

О ПРЕПОДАВАНИИ НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН НА МАТЕМАТИЧЕСКИХ ФАКУЛЬТЕТАХ УНИВЕРСИТЕТОВ И ОБ ОРГАНИЗАЦИИ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АЛГОРИТМОВ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

И. Б. Просвирнина

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

Гродно, Беларусь

E-mail: i.prosvirnina@grsu.by

Широкий спектр применения компьютерной алгебры объясняет необходимость введения методов компьютерной алгебры в процесс преподавания математических дисциплин на факультетах математики и прикладной математики университетов. Для реализации предложенной программы возможно чтение курса «Компьютерная алгебра», поддерживающего курсы алгебро-геометрического цикла, чтение специальных курсов с использованием алгоритмов компьютерной алгебры, применение алгоритмов компьютерной алгебры в исследовательской работе студентов, проводимой в процессе курсового и дипломного проектирования. Предлагаются примеры возможных заданий для самостоятельной работы студентов с использованием алгоритмов компьютерной алгебры.

Ключевые слова: базисы Гребнера, системы компьютерной алгебры, курсы по выбору, специальные курсы, научно-исследовательская работа студентов.

Базисы Гребнера были введены Бруно Бухбергером в 1965 г. [1]. (Поясним выбор названия: Вольфганг Гребнер был научным руководителем Бруно Бухбергера при написании последним диссертации.) Основная идея, заложенная в конструкции базисов Гребнера, обобщает теорию многочленов от одной переменной. В кольце многочленов $k[x]$, где k – поле, любой идеал I порождается одним многочленом, а именно: наибольшим общим делителем всех многочленов из идеала I . Если известно множество образующих $\{f_1, f_2, \dots, f_s\} \subseteq k[x]$ идеала I , то с помощью алгоритма Евклида можно вычислить многочлен $d = \text{НОД}(f_1, f_2, \dots, f_s)$, такой, что $I = \langle f_1, f_2, \dots, f_s \rangle = \langle d \rangle$. В этом случае многочлен $f \in k[x]$ принадлежит идеалу I тогда и только тогда, когда остаток при делении f на d равен нулю. Базисы Гребнера являются аналогами наибольших общих делителей в случае колец многочленов от нескольких переменных. В частности, базис Гребнера идеала $I \subseteq k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ порождает идеал I , и многочлен $f \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ принадлежит идеалу I тогда и только тогда, когда остаток при делении многочлена f на многочлены, составляющие базис Гребнера идеала I , равен нулю.

Многие системы компьютерной алгебры включают в себя пакеты, вычисляющие базисы Гребнера, например: системы Axiom, Maple и Mathematica. Имеются и другие системы, которые специально созданы для вычислений в кольцах многочленов: CoCoA и

Macaulay – самые популярные из таких систем. Система CoCoA является наиболее предпочтительной, поскольку она позволяет работать с большим набором упорядочений по сравнению со стандартными системами, и не только с однородными многочленами, по сравнению с системой Macaulay. Все перечисленные системы компьютерной алгебры предоставляют пользователю возможность создавать программы для реализации алгоритмов, возникающих при решении тех или иных задач. Система компьютерной алгебры CoCoA разработана Antonio Carani, Alessandro Giovini, Gianfranco Niesi и Lorenzo Robbiano в Италии в университете города Genova. Эта система является некоммерческой и была получена автором по адресу <ftp://cocoa@dima.unige.it/cocoa/index.html>.

Привлекательность компьютерной алгебры заключается в том, что ее алгоритмы могут быть эффективно использованы при решении обширного круга задач вычислительной математики. Приведем области математики, в которых успешно применяется компьютерная алгебра, к ним относятся: алгебраическая геометрия, теория чисел, теория групп, комбинаторика, дифференциальные уравнения, целочисленное программирование, финансовая математика, автоматическое доказательство теорем. Широкий спектр применения компьютерной алгебры объясняет необходимость введения методов компьютерной алгебры в процесс преподавания математических дисциплин на факультетах математики и прикладной математики университетов.

Для реализации предложенной программы есть несколько вариантов. Возможно чтение курса «Компьютерная алгебра», поддерживающего курс «Геометрия и алгебра» для студентов специальностей «Прикладная математика» и «Экономическая кибернетика», курс «Аналитическая геометрия и линейная алгебра» для студентов специальности «Программное обеспечение информационных технологий» и курс «Алгебра и теория чисел» для студентов специальности «Математика». При таком подходе к преподаванию дисциплин алгебро-геометрического цикла большое число тем может быть изложено алгоритмически, что, в частности, позволит развивать практические навыки по этим темам с помощью систем компьютерной алгебры. К числу выделенных тем относятся, например: алгоритм Евклида, конечные поля, симметрические полиномы, алгебраические числа, задание групп образующими и определяющими соотношениями, системы полиномиальных уравнений, ряд тем линейной алгебры. Следует понимать, что такой курс может преподаваться только параллельно традиционному курсу и требует высокой эрудиции и педагогического мастерства от лектора, а также больших эмоциональных и интеллектуальных затрат как от преподавателя, так и от студентов. Ведь выбранный путь предполагает наличие у студентов определенной математической культуры и настрой на упорную работу, поскольку конструкции, появляющиеся в теории базисов Гребнера, носят абстрактный характер. Кроме того, такой метод обучения математике возможен только в крупных университетах со сложившимися научными школами и хорошей материальной базой. Поясню, почему это так: предложенный подход к преподаванию дисциплин алгебро-геометрического цикла в известном смысле сопряжен с определенным риском в силу его новизны и трудоемкости и требует понимания и поддержки коллег, а также хорошей компьютерной базы.

Еще один путь введения компьютерной алгебры в процесс преподавания математических дисциплин заключается в чтении специальных курсов с использованием алгоритмов компьютерной алгебры. Тематика таких спецкурсов может быть весьма разнообразной. Эти спецкурсы могут обслуживать как специализацию «Методика преподавания математики и информатики», так и научные и прикладные специализации и должны быть нацелены на решение практических задач. Для специализации «Методика преподавания математики и информатики», например, может быть прочитан специальный курс «Автоматическое доказательство геометрических теорем школьного курса математики». Практическая часть этого спецкурса могла бы включать перевод конкретных теорем школьно-

го курса геометрии на язык многочленов от нескольких переменных и проверку справедливости выбранных теорем методом Рита – Ву и методом, использующим базисы Гребнера. Кроме того, практическая часть спецкурса могла бы быть поддержана пакетом «Автоматическое доказательство геометрических теорем» системы компьютерной алгебры CoCoA. Для специализации «Высшая алгебра и теория чисел» был бы полезен спецкурс «Базисы Гребнера и теория инвариантов». Практическая часть этого спецкурса также поддерживается системой компьютерной алгебры CoCoA. Можно предложить студентам следующие практические задания: с помощью системы компьютерной алгебры вычислить значения оператора Рейнольдса для конкретных конечных групп и полиномов, вычислить кольца инвариантов для конкретных конечных групп. При таком подходе к преподаванию специальных курсов изучение абстрактных теорий опирается на конкретные модели, и введение общих конструкций становится мотивированным. Наконец, реализация алгоритмов решения задач с помощью одной из систем компьютерной алгебры привнесет в работу студентов дух творчества и придаст новый импульс исследовательской деятельности.

Третью возможность для введения алгоритмов компьютерной алгебры в процесс преподавания автор видит в применении указанных алгоритмов в исследовательской работе студентов, проводимой в рамках курсового и дипломного проектирования. Темы для исследований могут быть предложены из различных областей математики, они могут содержать значительную чисто компьютерную часть либо быть теоретически ориентированными. Работа над конкретными проектами, с одной стороны, заставит студентов активно воспринимать идеи и методы компьютерной алгебры, а с другой стороны, такой вид учебной деятельности поможет им приобрести опыт работы с системами компьютерной алгебры. Обсудим несколько тем, которые можно предложить для таких исследований. Вопросы, связанные с теоремой Молина в теории инвариантов, являются интересной темой для самостоятельных исследований. Алгоритм Молина позволяет найти множество образующих в кольце инвариантов $k[x_1, x_2, \dots, x_n]^G$ группы G . Задание для студентов: изучить теорему Молина, реализовать алгоритм Молина с помощью системы компьютерной алгебры CoCoA, вычислить инварианты группы вращений куба в R^3 . Следующий круг вопросов связан с комбинаторной задачей о раскраске графа в три цвета. Задание для студентов: изучить критерий возможности раскраски графа в три цвета, реализовать алгоритм, содержащийся в критерии, с помощью системы компьютерной алгебры CoCoA, обобщить этот алгоритм на случай задачи о раскраске графа в четыре цвета. Алгоритмы компьютерной алгебры применимы и в целочисленном программировании. Задание для студентов по этой тематике: изучить и реализовать с помощью системы компьютерной алгебры CoCoA алгоритм Роббиано – Траверсо решения системы диофантовых уравнений в неотрицательных целых числах, обобщить этот алгоритм на случай задачи целочисленного программирования, применить алгоритм к конкретным задачам целочисленного программирования.

Автор понимает, что реализация предложенной программы весьма трудоемка, однако цель оправдывает средства. Для качественной подготовки специалистов такой подход к преподаванию математики в сочетании с активной работой студентов, несомненно, приведет к хорошим результатам, которые позволят молодым специалистам достойно реализоваться в сфере высоких технологий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Buchberger, B.* Ein algorithmus zum auffinden der basiselemente des restklassenringes nach einem nulldimensionalen polynomideal / В. Buchberger // Ph. D. Thesis, Inst. – Innsbruck, Austria : University of Innsbruck, 1965.
2. *Просвирнина, И. Б.* О проблеме введения алгоритмов компьютерной алгебры в процесс обучения математике / И. Б. Просвирнина // Четвертые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям : тез. докл. междунар. конф. – Минск : БГУ, 2005. – С. 163–164.