

$X \times C_{\text{inf}}(X, Y) \xrightarrow{E} Y : (x, f) \rightarrow f(x)$ ($C_{\text{inf}}(X, Y)$ – пространство $C(X, Y)$ с топологией $\tau_{\text{inf}}^{(X, Y)}$). Такого рода исследования были начаты в работах Аренса и Дугунджи [5, 6] и в настоящее время активно продолжаются (см., например, [7–9]). Интерес к допустимым топологиям на $C(X, Y)$ объясняется следующим фактом. Как было показано еще в работе [6], непрерывность отображения вычисления $E : X \times C_{\tau}(X, Y) \rightarrow Y$ ($C_{\tau}(X, Y)$ – пространство $C(X, Y)$ с топологией τ) равносильна тому, что для любых пространства Z и непрерывного отображения $Z \xrightarrow{g} C_{\tau}(X, Y) : z \rightarrow f_z(x)$ непрерывным является и отображение $F(x, z) = f_z(x)$ (т. е. $F \in C(X \times Z, Y)$). Последнее означает, что необходимым условием непрерывной зависимости семейства отображений $\{f_z \mid z \in Z\}$ от параметра z является непрерывность отображения $F(x, z)$, заданного на произведении $X \times Z$. Известно также (см., например, [10, с. 390]), что любая топология равномерной сходимости $\tau_{\mu}^{(X, Y)}$ допустима. Однако при переходе от топологий вида $\tau_{\mu}^{(X, Y)}$ к топологии $\tau_{\text{inf}}^{(X, Y)}$ допустимость топологии может не сохраниться.

В предлагаемой статье устанавливаются некоторые необходимые и достаточные условия непрерывности отображения вычисления $X \times C_{\text{inf}}(X, Y) \xrightarrow{E} Y$, в частности, показано, что достаточным, а также (при некоторых дополнительных ограничениях) и необходимым условием непрерывности E является выполнение условия (*): при любом выборе точки $x \in X$ и отображения $f \in C(X, Y)$ можно указать окрестности $U \ni x$ и $V \ni f$ ($V \in \tau_{\text{inf}}^{(X, Y)}$) такие, что замыкание $[g(U)]_Y$ множества $g(U)$ компактно для любого отображения $g \in V$.

Были получены следующие основные результаты:

1) (Теорема 3.1). Если пространство $C_{\text{inf}}(X, Y)$ удовлетворяет условию (*) (определение 2.6), то отображение E непрерывно.

2) (Теорема 3.2). Если при локально транзитивно подвижном (определение 2.1) и DC-связанном (определение 2.2) пространстве Y отображение E непрерывно на $X \times C_{\text{inf}}(X, Y)$, то для пространства $C_{\text{inf}}(X, Y)$ выполняется условие (*).

3) (Теорема 3.3). Для того чтобы пространство $C_{\text{inf}}(X, Y)$ удовлетворяло условию (*), достаточно, а в случае, когда X вполне регулярно, а Y локально линейно связно, и необходимо выполнение хотя бы одного из условий: (а) X локально псевдокомпактно, (б) Y локально компактно.

1. Основные понятия и обозначения. Они те же, что и в работах [1–4]. Напомним лишь некоторые. Для произвольных пространства X , множества $A \subset X$ и точки $x \in X$ обозначим: τ_X и ϕ_X – топология и соответственно семейство всех замкнутых множеств в X , $\tau_X(A) = \{U \in \tau_X \mid U \supset A\}$ ($\tau_X(x)$ при $A = \{x\}$), $[A]_X$ – замыкание множества A в X . Если ρ – допустимая (т. е. задающая топологию τ_X) метрика на X , $\varepsilon > 0$, то $B_{\rho}(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid \rho(x, y) < \varepsilon\}$, $B_{\rho}(A, \varepsilon) = \bigcup \{B_{\rho}(a, \varepsilon) \mid a \in A\}$. Пространство X называют коллективно нормальным [10, с. 452], если любое дискретное в X семейство $\{F_t \in \phi_X \mid t \in T\}$ допускает дискретное в X семейство окрестностей $\{U_t \in \tau_X(F_t) \mid t \in T\}$. Каждый паракомпакт, в частности любое метризуемое пространство, коллективно нормальны [10, с. 453]. Скажем, что пространство X псевдокомпактно, если любое дискретное в X семейство непустых открытых в X множеств конечно. Для вполне регулярного X это определение совпадает с общепринятым [10, с. 310]. Отметим, что счетно компактность влечет псевдокомпактность, а в классе нормальных пространств верно и обратное [10, с. 310], и что псевдокомпактность сохраняется при непрерывных отображениях. Ясно также, что если пространство X псевдокомпактно, то псевдокомпактно и любое множество вида $[U]_X$, где $U \in \tau_X$. Наконец, назовем X локально псевдокомпактным, если для любой точки $x \in X$ найдется окрестность $U \in \tau_X(x)$, для которой $[U]_X$ псевдокомпактно.

2. Предварительные рассуждения.

2.1. Определение [4]. Пару (U, V) открытых в X множеств назовем отмеченной, если $\emptyset \neq V \subset U$ и для любой упорядоченной пары (x, y) точек множества V найдется отображение $f \in C(X, X)$, для которого $f(U) \subset U$, $f(z) = z$ при $z \in X \setminus U$ и $f(x) = y$. Скажем, что пространство X локально транзитивно подвижное, если для любых точки $x \in X$ и окрестности $U \in \tau_X(x)$ можно подобрать окрестность $V \in \tau_X(x)$ так, чтобы пара (U, V) была отмеченной.

2.2. Определение [4]. Пространство X назовем ДС-связанным, если для любых бесконечных дизъюнктивных и дискретных в X множеств A и B найдется дискретное в X семейство связных компактных множеств F_n , $n \in \mathbb{N}$, причем $F_n \cap A \neq \emptyset$, $F_n \cap B \neq \emptyset$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

2.3. Лемма [4]. Если пространство X локально транзитивно подвижное, то для любых непустого компактного связного множества $F \subset X$ и окрестности $U \in \tau_X(F)$ можно указать окрестность $V \in \tau_X(F)$ такую, что пара (U, V) отмеченная.

2.4. Лемма [4]. Пусть пространство X метризуемо. Тогда для любых дискретного в X семейства непустых множеств $F_n \in \Phi_X$, $n \in \mathbb{N}$, и последовательности чисел $\varepsilon_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, найдется допустимая метрика σ на X такая, что $\sigma(x, y) < \varepsilon_n$ при $\{x, y\} \subset F_n$, $n \in \mathbb{N}$.

На множестве $C(X, Y)$ зададим некоторую топологию τ . Полученное пространство обозначим $C_\tau(X, Y)$.

2.5. Определение ([5, 6], см. также [10, с. 177]). Отображение $E: X \times C_\tau(X, Y) \rightarrow Y$, определенное формулой $E(x, f) = f(x)$, называют отображением вычисления. В случае, когда E непрерывно, топологию τ называют допустимой.

2.6. Определение. Скажем, что пространство $C_\tau(X, Y)$ удовлетворяет условию (*), если при любом выборе точки $x \in X$ и отображения $f \in C(X, Y)$ можно указать окрестности $U \in \tau_X(x)$ и $V \in \tau(f)$ такие, что множество $[g(U)]_Y$ компактно для любого отображения $g \in V$.

Далее рассматривается множество $C(X, Y)$ с метризуемым пространством Y , Ω_Y – множество всех допустимых метрик на Y . Для каждой метрики $\rho \in \Omega_Y$ на $C(X, Y)$ определены метрика равномерной сходимости $\mu = \mu(\rho)$, $\mu(f, g) = \sup\{\rho(f(x), g(x)) \mid x \in X\}$, и соответствующая топология равномерной сходимости $\tau_\mu^{(X, Y)}$ (здесь допускается равенство $\mu(f, g) = \infty$, что, очевидно, не влияет на топологию). Кроме того, на $C(X, Y)$ определена инфимальная топология $\tau_{\inf}^{(X, Y)} = \bigcap \{\tau_\mu^{(X, Y)} \mid \mu = \mu(\rho), \rho \in \Omega_Y\}$ [4]. Пространство $C(X, Y)$ с топологией $\tau_{\inf}^{(X, Y)}$ обозначим $C_{\inf}(X, Y)$.

2.7. Лемма. Пусть $\emptyset \neq A \subset X$, $\emptyset \neq V \in \tau_{\inf}^{(X, Y)}$, $\emptyset \neq W \in \tau_Y$ и множество $[f(A)]_Y$ компактно для любого отображения $f \in V$. Тогда множество $\langle A; V; W \rangle = \{f \in V \mid [f(A)]_Y \subset W\}$ открыто в пространстве $C_{\inf}(X, Y)$.

Доказательство. Фиксируем произвольную метрику $\rho \in \Omega_Y$ и соответствующую $\mu = \mu(\rho)$. Пусть $f_0 \in \langle A; V; W \rangle$. Тогда найдется $\varepsilon > 0$, при котором $B_\mu(f_0, \varepsilon) \subset V$ и $B_\rho([f_0(A)]_Y, \varepsilon) \subset W$. Рассмотрим произвольные отображение $f \in B_\mu(f_0, \frac{\varepsilon}{3})$ и точку $y \in [f(A)]_Y$. Подберем точку $z \in f(A)$, $z = f(a)$, $a \in A$, такую, что $\rho(y, z) < \frac{\varepsilon}{3}$. Ясно, что $\rho(y, f_0(a)) \leq \rho(y, f(a)) + \rho(f(a), f_0(a)) < \frac{2\varepsilon}{3}$, откуда $y \in B_\rho(f_0(a), \varepsilon) \subset B_\rho([f_0(A)]_Y, \varepsilon)$, и, следовательно, $[f(A)]_Y \subset B_\rho([f_0(A)]_Y, \varepsilon) \subset W$. Но тогда $f \in \langle A; V; W \rangle$. Итак, показано, что $B_\mu(f_0, \frac{\varepsilon}{3}) \subset \langle A; V; W \rangle$, что влечет открытость $\langle A; V; W \rangle$ в топологии $\tau_\mu^{(X, Y)}$. В силу произвольности выбора ρ , очевидно, $\langle A; V; W \rangle \in \tau_{\inf}^{(X, Y)}$. Лемма доказана.

3. Основные результаты.

3.1. Теорема. Если пространство $C_{\inf}(X, Y)$ удовлетворяет условию (*), то отображение E непрерывно.

Доказательство. Фиксируем произвольные $x_0 \in X$, $f_0 \in C(X, Y)$ и $W_0 \in \tau_Y(y_0)$, где $y_0 = f_0(x_0)$, и подберем $U_0 \in \tau_X(x_0)$ и $V_0 \in \tau_{\inf}^{(X, Y)}(f_0)$ так, чтобы множество $[g(U_0)]_Y$ было компактно для любого $g \in V_0$, и, кроме того, $[f_0(U_0)]_Y \subset W_0$. Обозначим $H_0 = \langle U_0; V_0; W_0 \rangle$. По лемме 2.7 $H_0 \in \tau_{\inf}^{(X, Y)}(f_0)$. Несложная проверка соотношения $E(U_0 \times H_0) \subset W_0$ завершает доказательство.

Обращение теоремы 3.1 докажем при некоторых дополнительных ограничениях.

3.2. Теорема. Если при локально транзитивно подвижном и ДС-связанном пространстве Y отображение E непрерывно на $X \times C_{\inf}(X, Y)$, то для пространства $C_{\inf}(X, Y)$ выполняется условие (*).

Доказательство. Допустим от противного существование точки $x_0 \in X$ и отображения $f_0 \in C(X, Y)$ таких, что для любых окрестностей $U \in \tau_X(x_0)$ и $V \in \tau_{\inf}^{(X, Y)}(f_0)$ можно выбрать отображение $g \in V$, для которого множество $[g(U)]_Y$ не компактно. Фиксируем дискретное в Y бесконечное множество $P \subset Y \setminus \{y_0\}$, где $y_0 = f_0(x_0)$, и окрестность $W_0 \in \tau_Y(y_0)$, $W_0 \cap P = \emptyset$. Непрерывность E позволяет выбрать окрестности $U_0 \in \tau_X(x_0)$ и $V_0 \in \tau_{\inf}^{(X, Y)}(f_0)$ так, чтобы $E(U_0 \times V_0) \subset W_0$. По допущению существует отображение $g \in V_0$, для которого множество $[g(U_0)]_Y$ не компактно и, следовательно, содержит бесконечное дискретное в Y множество T . Коллективная нормальность пространства Y влечет существование дискретного в Y семейства окрестностей $G_t \in \tau_Y(t)$, $t \in T$. Выбирая точки $b_t \in G_t \cap [g(U_0)]_Y$, получим бесконечное дискретное в Y множество $B \subset [g(U_0)]_Y$. ДС-связанность пространства Y позволяет указать дискретное в Y семейство связных компактов F_n , $n \in \mathbb{N}$, и точки $p_n \in F_n \cap P$ и $b_n \in F_n \cap B$, $b_n = g(a_n)$, $a_n \in U_0$. Раздуем компакты F_n до дискретного в Y семейства окрестностей $H_n \in \tau_Y(F_n)$, затем подберем окрестности $Q_n \in \tau_Y(F_n)$, $[Q_n]_Y \subset H_n$, и, используя лемму 2.3, отображения $h_n \in C(Y, Y)$, $h_n(Q_n) \subset Q_n$, $h_n(y) = y$ при $y \in Y \setminus Q_n$ и $h_n(b_n) = p_n$. Далее обозначим $g_n = h_n \circ g$. По лемме 2.4 найдется метрика $\sigma \in \Omega_Y$, для которой $\sigma(y, z) < \frac{1}{n}$ при $\{y, z\} \subset [Q_n]_Y$. Очевидно, $\sigma(g(x), g_n(x)) < \frac{1}{n}$ для любой точки $x \in X$, откуда $\mu(g, g_n) \leq \frac{1}{n}$, где $\mu = \mu(\sigma)$. Поскольку $B_\mu(g, \frac{\varepsilon}{m}) \subset V_0$ при некотором $m \in \mathbb{N}$, получаем $g_m \in V_0$, но тогда $g_m(U_0) \subset E(U_0 \times V_0) \subset W_0$. Однако $g_m(a_m) = h_m(g(a_m)) = h_m(b_m) = p_m \notin W_0$. Получаем противоречие, что завершает доказательство.

3.3. Теорема. Для того чтобы пространство $C_{\inf}(X, Y)$ удовлетворяло условию (*), достаточно, а в случае, когда X вполне регулярно, а Y локально линейно связно, и необходимо выполнение хотя бы одного из условий: (а) X локально псевдокомпактно, (б) Y локально компактно.

Доказательство. Достаточность (а) очевидна. Покажем достаточность (б). Фиксируем произвольные $x_0 \in X$ и $f_0 \in C(X, Y)$ и выберем окрестность W_0 точки $y_0 = f_0(x_0)$, для которой замыкание $[W_0]_Y$ компактно. Подберем окрестность $U_0 \in \tau_X(x_0)$ так, чтобы $[f_0(U_0)]_Y \subset W_0$ и рассмотрим множество $H_0 = \{f \in C(X, Y) \mid [f(U_0)]_Y \subset W_0\}$. Очевидно, $f_0 \in H_0$ и множество $[f(U_0)]_Y$ компактно для любого $f \in H_0$. Остается показать, что $H_0 \in \tau_{\inf}^{(X, Y)}$. Для произвольных метрики $\rho \in \Omega_Y$ и отображения $g_0 \in H_0$ найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $B_\rho([g_0(U_0)]_Y, \varepsilon) \subset W_0$. Рассуждая как при доказательстве леммы 2.7, покажем, что если $g \in B_\mu(g_0, \frac{\varepsilon}{3})$, где $\mu = \mu(\rho)$, то $[g(U_0)]_Y \subset B_\rho([g_0(U_0)]_Y, \varepsilon) \subset W_0$, откуда следует включение $B_\mu(g_0, \frac{\varepsilon}{3}) \subset H_0$. Показав таким образом, что $H_0 \in \tau_{\mu}^{(X, Y)}$, мы получаем фактически $H_0 \in \tau_{\inf}^{(X, Y)}$. Достаточность (б) доказана.

Необходимость докажем, допустив от противного, что ни (а), ни (б) не выполняются. Тогда найдутся точки $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$ такие, что $[U]_X$ не псевдокомпактно и $[W]_Y$ не компактно при любом выборе окрестностей $U \in \tau_X(x_0)$ и $W \in \tau_Y(y_0)$. Рассмотрим отображение $f_0 \in C(X, Y)$, $f_0(X) = \{y_0\}$, и подберем окрестности $U_0 \in \tau_X(x_0)$ и $V_0 \in \tau_{\inf}^{(X, Y)}(f_0)$ так, чтобы $[f(U_0)]_Y$ было компактно для любого $f \in V_0$. Далее фиксируем некоторую метрику $\rho \in \Omega_Y$ и выберем: $\varepsilon > 0$ так, чтобы $B_\mu(f_0, \varepsilon) \subset V_0$, где $\mu = \mu(\rho)$; линейно связную окрестность $W \in \tau_Y(y_0)$, $W \subset B_\rho(y_0, \frac{\varepsilon}{2})$; дискретное в Y множество $\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset W$; наконец, дискретное в X семейство непустых множеств $U_n \in \tau_X$, $n \in \mathbb{N}$, $U_n \subset U_0$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ фиксируем точку $a_n \in U_n$ и зададим функцию $h_n \in C(X, I)$, где $I = [0, 1]$, $h_n(a_n) = 1$, $h_n(x) = 0$ при $x \in X \setminus U_n$, а также отображение $\varphi_n \in C(I, W)$, $\varphi_n(0) = y_0$, $\varphi_n(1) = b_n$, затем положим $f_n = \varphi_n \circ h_n$. Рассмотрим отображение $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = f_n(x)$ при $x \in U_n$,

$f_n(x) = y_0$ при $x \in X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. В силу дискретности семейства $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ отображение f непрерывно. Несложно также проверить, что $f \in V_0$, но $f(U_0) \supset \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, и, следовательно, $[f(U_0)]_Y$ не компактно. Пришли к противоречию. Теорема доказана.

Следующая теорема показывает, что инфимальная топология может оставаться допустимой при достаточном «удалении» от класса метризуемых пространств.

3.4. Теорема. Отображение E непрерывно, если для пространств X и $C_{\inf}(X, Y)$ выполняется первая аксиома счетности.

Доказательство. От противного предположим, что E разрывно в точке $(x_0, f_0) \in X \times C_{\inf}(X, Y)$, т. е. существует окрестность W_0 точки $y_0 = f_0(x_0)$ такая, что $E(U \times V) \not\subset W_0$ для любых окрестностей $U \in \tau_X(x_0)$, $V \in \tau_{\inf}^{(X, Y)}(f_0)$. Выберем окрестность $U_0 \in \tau_X(x_0)$, для которой $f_0(U_0) \subset W_0$, и фиксируем локальные базы $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $\{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ точки x_0 и отображения f_0 соответственно, $U_0 \supset U_n \supset U_{n+1}$, $V_n \supset V_{n+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. По предположению можно указать точки $x_n \in U_n$ и отображения $f_n \in V_n$ так, чтобы $f_n(x_n) \notin W_0$ при каждом $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим компактное множество $F = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$ и множество $H_0 = \{f \in C(X, Y) \mid f(F) \subset W_0\}$. Очевидно, $f_0 \in H_0$ и H_0 открыто в компактно открытой топологии [10, с. 243]. Поскольку последняя содержится в любой топологии вида $\tau_{\mu}^{(X, Y)}$ [10, с. 390], она содержится и в $\tau_{\inf}^{(X, Y)}$. Но тогда $H_0 \in \tau_{\inf}^{(X, Y)}$, и, следовательно, $H_0 \supset V_m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. С одной стороны, $E(F \times V_m) \subset E(F \times H_0) \subset W_0$. С другой – $E(F \times V_m) \ni E(x_m, f_m) = f_m(x_m)$, а $f_m(x_m) \notin W_0$. Получили противоречие. Теорема доказана.

1. Тимохович В.Л., Фролова Д.С. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2009. № 3. С. 84.

2. Кукрак Г.О., Тимохович В.Л. // Там же. 2010. № 1. С. 144.

3. Фролова Д.С. // Там же. 2011. № 1. С. 116.

4. Тимохович В.Л., Фролова Д.С. // Там же. № 2. С. 136.

5. Arens R. // Annals of Math. 47. 1946. P. 480.

6. Arens R., Dugundji J. // Pacific J. Math. 1. 1951. P. 5.

7. McCoy R., Ntantu I. Topological Properties of Spaces of Continuous Functions. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 1988. Vol. 1315.

8. Escardo M.H., Heckmann R. // Topology Proceedings 26. 2001–2002. № 2. P. 545.

9. Georgiou D.N., Iliadis S.D., Mynard F. Function space topologies. Open Problems in Topology II by Elliott Pearl. Elsevier. 2007. P. 15.

10. Энгелькинг Р. Общая топология. М., 1986.

Поступила в редакцию 13.04.11.

Владимир Леонидович Тимохович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики.

Дарья Сергеевна Фролова – аспирант кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики. Научный руководитель – В.Л. Тимохович.