

УДК 512.543

В.В. БЕНЯШ-КРИВЕЦ, Я.А. ЖУКОВЕЦ

О СВОБОДНЫХ ПОДГРУППАХ В ОБОБЩЕННЫХ ТЕТРАЭДРАЛЬНЫХ ГРУППАХ ТИПА (4,6,2,2,2,2)

We consider generalized tetraedron groups Γ of type (4,6,2,2,2,2). Some sufficient conditions Γ to contain a non-abelian free subgroup are found.

Обобщенные тетраэдральные группы имеют копредставление вида

$$\Gamma = \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^{k_1} = x_2^{k_2} = x_3^{k_3} = R_{12}(x_1, x_2)^l = R_{23}(x_2, x_3)^m = R_{13}(x_1, x_3)^n = 1 \rangle,$$

где $k_1, k_2, k_3, l, m, n \geq 2$, $R_{ij}(x_i, x_j)$ – циклически редуцированное слово в свободном произведении $\langle x_i \mid x_i^{k_i} = 1 \rangle * \langle x_j \mid x_j^{k_j} = 1 \rangle$, которое не является собственной степенью. В [1] выдвинута гипотеза, что обобщенные тетраэдральные группы удовлетворяют альтернативе Титса, т. е. каждая такая группа содержит либо разрешимую подгруппу конечного индекса, либо свободную подгруппу ранга 2. К настоящему времени эта гипотеза доказана для всех обобщенных тетраэдральных групп, кроме групп следующих типов [1, 2]:

1. $\langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^{k_1} = x_2^{k_2} = x_3^{k_3} = (x_1^\alpha x_2^\beta)^2 = (x_2^\gamma x_3^\delta)^2 = R_{13}(x_1, x_3)^n = 1 \rangle$, $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{n} \geq 1$;
2. $\langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^{k_1} = x_2^{k_2} = x_3^{k_3} = (x_1^\alpha x_2^\beta)^2 = (x_2^\gamma x_3^\delta)^3 = (x_1^\eta x_3^\theta)^n = 1 \rangle$, $n = 3, 4, 5$, $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{n} \geq \frac{7}{6}$;
3. $\langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^{k_1} = x_2^{k_2} = x_3^{k_3} = (x_1^\alpha x_2^\beta)^2 = (x_2^\gamma x_3^\delta)^3 = (x_1^{\eta_1} x_3^{\theta_1} x_1^{\eta_2} x_3^{\theta_2})^2 = 1 \rangle$, $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \geq \frac{2}{3}$.

В данной работе мы рассматриваем группы вида $\Gamma = \langle a, b, c \mid a^4 = b^6 = c^2 = R(a, b)^2 = (bc)^2 = (ac)^2 = 1 \rangle$.

Доказывается следующая

Теорема. Пусть $\Gamma = \langle a, b, c \mid a^4 = b^6 = c^2 = R(a, b)^2 = (bc)^2 = (ac)^2 = 1 \rangle$ – обобщенная тетраэдральная группа, где $R(a, b) = a^{k_1} b^{l_1} a^{k_2} b^{l_2} \dots a^{k_s} b^{l_s}$, $1 \leq k_i \leq 3$, $1 \leq l_i \leq 5$, $K = k_1 + \dots + k_s$, $L = l_1 + \dots + l_s$. Если выполнено одно из условий:

- 1) либо $2 \nmid K$, либо $3 \nmid L$;
- 2) $K = 2K_1, L = 3L_1, K_1, L_1 \in \mathbb{N}$, и $K_1 + L_1 \equiv 0 \pmod{2}$;
- 3) $2 \mid K$ и $6 \mid L$;
- 4) $4 \mid K, L \equiv 3 \pmod{6}$ и $s < 12$,

то Γ содержит неабелеву свободную подгруппу и, следовательно, удовлетворяет альтернативе Титса.

Рассмотрим подгруппу Γ_1 группы Γ , порожденную элементами a, b . Тогда $\Gamma_1 \triangleleft \Gamma$ и она имеет копредставление: $\Gamma_1 = \langle a, b \mid a^4 = b^6 = R(a, b)^2 = R(a^{-1}, b^{-1})^2 = 1 \rangle$, где $R(a, b) = a^{k_1} b^{l_1} a^{k_2} b^{l_2} \dots a^{k_s} b^{l_s}$, $1 \leq k_i \leq 3, 1 \leq l_i \leq 5$. Таким образом, если Γ_1 содержит свободную неабелеву подгруппу, то и Γ содержит такую подгруппу.

Далее мы будем обозначать через $[A]$ образ матрицы $A \in SL_2(\mathbb{C})$ в $PSL_2(\mathbb{C})$, через $\text{tr } A$ – след матрицы A . Подгруппа $H \subset PSL_2(\mathbb{C})$ называется элементарной, если любые два элемента бесконечного порядка из H имеют общий ненулевой собственный вектор. Неэлементарная подгруппа H из $PSL_2(\mathbb{C})$ содержит неабелеву свободную подгруппу [3]. Там же доказано, что если H порождена двумя элементами $[A], [B]$, то H неэлементарна тогда и только тогда, когда неприводима, бесконечна и отлична от бесконечной группы диэдра. При этом H является бесконечной группой диэдра в точности тогда, когда хотя бы два из трех чисел $\text{tr } A, \text{tr } B, \text{tr } AB$ равны нулю. Конечными подгруппами в $PSL_2(\mathbb{C})$ являются: циклические группы, группы диэдра D_n , а также A_4, S_4, A_5 . Нетрудно показать, что элемент $[X] \in PSL_2(\mathbb{C})$ имеет порядок $n \geq 2$ тогда и только тогда, когда $\text{tr } X = 2 \cos \frac{\pi u}{n}$,

где $(u, n) = 1$. Гомоморфизм $\rho: \Gamma' = \langle a, b \mid a^k = b^l = R(a, b)^m = R(a^{-1}, b^{-1})^m = 1 \rangle \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ будем называть существенным, если образы элементов $a, b, R(a, b), R(a^{-1}, b^{-1})$ имеют порядки k, l, m, m соответственно. Группу Γ' будем называть псевдоконечной (псевдоэлементарной), если образ $\rho(\Gamma')$ конечен (псевдоэлементарен) для любого существенного представления ρ .

Идея доказательства теоремы состоит в том, чтобы построить представление $\rho: G \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$, где G – исследуемая группа, такое, что $\rho(G)$ – неэлементарная подгруппа в $PSL_2(\mathbb{C})$. Тогда $\rho(G)$, а следовательно и G , содержит неабелеву свободную подгруппу.

Для произвольного элемента $w \in F_2$, где F_2 – свободная группа с базисом g_1, g_2 , рассмотрим следующую функцию:

$$\tau_w: SL_2(\mathbb{C})^2 \rightarrow \mathbb{C}, \quad \tau_w(A, B, C) = \text{tr } w(A, B, C).$$

Функцию τ_w обычно называют характером Фрике. Справедливы следующие соотношения между характерами Фрике:

$$\tau_{w^{-1}} = \tau_w, \quad \tau_{uv} = \tau_u \tau_v - \tau_{u^{-1}v}.$$

В [4] доказано, что если $w = g^{u_1} h^{v_1} \dots g^{u_s} h^{v_s}$ – циклически редуцированное слово в F_2 и $x = \tau_g, y = \tau_h, z = \tau_{gh}$, то $\tau_w = Q_w(x, y, z)$, где $Q_w \in \mathbb{Z}[x, y, z]$ – однозначно определенный многочлен с целыми коэффициентами, который называют многочленом Фрике элемента w .

Отметим также следующий факт [5]: пара матриц $A, B \in SL_2(\mathbb{C})$ порождает приводимую подгруппу тогда и только тогда, когда $\text{tr } ABA^{-1}B^{-1} = 2$, а это равносильно условию

$$(\text{tr } A)^2 + (\text{tr } B)^2 + (\text{tr } AB)^2 - \text{tr } A \text{tr } B \text{tr } AB - 4 = 0. \quad (1)$$

Лемма 1 [6]. Для любой тройки значений $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{C}$ существует пара матриц $A_0, B_0 \in SL_2(\mathbb{C})$ таких, что $\text{tr } A_0 = x_0, \text{tr } B_0 = y_0, \text{tr } A_0 B_0 = z_0$.

Рассмотрим группу $\Gamma_1 = \langle a, b \mid a^4 = b^6 = R(a, b)^2 = R(a^{-1}, b^{-1})^2 = 1 \rangle$. Пусть $Q_R(x, y, z)$ – полином Фрике элемента R . Положим

$$g(z) = Q_R(2 \cos \frac{\pi}{4}, 2 \cos \frac{\pi}{6}, z). \quad (2)$$

Если z_0 – корень $g(z)$, то по лемме 1 существуют матрицы $A, B \in SL_2(\mathbb{C})$ такие, что $\operatorname{tr} A = 2 \cos \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{tr} B = 2 \cos \frac{\pi}{6}$, $\operatorname{tr} AB = z_0$ и $\operatorname{tr} R(AB) = 0$. Тогда $[A]^4 = [B]^6 = R^2([A], [B]) = 1$, и так как $\operatorname{tr} R(A^{-1}, B^{-1}) = Q_R(\operatorname{tr} A^{-1}, \operatorname{tr} B^{-1}, \operatorname{tr} A^{-1}B^{-1}) = Q_R(\operatorname{tr} A, \operatorname{tr} B, \operatorname{tr} AB) = g(z_0) = 0$, то отображение $a \rightarrow [A]$, $b \rightarrow [B]$ задает представление группы Γ_1 .

Пусть z_0 – некоторый корень полинома $g(z)$. Обозначим через $G(z_0)$ группу, порожденную $[A]$, $[B]$. Так как $\operatorname{tr} A = 2 \cos \frac{\pi}{4}$ и $\operatorname{tr} B = 2 \cos \frac{\pi}{6}$, то $G(z_0)$ не совпадает с группами A_4, S_4, A_5 (в которых нет элементов порядка 6) и не является группой диэдра [6].

Если z_0 не является корнем уравнения

$$z^2 - \sqrt{6}z + 1 = 0, \quad (3)$$

то из (1) следует, что группа $G(z_0)$ неприводима. В этом случае $G(z_0)$ с точностью до сопряжения определена однозначно. Несложно убедиться, что $z_1 = 2 \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$, $z_2 = 2 \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$ являются корнями уравнения (3).

Если группа $\langle [A], [B] \rangle$ неприводима, то она содержит свободную неабелеву группу, так как не является элементарной подгруппой в $PSL_2(\mathbb{C})$. В этом случае группа Γ_1 также содержит свободную неабелеву подгруппу.

Лемма 2. Если для всех корней z_0 многочлена $g(z)$ группа $G(z_0)$ приводима, то $K = 2K_1$, $L = 3L_1$, $K_1, L_1 \in \mathbb{N}$ и $K_1 + L_1 \equiv 1 \pmod{2}$.

Доказательство. При выполнении условий леммы 2 многочлен $g(z)$ имеет корни $z_1 = 2 \cos \frac{\pi}{12}$, $z_2 = 2 \cos \frac{5\pi}{12}$. Следовательно, $g(z) = A_0 \left(z - 2 \cos \frac{\pi}{12} \right)^{s_1} \left(z - 2 \cos \frac{5\pi}{12} \right)^{s_2}$, где $s_1 \neq 0$ или $s_2 \neq 0$. Пусть для определенности $s_2 \neq 0$. Положим $A = \begin{pmatrix} \varepsilon^6 & 1 \\ 0 & \varepsilon^{-6} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \varepsilon^4 & 0 \\ t & \varepsilon^{-4} \end{pmatrix}$, где $\varepsilon = \cos \frac{\pi}{24} + i \sin \frac{\pi}{24}$. Тогда $\operatorname{tr} A = 2 \cos \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{tr} B = 2 \cos \frac{\pi}{6}$, $\operatorname{tr} AB = t + 2 \cos \frac{5\pi}{12}$. Имеем равенство $\operatorname{tr} R(A, B) = g \left(t + 2 \cos \frac{5\pi}{12} \right) = A_0 \left(t + 2 \cos \frac{5\pi}{12} - 2 \cos \frac{\pi}{12} \right)^{s_1} t^{s_2}$. В этом случае свободный член полинома $g(t + 2 \cos \frac{5\pi}{12})$ равен нулю. С другой стороны, свободный член полинома $\operatorname{tr} R(A, B)$ равен $2 \cos \frac{6K+4L}{24} \pi = 2 \cos \frac{3K+2L}{12} \pi$, где $K = k_1 + \dots + k_s$, $L = l_1 + \dots + l_s$. Таким образом, $3K + 2L \equiv 6 \pmod{12}$. Значит, $K \equiv 0 \pmod{2}$ и $L \equiv 0 \pmod{3}$, т. е. $L = 3L_1$, $K = 2K_1$, и

$$K_1 + L_1 \equiv 1 \pmod{2}. \quad (4)$$

Следствие 1. Если $2 \nmid K$, либо $3 \nmid L$, либо $K = 2K_1$, $L = 3L_1$ и $K_1 + L_1 \equiv 0 \pmod{2}$, то теорема справедлива.

Учитывая следствие 1, в дальнейшем будем считать, что $L = 3L_1$, $K = 2K_1$ и $K_1 + L_1 \equiv 1 \pmod{2}$.

Вначале рассмотрим случай 3 теоремы. Пусть $L = 6L_1$, $K = 2K_1$. Ввиду следствия 1 K_1 нечетно. Рассмотрим группу $H_1 = \langle a_1, b_1 \mid a_1^2 = b_1^6 = R_1(a_1, b_1)^2 = R_1(a_1^{-1}, b_1^{-1})^2 = 1 \rangle$, где $R_1(a_1, b_1) = a_1 b_1^{m_1} \dots a_1 b_1^{m_r}$ – циклическая редукция слова $R(a_1, b_1)$ в свободном произведении $\langle a_1 \mid a_1^2 = 1 \rangle * \langle b_1 \mid b_1^6 = 1 \rangle$. Пусть $M = m_1 + \dots + m_r$. Тогда $M \equiv L \pmod{6}$, в частности, $M = 6M_1$ и $r \equiv K \pmod{2}$, т. е. $r = 2r_1$. Отображение $\phi: \Gamma_1 \rightarrow H_1$, $a \mapsto a_1$, $b \mapsto b_1$ является сюръективным гомоморфизмом. Поэтому если H_1 содержит

свободную неабелеву подгруппу, то этим же свойством обладает и группа Γ_1 . Отметим, что если $r=0$, т. е. R_1 – пустое слово, то H_1 является свободным произведением циклических групп порядка 2 и 6, а поэтому содержит неабелеву свободную подгруппу. Поэтому будем считать в дальнейшем, что $r > 0$.

Пусть $\rho: H_1 \rightarrow PSL_2(\mathbb{C}): a_1 \mapsto [A_1], b_1 \mapsto [B_1]$ – существенный гомоморфизм. Тогда $\text{tr } A_1 = 0$, $\text{tr } B_1 = \sqrt{3}$, и, следовательно, группа $\langle [A_1], [B_1] \rangle$ является неприводимой и конечной тогда и только тогда, когда $\text{tr } A_1 B_1 = 0$, т. е. $\langle [A_1], [B_1] \rangle$ – группа диэдра порядка 12 [6]. Из равенства (1) следует, что $\langle [A_1], [B_1] \rangle$ приводима тогда и только тогда, когда $\text{tr } A_1 B_1 = \pm 1$.

Таким образом, если $\text{tr } A_1 B_1 \notin \{0, 1, -1\}$, то группа $\langle [A_1], [B_1] \rangle$, а вместе с ней и группы H_1 и Γ_1 содержат неабелеву свободную подгруппу.

Пусть для любого существенного гомоморфизма $\rho: H_1 \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ справедливо $\text{tr } A_1 B_1 \in \{0, 1, -1\}$. Тогда

$$\text{tr } R_1(A_1, B_1) = A_0 \cdot (\text{tr } A_1 B_1)^{s_1} \cdot (\text{tr } A_1 B_1 - 1)^{s_2} \cdot (\text{tr } A_1 B_1 + 1)^{s_3}, \quad s_1 + s_2 + s_3 = r.$$

Лемма 4. Если для любого существенного гомоморфизма $\rho: H_1 \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ справедливо $\text{tr } A_1 B_1 \in \{0, 1, -1\}$, то $\text{tr } R_1(A_1, B_1) = A_0 \cdot (\text{tr } A_1 B_1)^r$.

Доказательство. Положим $A_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon^6 & 1 \\ 0 & \varepsilon^{-6} \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & 0 \\ t & \varepsilon^{-2} \end{pmatrix}$, где $\varepsilon = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}$. Тогда $\text{tr } A_1 = 0$, $\text{tr } B_1 = 2 \cos \frac{\pi}{6}$, $\text{tr } A_1 B_1 = t - 1$ и

$$\text{tr } R_1(A_1, B_1) = A_0 \cdot (t-1)^{s_1} \cdot (t-2)^{s_2} \cdot (t)^{s_3}. \quad (5)$$

Свободный член полинома $\text{tr } R_1(A_1, B_1)$ равен $2 \cos \frac{6r+2M}{12} \pi = 2 \cos(r_1 + M_1) \pi = \pm 2$. В силу (8) $s_3 = 0$.

Если рассмотреть матрицы $A_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon^6 & 1 \\ 0 & \varepsilon^{-6} \end{pmatrix}, B_1' = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-2} & 0 \\ t & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$, то аналогично получим, что $s_2 = 0$. Лемма доказана.

Лемма 5. Если для любого существенного гомоморфизма $\rho: H_1 \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ справедливо $\text{tr } A_1 B_1 = 0$, то в слове $R_1(a_1, b_1) = a_1 b_1^{m_1} \dots a_1 b_1^{m_r}$ среди m_i встречается ровно одна тройка и $m_i \neq 2$, $m_i \neq 4$ для всех i . В частности, полином Фрике $\tau_{R_1}(0, \sqrt{3}, z) = 2z^r$.

Доказательство. Вновь положим $A_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon^6 & 1 \\ 0 & \varepsilon^{-6} \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & 0 \\ t & \varepsilon^{-2} \end{pmatrix}$ с прежними обозначениями. По лемме 4 $\text{tr } R_1(A_1, B_1) = A_0 \cdot (\text{tr } A_1 B_1)^r$.

Чтобы найти коэффициент A_0 , рассмотрим полиномы $P_n(x)$, которые удовлетворяют начальным условиям $P_{-1}(x) = 0$, $P_0(x) = 1$ и рекуррентному соотношению $P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x)$ для $n > 0$. Если $n < 0$, то положим $P_n(x) = -P_{|n|-2}(x)$. В [7] доказано, что если $w = g^{u_1} h^{v_1} \dots g^{u_s} h^{v_s} \in F_2$, где $s \geq 1$, – циклически редуцированное слово, и $x = \tau_g$, $y = \tau_h$, $z = \tau_{gh}$, то полином Фрике Q_w имеет вид

$Q_w(x, y, z) = N_s(x, y)z^s + \dots + N_0(x, y)$, где $N_s(x, y) = \prod_{i=1}^s P_{u_i-1}(x)P_{v_i-1}(y)$. В нашем случае

$u_i = 1, v_i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Следовательно, $A_0 = \prod_{i=1}^s P_{u_i-1}(0)P_{v_i-1}(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^{h_2+h_4} (2)^{h_3}$, где h_2 – количество двоек среди v_i ; h_3 – количество троек среди v_i ; h_4 – количество четверок среди v_i .

Свободный член полинома $\text{tr } R_1(A_1, B_1)$ будет иметь вид

$$(-1)^r (\sqrt{3})^{h_2+h_4} (2)^{h_3}.$$

Из доказательства леммы 4 следует, что свободный член $\text{tr } R_1(A_1, B_1)$ равен ± 2 . Таким образом, $(\sqrt{3})^{h_2+h_4} (2)^{h_3} = 2$, из чего следует, что $h_2 = h_4 = 0$, $h_3 = 1$.

Лемма 6. Пусть $w = ab^{m_1} \dots ab^{m_s}$ – элемент свободной группы с образующими a, b и пусть $m_i \in \{1, 3, 5\}$. Тогда полином $f(z) = \tau_w(0, \sqrt{3}, z)$ имеет целые коэффициенты. Если s четно и среди m_i встречается ровно одна тройка, то не все коэффициенты $f(z)$ являются четными.

Доказательство. Индукция по s . Если $s = 1$, то $f(z) = z, 2z, -z$ при $w = ab, ab^3, ab^5$ соответственно. Если $s = 2$, то $f(z) = 2z^2 - 1, -z^2 + 1, -2z^2 - 1$ при $w = abab^3, abab^5, ab^3ab^5$ соответственно. Если $s > 2$, то

$$\tau_w = \tau_{ab^{m_1}} \tau_{ab^{m_2} \dots ab^{m_s}} - \tau_{ab^{m_3} \dots ab^{m_{s-1}} ab^{m_2+m_s-m_1}}.$$

Так как $m_2 + m_s - m_1$ нечетно, то по предположению индукции полиномы $\tau_{ab^{m_2} \dots ab^{m_s}}(0, \sqrt{3}, z)$ и $\tau_{ab^{m_3} \dots ab^{m_{s-1}} ab^{m_2+m_s-m_1}}(0, \sqrt{3}, z)$ имеют целые коэффициенты. Следовательно, $f(z)$ также имеет целые коэффициенты.

Пусть теперь s четно и среди m_i встречается ровно одна тройка. Тогда можно считать, что $m_1 = 3$. Снова используем индукцию по s . При $s = 2$ имеем

$$\tau_{ab^3ab}(0, \sqrt{3}, z) = 2z^2 + 1, \quad \tau_{ab^3ab^5}(0, \sqrt{3}, z) = -2z^2 + 1.$$

При $s > 2$ имеем

$$\tau_w(0, \sqrt{3}, z) = 2z \tau_{ab^{m_2} \dots ab^{m_s}}(0, \sqrt{3}, z) - \tau_{ab^{m_3} \dots ab^{m_{s-1}} ab^{m_2+m_s-3}}(0, \sqrt{3}, z).$$

Выше мы уже доказали, что полиномы $\tau_{ab^{m_2} \dots ab^{m_s}}(0, \sqrt{3}, z)$ и $\tau_{ab^{m_3} \dots ab^{m_{s-1}} ab^{m_2+m_s-3}}(0, \sqrt{3}, z)$ имеют целые коэффициенты. Если $m_2 + m_s - 3 \in \{1, 5\}$, то старший коэффициент полинома $\tau_{ab^{m_3} \dots ab^{m_{s-1}} ab^{m_2+m_s-3}}(0, \sqrt{3}, z)$ равен ± 1 , а если $m_2 + m_s - 3 = 3$, то по предположению индукции не все коэффициенты полинома $\tau_{ab^{m_3} \dots ab^{m_{s-1}} ab^{m_2+m_s-3}}(0, \sqrt{3}, z)$ четные. В обоих случаях не все коэффициенты $f(z)$ являются четными. Лемма доказана.

Следствие 2. Группа $H_1 = \langle a_1, b_1 \mid a_1^2 = b_1^6 = R_1(a_1, b_1)^2 = R_1(a_1^{-1}, b_1^{-1})^2 = 1 \rangle$, где $R_1(a_1, b_1) = a_1 b_1^{m_1} \dots a_1 b_1^{m_r}$, $M = m_1 + \dots + m_r \equiv 0 \pmod{6}$ и r четно, не является псевдоэлементарной. Значит, при $K:2$ и $L:6$ теорема справедлива.

Остался нерассмотренным случай $K = 4K_1$ и $L \equiv 3 \pmod{6}$. Рассмотрим группу $H_2 = \langle a_2, b_2 \mid a_2^4 = b_2^3 = R_2(a_2, b_2)^2 = R_2(a_2^{-1}, b_2^{-1})^2 = 1 \rangle$, где $R_2(a_2, b_2) = a_2^{u_1} b_2^{v_1} \dots a_2^{u_t} b_2^{v_t}$ – циклическая редукция слова $R(a_2, b_2)$ в свободном произведении $\langle a_2 \mid a_2^4 = 1 \rangle * \langle b_2 \mid b_2^3 = 1 \rangle$. Пусть $U = u_1 + \dots + u_t$, $V = v_1 + \dots + v_t$. Тогда $L \equiv V \pmod{3}$, $U \equiv K \pmod{4}$, т. е. $V = 3V_1$, $U = 4U_1$. Рассмотрим сюръективный гомоморфизм $\varphi: \Gamma_1 \rightarrow H_2: a \mapsto a_2, b \mapsto b_2$. Если H_2 содержит свободную неабелеву подгруппу, то этим же свойством обладает и группа Γ_1 . Если $t = 0$, т. е. R_2 – пустое слово, то H_2 является свободным произведением циклических групп порядка 4 и 3, а поэтому содержит неабелеву свободную подгруппу. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $t > 0$.

Пусть $\rho: H_2 \rightarrow PSL_2(\mathbb{C}): a_2 \mapsto [A_2], b_2 \mapsto [B_2]$, – существенный гомоморфизм. Тогда $\text{tr } A_2 = \sqrt{2}$, $\text{tr } B_2 = 1$, и, следовательно, группа $\langle [A_2], [B_2] \rangle$ – конечная тогда и только тогда, когда $\text{tr } A_2 B_2 = 0$ или $\text{tr } A_2 B_2 = \sqrt{2}$ [6]. Из равенства (1) следует, что $\langle [A_2], [B_2] \rangle$ приводима тогда и только тогда, когда $\text{tr } A_2 B_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\pm\sqrt{3} - 1)$.

Таким образом, если $\text{tr } A_2 B_2 \notin \left\{ 0, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - 1), \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{3} - 1) \right\}$, то группа $\langle [A_2], [B_2] \rangle$, а вместе с ней и группы H_2 и Γ_1 содержат неабелеву свободную подгруппу.

Пусть для любого существенного гомоморфизма $\rho: H_2 \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ справедливо $\text{tr } A_2 B_2 \in \left\{0, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{3}), \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{3})\right\}$. Тогда

$$\text{tr } R_2(A_2, B_2) = A_0 \cdot (\text{tr } A_2 B_2)^{s_1} \cdot (\text{tr } A_2 B_2 - \sqrt{2})^{s_2} \cdot \left(\text{tr } A_2 B_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{3})\right)^{s_3} \cdot \left(\text{tr } A_2 B_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{3})\right)^{s_4},$$

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = t.$$

Лемма 7. Если для любого существенного гомоморфизма $\rho: H \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ справедливо $\text{tr } A_2 B_2 \in \left\{0, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{3}), \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{3})\right\}$, то $\text{tr } R_2(A_2, B_2) = A_0 \cdot (\text{tr } A_2 B_2)^{s_1} \cdot (\text{tr } A_2 B_2 - \sqrt{2})^{s_2}$, $s_1 + s_2 = t$.

Доказательство. Положим $A_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon^3 & 1 \\ 0 & \varepsilon^{-3} \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon^4 & 0 \\ t & \varepsilon^{-4} \end{pmatrix}$, где $\varepsilon = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}$. Тогда $\text{tr } A_2 = \sqrt{2}$, $\text{tr } B_2 = 1$, $\text{tr } A_2 B_2 = t - \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)$ и

$$\text{tr } R_2(A_2, B_2) = A_0 \cdot \left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)\right)^{s_1} \cdot \left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)\right)^{s_2} \cdot (t - \sqrt{6})^{s_3} \cdot (t)^{s_4}. \quad (6)$$

Свободный член полинома $\text{tr } A_2 B_2$ равен $2 \cos \frac{3U+4V}{12} \pi = 2 \cos(U_1 + V_1) \pi = \pm 2$.

В силу (6) $s_4 = 0$. Если рассмотреть матрицы $A_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon^3 & 1 \\ 0 & \varepsilon^{-3} \end{pmatrix}$, $B'_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-4} & 0 \\ t & \varepsilon^4 \end{pmatrix}$, то аналогично получим, что $s_3 = 0$. Лемма доказана.

Лемма 8. Если для любого существенного гомоморфизма $\rho: H_2 \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ справедливо $\text{tr } A_2 B_2 \in \{0, \sqrt{2}\}$, то t – четное и в слове $R_2(a_2, b_2) = a_2^{u_1} b_2^{v_1} \dots a_2^{u_i} b_2^{v_i}$ среди u_i встречается ровно две двойки.

Доказательство. Вновь положим $A_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon^3 & 1 \\ 0 & \varepsilon^{-3} \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon^4 & 0 \\ t & \varepsilon^{-4} \end{pmatrix}$ с прежними обозначениями. По условию $\text{tr } R_2(A_2, B_2) = A_0 \cdot (\text{tr } A_2 B_2)^{s_1} \cdot (\text{tr } A_2 B_2 - \sqrt{2})^{s_2}$.

Коэффициент A_0 найдем таким же образом, как и в доказательстве леммы 5. Получим $A_0 = (\sqrt{2})^{h_2}$, где h_2 – количество двоек среди u_i .

Свободный член полинома $\text{tr } R_2(A_2, B_2)$ будет иметь вид

$$(-1)^s (\sqrt{2})^{h_2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^s \cdot (2)^{s_1} \cdot (\sqrt{3}+1)^{s_2-s_1}.$$

Из доказательства леммы 7 следует, что свободный член $\text{tr } R_2(A_2, B_2)$ равен ± 2 . Таким образом, $(\sqrt{2})^{2s_1+h_2-s} \cdot (\sqrt{3}+1)^{s_2-s_1} = 2$. Рассмотрим два случая:

- 1) $s_1 = s_2$. Тогда $(\sqrt{2})^{h_2} = 2$, т. е. $h_2 = 2$ и s – четное;
- 2) $s_1 \neq s_2$ ($s_2 = s_1 + k$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$). В этом случае $(\sqrt{3}+1)^k = 2 \cdot (\sqrt{2})^{k-h_2}$. Так как $(\sqrt{2})^{k-h_2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $(\sqrt{3}+1)^k \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $(\sqrt{3}+1)^k \notin \mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \cap \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}$, то равенство невозможно.

Лемма 9. Если $V = 3V_1$, $U = 4U_1$ и $t < 12$, то с точностью до изоморфизма существует 5 псевдо-конечных групп $H_2^i = \langle a_2, b_2 \mid a_2^4 = b_2^3 = R_{2,i}(a_2, b_2)^2 = R_{2,i}(a_2^{-1}, b_2^{-1})^2 = 1 \rangle$. Соответствующие слова

$R_{2,i}(a_2, b_2)$ имеют вид: $R_{2,2} = a_2^2 b_2 a_2^2 b_2^2$, $R_{2,4} = a_2^2 b_2 a_2 b_2^2 a_2^2 b_2^2 a_2^3 b_2^2$, $R_{2,6} = a_2^2 b_2 a_2 b_2 a_2^3 b_2^2 a_2^2 b_2 a_2^3 b_2^2 a_2 b_2^2$, $R_{2,8} = a_2^2 b_2 a_2 b_2^2 a_2 b_2 a_2^3 b_2^2 a_2^2 b_2 a_2^3 b_2^2 a_2^3 b_2^2$, $R_{2,10} = a_2^2 b_2 a_2 b_2^2 a_2 b_2 a_2^3 b_2^2 a_2^2 b_2 a_2^3 b_2^2 a_2^3 b_2^2 a_2 b_2^2$.

Псевдоконечные группы из леммы 9 найдены с использованием леммы 8 и с помощью компьютерных вычислений с программой Maple.

Лемма 10. Группы H_2^i , $1 \leq i \leq 10$, содержат неабелеву свободную подгруппу.

Доказательство. Рассмотрим факторгруппы $H_{2,i} = \langle a_{2,i}, b_{2,i} \mid a_{2,i}^2 = b_{2,i}^3 = R'_{2,i}(a_{2,i}, b_{2,i})^2 = R'_{2,i}(a_{2,i}^{-1}, b_{2,i}^{-1})^2 = 1 \rangle$ групп H_2^i , где $R'_{2,i}(a_{2,i}, b_{2,i})$ – циклическая редукция слова $R_{2,i}(a_{2,i}, b_{2,i})$ в свободном произведении $\langle a_2 \mid a_2^2 = 1 \rangle * \langle b_2 \mid b_2^3 = 1 \rangle$. Ясно, что группы $H_{2,i}$ имеют копредставление $H_{2,i} = \langle a_{2,i}, b_{2,i} \mid a_{2,i}^2 = b_{2,i}^3 = 1 \rangle$, т. е. являются свободным произведением циклических групп порядка 2 и 3, а поэтому содержат неабелеву свободную подгруппу. Следовательно, группы H_2^i также содержат неабелеву свободную подгруппу.

1. Fine B., Rosenberger G. Algebraic generalizations of discrete groups. A path to combinatorial group theory through one-relator products. New York, 1999.

2. Howie J., Kopteva N. // J. Group Theory. 2006. Vol. 9. P. 173.

3. Majeed A., Masson A.W. // Glasgow Math. J. 1978. Vol. 19. P. 45.

4. Magnus W. // Result. der Math. 1981. Vol. 4. P. 171.

5. Horowitz R. // Comm. Pure Appl. Math. 1972. Vol. 25. P. 635.

6. Беньш-Кривец В.В., Хуа Сюин // Изв. ГГУ. 2008. № 2 (74). С. 13.

7. Beniash-Kryvets V.V. // Proceedings of the International Conference on Mathematics and its Application (ICMA 2004). Kuwait, 2004. P. 59.

8. Vinberg E.B., Kaplinsky R. // Groups: topological, combinatorial and arithmetic aspects. Papers from the conference, Bielefeld, 1999. Cambridge, 2004. LMS Lecture Note Series. Vol. 311. P. 564.

Поступила в редакцию 04.09.11.

Валерий Вацлавович Беньш-Кривец – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей алгебры и защиты информации.

Янина Александровна Жуковец – аспирант кафедры алгебры и геометрии БГПУ им. М. Танка. Научный руководитель – В.В. Беньш-Кривец.