

МЕТОДЫ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ В ТЕОРИИ ОБРАБОТКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ. КОМПЬЮТЕРНЫЙ АНАЛИЗ

В. А. Нифагин, Л. В. Бокуть

Белорусский национальный технический университет

Минск, Беларусь

E-mail: vladnifagin@gmail.com

Предложена методика аналитического моделирования реальных профилей детали при их координатном контроле. Для повышения точности результатов использована кубическая параметрическая сплайн-интерполяция со специальными ограничениями. Математическая модель реализована в пакете MathLab.

Новые технологии, применяемые при проектировании, производстве, контроле качества приборов и машин, ставят высокие требования к качеству измерений. Повысить качество измерений возможно либо путем совершенствования существующих и разработки принципиально новых средств измерений, либо на основе рационализации методик выполнения измерений. На практике, исходя из сложившихся традиций, предпочтение, как правило, отдается первому варианту решения проблемы повышения качества измерений. Однако его реализация требует значительных материальных затрат и времени, что связано с необходимостью внедрения в практику измерений новых физических принципов, разработки новых и доработки конструкций существующих средств измерений, совершенствования технологических процессов их изготовления. В этом отношении более перспективным представляется второй путь повышения качества измерений, суть которого состоит в оптимизации методов измерений и рационализации на этой основе методик выполнения измерений.

Около 90 % [1] от общего объема измерений, выполняемых в условиях машиностроительного производства, связаны с определением геометрических параметров деталей. Эти измерения, как правило, являются координатными, а их алгоритм предполагает выполнение следующих процедур:

- измерение координат отдельных точек детали;
- аналитическое моделирование реальных поверхностей деталей по результатам их измерения;
- сравнение параметров аналитической модели с нормируемыми;
- заключение о годности.

Всякий раз при аналитическом моделировании реальных поверхностей по результатам их измерений возникает методическая погрешность, обусловленная переходом от реальной поверхности к ее идеализированной модели. Главной задачей в этом случае является обеспечение адекватности аналитической модели, что достигается, в общем случае, увеличением числа контрольных точек. Значительный интерес представляет собой возможность оптимизации числа контрольных точек при обеспечении

заданного значения погрешности [1]. Смысл оптимизации в этом случае состоит в сокращении необходимого количества измерительных операций при обеспечении требуемой точности и достоверности получаемых результатов, что должно обеспечить повышение качества процесса измерения. Достоинством такого подхода является повышение производительности контроля за счет сокращения числа контролируемых точек, необходимого для решения поставленной задачи. При этом необоснованное сокращение числа контрольных точек может привести к появлению значимых методических погрешностей.

В настоящее время наиболее распространенными методами построения аналитической модели реальных профилей детали являются кусочно-линейная аппроксимация и приближение прямыми по методу наименьших квадратов (МНК). Эти методы дают невысокую точность приближения, что негативно отражается на адекватности модели.

В основу предлагаемого метода аналитического моделирования положена кубическая параметрическая сплайн-интерполяция со специальными ограничениями. Такой вид аппроксимации позволяет наиболее точно приближать реальную поверхность при небольшом числе контрольных точек.

Рассмотрим сплайн в параметрическом виде [2, 3]. Пусть задана сетка Δ : $x_0 < x_1 < \dots < x_n$

$$I_i = [x_{i-1}, x_i], i \in \{1, \dots, n\},$$

где I_i – некоторый интервал, принадлежащий $I = [x_0, x_n]$.

Введем ограничения на осцилляцию сплайна:

$$L(x) \leq s(x) \leq U(x) \quad (1)$$

для всех x принадлежащих I , где $s(x)$ – искомая сплайн-функция.

Используя параметр u , запишем

$$x = f_i(u) = f(u), y = g_i(u) = g(u) \quad (2)$$

для $0 \leq u \leq 1$.

Полагая $v = 1 - u$, и $h_i = x_i - x_{i-1}$ и

$$\begin{aligned} f(u) &= x_{i-1}v^3 + (3x_{i-1} + \alpha_i h_i)uv^2 + (3x_i - \alpha_i h_i)u^2v + x_i u^3, \\ g(u) &= y_{i-1}v^3 + (3y_{i-1} + \alpha_i h_i p_{i-1})uv^2 + (3y_i - \alpha_i h_i q_i)u^2v + y_i u^3, \end{aligned} \quad (3)$$

где α_i принадлежат $(0, 1]$. Выясним суть параметров p_i и q_i . Запишем выражение для производной функции $f(u)$.

$$f'(u) = \alpha_i h_i (u + v)^2 + 6(1 - \alpha_i) h_i uv.$$

Очевидно, что последнее выражение строго положительно. Таким образом, первые уравнения в (2) и (3) неявно задают обратную функцию $u = f^{-1}(x)$ на I_i . Тогда сплайн-функция может быть определена как $s = gf^{-1}$ на I_i :

$$y = s(x) = g(f^{-1}(x))$$

Очевидно, сплайны являются нелинейными. Исходя из непрерывности сплайн-функции на всем отрезке I , а также учитывая условия (1), мы полагаем

$$s(x_{i-1} + 0) = g(0) = y_{i-1}, s(x_i - 0) = g(1) = y_i.$$

Принимая во внимание

$$s'(x) = g'(u) / f'(u)$$

$$g'(u) = \alpha_i h_i p_{i-1} v^2 + 2h_i (3\tau_i - \alpha_i p_{i-1} - \alpha_i p_i) uv + \alpha_i h_i q_i u^2,$$

получим

$$s'(x_{i-1} + 0) = \frac{g'(0)}{f'(0)} = \frac{\alpha_i h_i p_{i-1}}{\alpha_i h_i} = p_{i-1}, s'(x_i - 0) = \frac{g'(1)}{f'(1)} = \frac{\alpha_i h_i q_i}{\alpha_i h_i} = q_i. \quad (4)$$

Отсюда, считая, что $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ принадлежат промежутку $(0, 1]$, сплайны, задаваемые выражениями (2) и (3) являются функциями класса C^1 на I в том и только в том случае, если

$$p_i = q_i \quad (5)$$

для $i = 1, \dots, n-1$.

Тогда величины $p_i = q_i$ являются значениями производной в точках x_i , то есть

$$p_i = s'(x_i) \quad (6)$$

для $i = 1, \dots, n$.

Вторая производная примет вид:

$$s''(x) = (f''(u)g'(u) - f'(u)g''(u)) / f'(u)^3$$

для всех значений x принадлежащих I_i , где числитель выражается непосредственно:

$$f''(u)g'(u) - f'(u)g''(u) =$$

$$= 2\alpha_i h_i \left[(3\tau_i - (3 - \alpha_i)p_{i-1} - \alpha_i p_i) v^3 + 3(\tau_i - p_{i-1}) uv^2 + \right.$$

$$\left. 3(p_i - \tau_i) u^2 v + (\alpha_i p_{i-1} + (3 - \alpha_i)p_i - 3\tau_i) u^3 \right], 0 \leq u \leq 1.$$

Как и в (4), а также во всех последующих выражениях, здесь

$$\tau_i = (y_i - y_{i-1}) / h_i$$

для $i = 1, \dots, n$.

Если функции $L(x)$ и $U(x)$ из (1) являются непрерывными кусочно-линейными на сетке Δ , то параметры α_i можно найти из неравенства

$$\frac{1}{\alpha_i} \geq \frac{1}{3} \max \left\{ \frac{L_i - L_{i-1} - h_i \tau_{i-1}}{y_{i-1} - L_{i-1}}, \frac{h_i \tau_{i-1} - U_i + U_{i-1}}{U_{i-1} - y_{i-1}} \right\}, i = 1, \dots, n,$$

где L_i и U_i — значение соответствующих функций в точках x_i , τ_0 — любое действительное число.

Наложение кусочно-линейных ограничений на осцилляцию сплайна позволяет избежать возникновения грубых погрешностей, что является существенным преимуществом данного вида аппроксимации перед другими.

Предлагаемая методика построения аналитической модели реальных профилей детали позволяет существенно повысить достоверность результатов координатного контроля. Математическая модель сплайн-аппроксимации, рассмотренная выше, реализована в специализированном пакете компьютерной математики MatLab, что открывает широкие возможности имитационного моделирования измерительного процесса. Так визуальное компьютерное моделирование позволяет оценить соответствие обрабатываемого профиля номинальным параметрам.

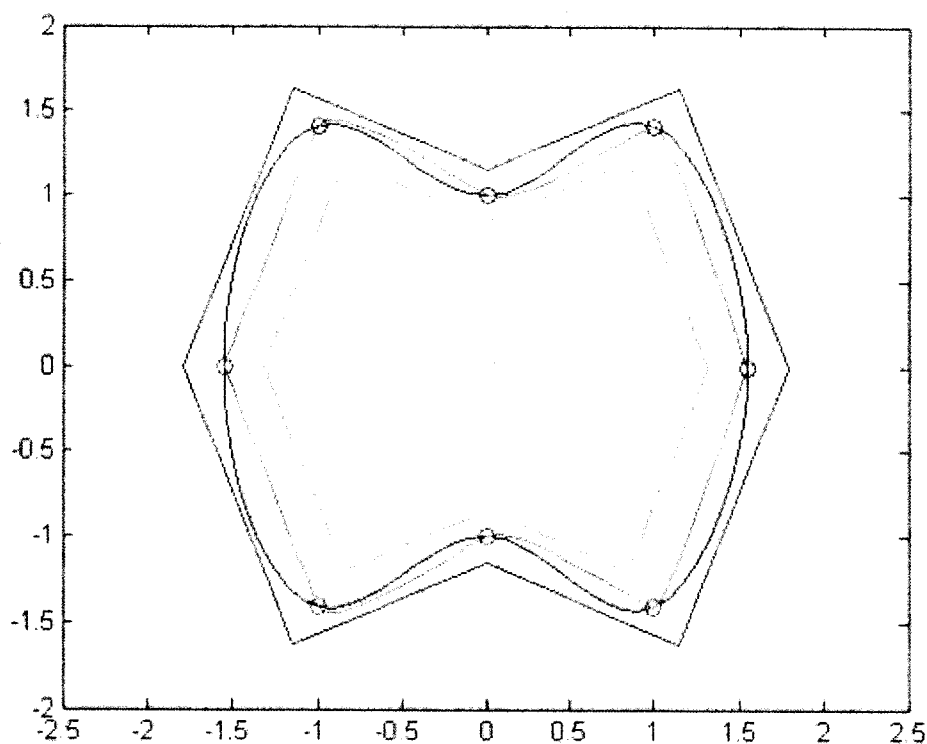


Рис. Графическое представление аналитической модели реального профиля:
 приведен профиль, образованный отрезками прямых;
 граничная полоса, кривая сплайн-интерполяции;
 точки, полученные при измерении реального профиля

Данный подход апробирован при преподавании дисциплины «Прикладная математика» для студентов специальностей «Метрология, стандартизация и сертификация» приборостроительного факультета БНТУ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соломахо, В. Л. Метрологическое обеспечение координатных измерений в машиностроении / В. Л. Соломахо. – Минск : Реклама-Факсбелар, 1999. – С. 49–59.
2. Молчанов, И. Н. Машинные методы решения прикладных задач. Алгебра, приближение функций / И. Н. Молчанов. – Киев : Наукова думка, 1987. – 288 с.
3. Mulansky, B. Interpolation and approximation from convex sets. Theory 92, 82±100 / B. Mulansky, M. Neamtu, J. Approx. – 1998.