ВЗАИМОСВЯЗЬ ШКОЛЬНЫХ КУРСОВ СТОХАСТИКИ И ГЕОМЕТРИИ

М. И. Жалдак, Г. А. Михалин

Национальный педагогический университет имени М. П. Драгоманова
Киев, Украина

Согласно пособию А. В. Погорелова по геометрии для 7–9 классов средней школы, каждую геометрическую фигуру можно представить составленной из точек [1, с. 3], то есть как множество точек. Объединение нескольких геометрических фигур снова есть геометрическая фигура [1, с. 3], то есть множество точек.

В теории вероятностей случайное событие A рассматривается как некоторое подмножество множества элементарных событий, принадлежащее некоторой совокупности S подмножеств множества Ω, удовлетворяющей требованиям:

1_s) $\Omega \in S$,

2_s) если $A \in S$, то и $\overline{A} \in S$,

3_s) если $A_i \in S$, $i = 1, 2, \ldots$, то и $\bigcup_i A_i \in S$,

то есть некоторой σ-алгебре S подмножеств множества Ω, на которой задана числовая функция $P(A)$, $A \in S$, удовлетворяющая требованиям:

1_p) $P(A) \geq 0$,

2_p) $P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i)$, $A_i A_j = \varnothing$, $A_i \in S$, (свойство аддитивности),

3_p) $P(\Omega) = 1$.

Тройка объектов (Ω, S, P) называется вероятностным пространством.

Если функция $P(A)$, $A \in S$, удовлетворяет только требованиям 1_p, 2_p, тогда она называется мерой. Если же функция $P(A)$, $A \in S$, удовлетворяет еще и требованию 3_p, тогда она называется вероятной мерой или просто вероятностью [3, 4].

Система требований $1_s – 3_s$, $1_p – 3_p$ называется системой аксиом А. Н. Колмогорова.

Только после построения вероятностного пространства (Ω, S, P) можно окончательно сказать, какие именно подмножества множества Ω рассматриваются как события, а именно: элементы множества Ω называются элементарными событиями, элементы совокупности S называются событиями, числа $P(A)$, $A \in S$, называются вероятностями событий A, $A \in S$.

Примерами мер могут быть количества элементов в конечных множествах и их объединениях, количество попаданий во множества и их объединения при бросании n раз точки во множество, длины отрезков и их объединений, площади плоских областей и их объединений, объемы тел и их объединений, массы тел и их объединений и т. д.

Напомним, что в соответствии с пособием [1] А. В. Погорелова для 7–9 классов [1, с. 7]:

1) каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля;

2) длина отрезка равна сумме длин его частей, на которые он делится любой его точкой (и таким образом любыми его точками, так как любую часть отрезка любой его точкой опять можно поделить на части).

Таким образом, длина есть функцией от множеств точек (отрезков), которая удовлетворяет требованием 1_p, 2_p, что есть мерой, заданной на совокупности отрезков и их объединений.

В соответствии с [1, с. 11, 14]:

1) каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля;
2) градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он делится любым лучом, проходящим между его сторонами (и таким образом любыми лучами, проходящими между его сторонами, так как любую часть угла любым его внутренним лучом опять можно поделить на части);
3) градусная мера развернутого угла равна 180°.

Таким образом, градусная мера угла есть мера, заданная на совокупности углов (с общей вершиной) и их объединений.

В соответствии с [1, с. 191] (для простых фигур):

1) площадь – это положительная величина;
2) если фигура делится на части, являющиеся простыми фигурами, то площадь фигуры равна сумме площадей ее частей;
3) площадь квадрата со стороной, равной единице измерения, равна единице.

Таким образом, площадь простой фигуры – мера, заданная на совокупности простых фигур и их объединений.

Следует заметить, что не каждому множеству точек из отрезка можно приписать длину, и не каждому множеству точек на плоскости (фигуре) можно приписать площадь.

В соответствии с [1, с. 201] фигура имеет площадь G, если существуют простые фигуры, входящие в данную, с площадями, как угодно мало отличающимися от G.

То же касается объемов тел – см. учебник А. В. Погорелова по геометрии для 10–11 классов [2, с. 107].

Аналогично количество элементов $k(A)$ в конечном множестве A величина неотрицательная и такая, что если множество A поделить на части A_i, $i=\overline{1,m}$, не имеющие общих точек, то количество точек во множестве A будет равно сумме количеств точек во множествах A_i, то есть $k(A)=\sum_{i=1}^{m}k(A_i)$, $A=\bigcup_{i=1}^{m}A_i$, $A_iA_j=\varnothing$, когда $i\neq j$. Так как удовлетворяются требования $1p$, $2p$, то $k(A)$ – мера, заданная на некоторой совокупности множеств вида A_i и их объединений. Если из некоторого множества Ω наугад одна за одной выбирается n точек, а $k_n(A)$ – количество таких точек, которые попали во множество $A\subset\Omega$, тогда если A поделить на m частей A_i, не имеющих общих точек, то есть $A=\bigcup_{i=1}^{m}A_i$, $A_iA_j=\varnothing$, когда $i\neq j$, то очевидно $k_n(A)=\sum_{i=1}^{m}k_n(A_i)$. При этом $k_n(\Omega)=n$. Поскольку удовлетворяются требования $1p$, $2p$, то $k_n(A)$ – мера, заданная на некоторой совокупности S подмножеств множества Ω, удовлетворяющей требованиям 1_s-3_s. При этом $A\in S$, $A_i\in S$ для всех $i=\overline{1,m}$. Если на совокупности S подмножеств множества Ω, удовлетворяющей требованиям $1_s - 3_s$, задана мера $m(A)$, $A \in S$, и при этом положить $P(A) = \dfrac{m(A)}{m(\Omega)}$, $A \in S$, то мера $P(A)$ окажется вероятностной.

Это один из примеров задания вероятностной меры на совокупности S измеримых по мере m подмножеств множества Ω (или распределения вероятностей на множества Ω). Примерами могут быть так называемая «классическая схема» задания вероятностей меры (равномерное распределение вероятностей на конечном множестве), геометрически заданные вероятности (равномерное распределение вероятностей на измеримых непрерывных ограниченных множествах), статистические вероятности (относительные частоты) $P_n^*(A) = \dfrac{k_n(A)}{k_n(\Omega)} = \dfrac{k_n(A)}{n}$, где n – число проведенных испытаний, $k_n(A)$ – число попаданий во множество A в этой серии из n испытаний.

Приведенное задание вероятностной меры $P(A) = \dfrac{m(A)}{m(\Omega)}$ есть только одним из примеров задания вероятностной меры и не может быть определением вероятности, так как можно привести множество других примеров как задания пространств S событий, так и задания вероятностных мер $P(A)$, $A \in S$, на таких пространствах событий.

В связи с этим следует подчеркнуть, что так называемые «классическое определение вероятностей», «геометрическое определение вероятностей», «механическое определение вероятностей» и им подобные являются некорректными. Можно привести примеры, свидетельствующие о некорректности и так называемого «статистического определения вероятности». Вместе с тем приведенное определение статистической вероятности $P_n^*(A) = \dfrac{k_n(A)}{k_n(\Omega)}$, $A \in S$, вполне корректно и поскольку $P_n^*(A)$ есть вероятностная мера, то есть имеет все свойства вероятности, то в школе вполне достаточно изучать только статистические вероятности. Это, с одной стороны, будет мощной пропедевтической основой к дальнейшему изучению в высших учебных заведениях теории вероятностей на аксиоматический основе, а с другой стороны, избавляет от необходимости изучать в школе отдельно элементы теории вероятностей и отдельно элементы математической статистики, так как изучая статистические вероятности (относительные частоты) событий, учащиеся изучают одновременно и основы теории вероятностей, и элементы математической статистики. При этом, как следует из приведенных ссылок на учебники А. В. Погорелова по геометрии для 7–9 и 10–11 классов [1; 2], в школьных курсах математики есть вполне достаточная база для изучения элементов стохастики и пропедевтики изучения курса теории вероятностей с позиций теории меры (на аксиоматической основе).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Погорелов, А. В.* Геометрия. Планиметрия : учебник для 7–9 классов средний школы : утв. М-вом образования Украины / А. В. Погорелов. – Киев : Освіта, 1994 – 224 с.
2. *Погорелов, А. В.* Геометрия. Стереометрия : учебник для 10–11 классов средний школы : утв. М-вом образования Украины / А. В. Погорелов. – Киев : Освіта, 1997 – 144 с.
3. *Гихман, П. И.* Теория вероятностей и математическая статистика / П. И. Гихман, А. В. Скороход, М. И. Ядренко. – Киев : Вища школа, 1988. – 440 с.
4. *Ширяев, А. Н.* Вероятность / А. Н. Ширяев. – М. : Наука, 1989 – 640 с.
5. *Жалдак, М. И.* Элементы стохастики с компьютерной поддержкой : пособие для учителей / М. И. Жалдак, О. А. Михалин. – Киев : Шкільний світ, 2008 – 120 с.