\beta-1) {}_2f_1[\alpha, \beta; \gamma] + \beta {}_2f_1[\alpha, \beta+1; \gamma] - (\gamma-1) {}_2f_1[\alpha, \beta; \gamma-1] = 0, \quad \gamma \neq 1;$
- $\gamma {}_2f_1[\alpha, \beta; \gamma] + \gamma D_2 f_1[\alpha, \beta; \gamma] - \gamma {}_2f_1[\alpha, \beta-1; \gamma] - (\gamma-\alpha) D_2 f_1[\alpha, \beta; \gamma+1] = 0;$
- $(\beta-1) {}_2f_1[\alpha, \beta; \gamma] + (\gamma-\alpha-1) D_2 f_1[\alpha, \beta; \gamma] + (\gamma-\beta) {}_2f_1[\alpha, \beta-1; \gamma] -$
 $-(\gamma-1) {}_2f_1[\alpha, \beta; \gamma-1] - (\gamma-1) D_2 f_1[\alpha, \beta; \gamma-1] = 0, \quad \gamma \neq 1.$

1. Васільеў І.Л., Навічкова Д.А. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2010. № 3.

2. Иосида К. Операционное исчисление: Теория гиперфункций / Пер. с англ. В.И. Машанова, Я.В. Радыно; Под ред. Я.В. Радыно. Мн., 1989.

3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: в 3 т. Т. 1. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М., 1973.

Паступіў у рэдакцыю 10.03.11.

Дар'я Аляксандраўна Навічкова – аспірант кафедры тэорыі функцый. Навуковы кіраўнік – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры тэорыі функцый І.Л. Васільеў.