УДК 519.854.3:519.852.2

В.А. ШЛЫК

ОПОРНЫЕ ВЕРШИНЫ ГЛАВНОГО МНОГОГРАННИКА ГОМОРИ

We introduce two combinatorial operations and prove that they transform vertices of the Master Gomory Polyhedron (MGP) to adjacent vertices. This implies that the MGP is determined by the subset of its support vertices, those that do not result from other vertices by these operations. We establish interrelations between the coefficients of the nontrivial facets of the MGP that pass through a given vertex, construct new points on these facets, and prove that the MGP is of diameter 2.

Применение предложенного Ральфом Гомори в 1960-х гг. теоретико-группового подхода к задаче целочисленного линейного программирования (ЦЛП) приводит к ее ослабленному варианту – оптимизационной задаче на конечной абелевой группе G [1–3]. Допустимыми решениями новой задачи являются неотрицательные целочисленные решения $t=(t(g), g\in H)$ уравнения

$$\sum_{g\in H} t(g)g = g_0$$

на G, где $H\subset G$, $g_0\in G$. Их выпуклая оболочка образует многогранник Гомори $P(G,H,g_0)$, известный также как угловой многогранник. Особое значение имеет главный многогранник Гомори $P(G,g_0)=P(G,G^+,g_0)$, где $G^+=G\setminus\{\overline{0}\}$, $\overline{0}$ – нулевой элемент группы G, поскольку из его вершин и фасет можно построить вершины и фасеты каждого $P(G,H,g_0)$ [2, 4].

Многогранник Гомори тесно связан с многогранником задачи ЦЛП – его фасеты дают для нее сильные отсечения, в том числе и для смешанной задачи [5]. До 1990-х гг. практическая применимость теоретико-группового подхода вызывала сомнения, поскольку методы ветвей и границ давали лучшие результаты. Признание пришло после разработки эффективных методов построения фасет $P(G,g_0)$ и из них – отсечений, а также алгоритмов их применения. Число работ, посвященных фасетам, резко возросло [5–9]. Что касается вершин, то после ключевой статьи Гомори [4] можно упомянуть только работы [10–12], в которых даны оценки их числа. О самих вершинах, равно как и о структуре множества вершин, после 1969 г. новых результатов получено не было. Это подтверждают и слова Гомори [7]: «За исключением таблиц, приведенных в первоначальной статье об угловых многогранниках [4], их вершины до сих пор не изучены», «понимание этих многогранников, которые можно считать атомами ЦЛП, находится только в начальной стадии».

В работе рассматриваются вершины главного многогранника Гомори

$$P(G,g_0)=\text{conv.hull}\left\{t=(t(g), g\in G^+): \sum_{g\in G^+} t(g)g = g_0, t(g)\in\mathbb{Z}, t(g)\geq 0, g\in G^+\right\}, \tag{1}$$

лежащего в пространстве $\mathbb{R}^{D-1}$, где D – порядок группы G. Далее считаем $D>2$.

Мы используем два результата Гомори [4]. Все вершины $P(G,g_0)$ являются его неприводимыми точками. Точка t, решение (1), называется неприводимой, если для любых точек $r=(r(g), g\in G^+)$ и $s=(s(g), g\in G^+)$ таких, что $0\leq r(g), s(g)\leq t(g)$, $r\neq s$, выполняется неравенство

$$\sum_{g\in G^+} r(g)g \neq \sum_{g\in G^+} s(g)g. \tag{2}$$

Второй результат описывает фасеты $P(G,g_0)$, которые принято отождествлять с определяющими их неравенствами

$$\sum_{g\in G^+} \pi(g)t(g) \geq \pi_0$$

и обозначать (π,π_0), где $\pi=(\pi(g), g\in G^+)$ – вектор коэффициентов. Фасеты $P(G,g_0)$ подразделяются на два типа. Тривиальные фасеты задаются неравенствами $t(g)\geq 0$, $g\in G^+$. Нетривиальные фасеты удовлетворяют свойству субаддитивной характеризации: это такие неравенства (π,π_0), что $\pi_0>0$, а вектор π есть базисное допустимое решение системы

$$\pi(g_0)=\pi_0, \tag{3а}$$

$$\begin{aligned}
&\pi(g)+\pi(g_0-g)=\pi_0,\ g\in G^+, && g\neq g_0,\\
&\pi(g_1)+\pi(g_2)\geq \pi(g_1+g_2), && g_1,g_2\in G^+,\\
&\pi(g)\geq 0, && g\in G^+,
\end{aligned} \tag{3б}$$

в которой неравенство (3а) опускается в случае $g_0=\overline{0}$.

В работе установлены соотношения между коэффициентами нетривиальных фасет, проходящих через заданную вершину $t\in P(G,g_0)$, и доказано, что точки, построенные из t определенным образом, принадлежат всем нетривиальным фасетам, содержащим t. Введены две комбинаторные операции, применение которых к вершинам $P(G,g_0)$ приводит к смежным вершинам. Отсюда следует, что главный многогранник Гомори определяется множеством своих опорных вершин – тех, которые невозможно получить с помощью этих операций из других вершин. Построены цепочки вершин, порождающие полные подграфы графа $P(G,g_0)$, и доказано, что главные многогранники Гомори имеют диаметр 2.

Через $V(G,g_0)$ обозначим множество вершин $P(G,g_0)$ и для $t\in P(G,g_0)$ обозначим $G_t=\{g\in G^+ \mid t(g)>0\}$.

1. Вершины на нетривиальных фасетах. Сформулируем полезные свойства неприводимых точек $P(G,g_0)$.

Лемма. *Пусть* $t\in P(G,g_0)$ *– неприводимая точка и точка* $u=(u(g), g\in G^+)$, $u\neq t$, *имеет координаты* $0\leq u(g)\leq t(g)$, $g\in G^+$. *Тогда справедливы утверждения а)* $\sum_{g\in G^+} u(g)g\notin G_t$ *и б)* $\sum_{g\in G^+} u(g)g\neq\overline{0}$.

Доказательство. Утверждение а) следует из неприводимости t. Утверждение б) докажем от противного. Предположив, что б) неверно, положим $r=t$ и $s=(t(g)-u(g), g\in G^+)$. Тогда $0\leq r(g), s(g)\leq t(g)$, $r\neq s$, и $\sum_{g\in G^+} r(g)g=\sum_{g\in G^+} s(g)g$, что противоречит неприводимости t. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть вершина* t *многогранника* $P(G,g_0)$ *принадлежит нетривиальной фасете* (π,π_0), *целочисленная точка* $u=(u(g), u\in G^+)$ *удовлетворяет условиям* $0\leq u(g)\leq t(g)$, $g\in G^+$, *и* $h=\sum_{g\in G^+} u(g)g$. *Тогда справедливы утверждения*:

а) точка $w=(w(g), g\in G^+)$ *с координатами* $w(g)=t(g)-u(g)$ *для* $g\in G^+$, $g\neq h$, *и* $w(h)=t(h)+1$ *принадлежит нетривиальной фасете* (π,π_0);

б) коэффициенты фасеты (π,π_0) *удовлетворяют соотношению*

$$\pi(h)=\sum_{g\in G_t} u(g)\pi(g).$$

Доказательство. Докажем утверждение а). Ввиду утверждения а) леммы $t(h)=0$, и тогда $w\in P(G,g_0)$. Поскольку (π,π_0) – фасета, то

$$\sum_{g\in G^+} w(g)\pi(g)\geq \pi_0. \tag{4}$$

Из условия субаддитивности (3б) следует, что $\sum_{g\in G^+} u(g)\pi(g) \ge \pi(h)$, тогда

$$\sum_{g\in G^+} w(g)\pi(g) = \sum_{\substack{g\in G^+\\ g\neq h}} (t(g)-u(g))\pi(g) + (t(h)+1)\pi(h) \le$$

$$\le \sum_{\substack{g\in G^+\\ g\neq h}} t(g)\pi(g) - \sum_{\substack{g\in G^+\\ g\neq h}} u(g)\pi(g) + t(h)\pi(h) + \sum_{\substack{g\in G^+\\ g\neq h}} u(g)\pi(g) = \tag{5}$$

$$= \sum_{g\in G^+} t(g)\pi(g) = \pi_0.$$

Из противоположных неравенств (4) и (5) получаем, что

$$\sum_{g\in G^+} w(g)\pi(g) = \pi_0 . \tag{6}$$

Тем самым утверждение а) доказано.

Равенство (6) влечет равенство в (5), которое возможно только в случае $\pi(h) = \sum_{g\in G_t} u(g)\pi(g)$.

Утверждение б) и теорема доказаны.

2. Операции построения смежных вершин и опорные вершины. Определим две комбинаторные μ-операции.

Операция $\mu_{h,f}$. Пусть $t\in P(G,g_0)$ – целочисленная точка и $h,f\in G_t$; для определенности будем считать, что $t(h)\le t(f)$. Построим $s=\mu_{h,f}(t)$, положив $s(h)=0$, $s(f)=t(f)-t(h)$, $s(h+f)=t(h+f)t(h)$, $s(g)=t(g)$, $g\in G^+$, $g\neq h,f,h+f$.

Операция μ_h. Пусть $t\in P(G,g_0)$ – целочисленная точка и $t(h)>1$ для некоторого $h\in G_t$. Построим $s=\mu_h(t)$, положив

$$s(h)=0, s(t(h)h)=t(t(h)h)+1, s(g)=t(g), g\in G^+,\ g\neq h, t(h)h.$$

Операции $\mu_{h,f}$ и μ_h применимы к тем целочисленным точкам $P(G,g_0)$, для которых выполняются соответствующие условия на $t(h)$ и $t(f)$.

Теорема 2. *Пусть* t *– вершина* $P(G,g_0)$ *и операция* $\mu_{h,f}$ *при некоторых* $h,f\in G_t$ *(или* μ_h *при некотором* $h\in G_t$*) применима к* t*. Тогда точка* $\mu_{h,f}(t)$ *(или* $\mu_h(t)$*) – вершина* $P(G,g_0)$*, смежная вершине* t*.*

Доказательство. Докажем теорему для случая операции $\mu_{h,f}$, так как случай операции μ_h можно рассмотреть аналогичным образом. Вначале покажем, что если $t\in V(G,g_0)$, то и $s=\mu_{h,f}(t)\in V(G,g_0)$. Поскольку вершина t неприводима, то по утверждению а) леммы $t(h+f)=0$, и тогда

$$\sum_{g\in G^+} s(g)(g) = \sum_{\substack{g\in G^+\\ g\neq h,f,h+f}} s(g)g + (t(f)-t(h))f + t(h)(h+f) = \sum_{g\in G^+} t(g)(g) = g_0,$$

т. е. $s\in P(G,g_0)$. Допустим, что s не является вершиной. Тогда s есть выпуклая комбинация некоторых $k\ge 2$ целочисленных точек $s_j\in P(G,g_0)$, $j=1,2,...,k$: $s=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j s_j$, $s=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j=1$, $\lambda_j>0$. Из $s(h)=0$ следует, что $s_j(h)=0$ при всех j. Определим целочисленные точки t_j, $j=1,2,...,k$, положив

$$t_j(h)=s_j(h+f), \qquad t_j(f)=s_j(h+f)+s_j(f),$$

$$t_j(h+f)=0, \qquad t_j(g)=s_j(g),\ g\in G^+, g\neq h,f,h+f,$$

и убедимся, что $t_j\in P(G,g_0)$:

$$\sum_{g\in G^+} t_j(g)(g) = t_j(h)(h) + t_j(f)(f) + t_j(h+f)(h+f) + \sum_{\substack{g\in G^+\\ g\neq h,f,h+f}} t_j(g)(g) =$$

$$= s_j(h+f)h + s_j(h+f)f + s_j(f)f + \sum_{\substack{g\in G^+ \\ g\neq h,f,h+f}} s_j(g)(g) =$$

$$= s_j(h+f)(h+f) + s_j(f)f + \sum_{\substack{g\in G^+ \\ g\neq h,f,h+f}} s_j(g)(g) = \sum_{g\in G^+} s_j(g)(g) = g_0.$$

Используя равенство $t(h+f)=0,$ покажем, что $\sum_{j=1}^{k}\lambda_j t_j = t$:

$$\sum_{j=1}^{k}\lambda_j t_j(h) = \sum_{j=1}^{k}\lambda_j s_j(h+f) = s(h+f) = t(h+f)+t(h) = t(h),$$

$$\sum_{j=1}^{k}\lambda_j t_j(f) = \sum_{j=1}^{k}\lambda_j s_j(h+f) + \sum_{j=1}^{k}\lambda_j s_j(f) = s(h+f)+s(f) =$$

$$= t(h+f)+t(h)+t(f)-t(h) = t(f),$$

$$\sum_{j=1}^{k}\lambda_j t_j(h+f) = 0 = t(h+f),$$

$$\sum_{j=1}^{k}\lambda_j t_j(g) = \sum_{j=1}^{k}\lambda_j s_j(g) = s(g) = t(g), \qquad g\in G^+,\, g\neq h, f, h+f.$$

Мы получили, что t есть выпуклая комбинация k точек многогранника $P(G,g_0),$ но это противоречит тому, что t – вершина. Следовательно, $s\in V(G,g_0).$

Докажем, что вершины t и s смежны. Будем говорить, что k фасет $(\pi^i,\pi_0^i),$ $i=1,...,k,$ многогранника $P(G,g_0)$ линейно независимы, если линейно независимы векторы коэффициентов $\pi^i,$ $i=1,...,k,$ определяющих их неравенств. Поскольку многогранник $P(G,g_0)\subset\mathbb{R}^{D-1}$ имеет полную размерность, для доказательства смежности вершин t и s достаточно указать наборы $\mathcal{F}_t$ и $\mathcal{F}_s$ из $D-1$ линейно независимых фасет $P(G,g_0),$ содержащих t и s соответственно и отличающихся друг от друга только одной фасетой. Тогда из $D-2$ общих фасет определят ребро (t,s) многогранника $P(G,g_0).$

Включим в $\mathcal{F}_t$ все содержащие t тривиальные фасеты $t(g)\geq 0,$ $g\in G^+\setminus G_t.$ В силу а) леммы $t(h+f)\geq 0$ – одна из этих фасет. Добавим к ним $D-1-|G^+\setminus G_t|=|G_t|$ содержащих t нетривиальных фасет $(\pi,\pi_0),$ выбрав их так, чтобы фасеты в $\mathcal{F}_t$ были линейно независимы в совокупности. Поскольку t – вершина, такие фасеты существуют. Матрица коэффициентов M_t включенных в $\mathcal{F}_t$ фасет содержит единичную подматрицу в строках, соответствующих тривиальным фасетам, и столбцах $j\in G^+\setminus G_t,$ в том числе в столбце $h+f.$ Тогда нетривиальные фасеты из $\mathcal{F}_t$ линейно независимы на столбцах $j\in G_t$.

Построим набор $\mathcal{F}_s$. Включим в него все фасеты из $\mathcal{F}_t,$ кроме $t(h+f)\geq 0,$ и тривиальную фасету $t(h)\geq 0.$ Тривиальные фасеты из $\mathcal{F}_s$ содержат $s=\mu_{h,f}(t)$ по построению, а нетривиальные – по теореме 1 а). Матрица коэффициентов M_s фасет из $\mathcal{F}_s$ содержит единичную подматрицу в столбцах $j\in J_1=((G^+\setminus G_t)\setminus\{h+f\})\cup\{h\}$. В $\mathcal{F}_t$ и $\mathcal{F}_s$ входят одни и те же нетривиальные фасеты, и по теореме 1 б) их коэффициенты удовлетворяют равенству $\pi(h)+\pi(f)=\pi(h+f),$ т. е. (h+f)-й столбец подматрицы коэффициентов нетривиальных фасет равен сумме ее h-го и f-го столбцов. Следовательно, нетривиальные фасеты линейно независимы на столбцах $j\in J_2=(G_t\setminus\{h\})\cup\{h+f\}.$ Так как $J_1\cap J_2=\varnothing,$ фасеты из $\mathcal{F}_s$ линейно независимы, и $\mathcal{F}_s$ – требуемый набор фасет $P(G,g_0).$ Теорема доказана.

Определение. Назовем вершину главного многогранника Гомори *опорной*, если ее нельзя получить из другой вершины с помощью μ-операций.

Неравенство $\sum_{g\in G^+} s(g)\leq\sum_{g\in G^+} t(g)$ для $s=\mu_{h,f}(t)$ и $s=\mu_h(t)$ гарантирует существование опорных вершин. Из теоремы 2 следует, что множество $S(G,g_0)$ опорных вершин $P(G,g_0)$ имеет особое значение, поскольку они образуют базис множества $V(G, g_0)$ – любую другую вершину можно получить из опорной с помощью рекурсивного применения некоторых μ-операций. В примере представлены опорные вершины главного многогранника Гомори $P(G_6, \overline{3})$, где G_6 – циклическая группа порядка 6, $G_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$ с образующим элементом $\overline{1}$.

Пример. Из табл. 1 в [7] находим, что $P(G_6, \overline{3})$ имеет 7 вершин:

$$t_1 = (3,0,0,0,0), \quad t_2 = (1,1,0,0,0), \quad t_3 = (0,0,1,0,0),$$
$$t_4 = (1,0,0,2,0), \quad t_5 = (0,2,0,0,1), \quad t_6 = (0,0,0,1,1), \quad t_7 = (0,0,0,0,3).$$

Опорными являются только вершины t_1, t_4, t_5, t_7, так как $t_2 = \mu_4(t_4)$, $t_3 = \mu_{1,2}(t_2)$ и $t_6 = \mu_{1,4}(t_4)$, хотя их можно получить и другими способами. Нетрудно проверить, что вершины t_1, t_4, t_5, t_7 нельзя получить из других вершин с помощью μ-операций.

3. Рекурсивное применение μ-операций. Пусть операция $\mu_{h,f}$ (или μ_h) применима к вершине $t \in V(G, g_0)$. Назовем $h \in G_t$ ведущим элементом вершины t, а $h + f \in G^+$ (или $t(h)h \in G^+$) – новым элементом вершины $\mu_{h,f}(t)$ (или $\mu_h(t)$). Построим последовательность вершин

$$t = t_0, t_1, t_2, ..., t_m = s \tag{7}$$

такую, что $t_i = \mu(t_{i-1})$, $i = 1, ..., m$, для некоторой μ-операции, причем новый элемент вершины t_i является ведущим при построении вершины t_{i+1}, $i = 1, ..., m-1$.

Теорема 3. *Подграф, порожденный вершинами последовательности (7), является полным подграфом графа многогранника* $P(G, g_0)$.

Доказательство. По теореме 2 теорема 3 верна для $m = 1$, поэтому далее считаем $m > 1$. Достаточно доказать, что вершина s смежна вершине t. Все вершины в (7) различны, поскольку в противном случае найдется набор целых чисел $u = (u(g), g \in H \subset G_t)$, $0 \le u(g) \le t(g)$, такой, что $\sum_{g \in H} u(g)(g) = \overline{0}$, но это противоречит б) леммы. Значит, последовательность (7) является цепью.

Воспользуемся обозначениями из доказательства теоремы 2. Набор $\mathcal{F}_{t_1}$ из $D-1$ линейно независимых фасет $P(G, g_0)$, содержащих вершину t_1, можно выбрать так, чтобы он отличался от аналогичного набора $\mathcal{F}_{t_0}$ тем, что он содержит тривиальную фасету $t(h_0) \ge 0$ вместо фасеты $t(h_1) \ge 0$. Поскольку ведущие элементы $h_1, h_2, ..., h_{m-1}$ вершин $t_1, t_2, ..., t_{m-1}$ являются их новыми элементами, аналогичные утверждения справедливы для некоторых наборов фасет $\mathcal{F}_{t_2}, ..., \mathcal{F}_{t_m}$, содержащих вершины $t_2, ..., t_m$ соответственно. Они отличаются от набора $\mathcal{F}_{t_0}$ только одной фасетой $t(h_0) \ge 0$ вместо фасет $t(h_2) \ge 0, ..., t(h_m) \ge 0$ соответственно, где $h_m = h_{m-1} + f_{m-1}$ для некоторого $f_{m-1} \in G_{t_{m-1}}$, $f_{m-1} \ne h_{m-1}$, или $h_m = t(h_{m-1})h_{m-1}$ в зависимости от вида μ-операции, которая применяется на последнем шаге. Мы показали, что существует набор фасет $\mathcal{F}_s$, отличающийся от $\mathcal{F}_t$ всего лишь одной фасетой, следовательно, вершины s и t смежны. Теорема доказана.

Следствие. Вершина s_0 с координатами $s_0(g_0) = 1$ и $s_0(g) = 0$ для $g \in G^+$, $g \ne g_0$, смежна всем остальным вершинам многогранника $P(G, g_0)$.

Доказательство. Заметим, что s_0 – вершина $P(G, g_0)$. Для произвольной вершины $t \in P(G, g_0)$, $t \ne s_0$, построим цепь (7), оканчивающуюся в вершине $s = s_0$. Если $t(h_0) > 1$ для некоторого $h_0 \in G_t$, то положим $t_1 = \mu_{h_0}(t)$, так что $t_1 = t(h_0)h_0$. Если же $t(g) = 1$ для всех $g \in G_t$, то положим $t_1 = t$ и возьмем произвольный элемент $g \in G_t$ в качестве h_1. В любом случае ввиду а) леммы получим $t_1(h_1) = 1$. Продолжим построение цепи (7) пока возможно, применяя на каждом шаге только операции $\mu_{h,f}$ и следя за выбором только ведущих элементов h, но не f. На последнем шаге мы придем к s_0, так как в итоге будут просуммированы все элементы $g \in G_t$ в количестве $t(g)$ раз, что даст общую сумму g_0. Для завершения доказательства осталось применить теорему 2. Следствие доказано.

Напомним, что диаметром многогранника называется диаметр его графа.

Теорема 4. *Диаметр главного многогранника Гомори равен 2*.

Доказательство следует из предыдущего следствия, так как каждая пара вершин $P(G, g_0)$ соединена путем длины 2, проходящим через вершину s_0.

Согласно [10] любое продвижение в исследовании главного многогранника Гомори находит прямое отражение в отсечениях, а значит, и в улучшенных алгоритмах решения задач ЦЛП. Нами доказано существование опорных вершин, предложен способ перехода к смежным вершинам и установлена связь вершин с фасетами. Эти результаты могут быть использованы при решении оптимизационной задачи на группе, для построения фасет, а затем и отсечений для задач ЦЛП. Опорные вершины представляют особый интерес, вычисления показывают, что их число часто намного меньше числа всех вершин.

Продвижению в исследовании способствовало изучение политопов разбиений чисел [14–16]. Их нетривиальные фасеты описываются системой субаддитивных неравенств и системой, подобной (4), и они тоже обладают опорными вершинами. Вычисления свидетельствуют о значительном уменьшении доли опорных вершин политопов разбиений среди всех вершин с ростом разбиваемого числа. Можно ожидать аналогичную картину при увеличении порядка группы и для многогранников Гомори. Каковы числа вершин, опорных вершин и их свойства – только некоторые из вопросов открытых для дальнейших исследований.

Автор выражает признательность Р. Гомори и Э. Джонсону за информацию о состоянии исследований рассматриваемого многогранника.

1. Gomory R.E. // Natl. Acad. Sci. 1965. Vol. 53. № 2. P. 260.
2. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. М., 1974.
3. Nemhauser G.L., Wolsey L.A. Integer and Combinatorial Optimization. Wiley, 1999.
4. Gomory R.E. // Linear Algebra Appl. 1969. Vol. 2. № 4. P. 451.
5. Richard J.-Ph.P., Dey S.S. // 50 Years of Integer Programming 1958–2008 / M. Jünger et al. (eds.). Springer, 2010. P. 727.
6. Cornuejols G. // Ann. Oper. Res. 2007. Vol. 149. № 1. P. 63.
7. Gomory R.E., Johnson E.L. // Math. Program. 2003. Vol. 96. P. 341.
8. Gomory R.E., Johnson E.L., Evans L. // Math. Program. 2003. Vol. 96. P. 321.
9. Araoz J., Evans L., Gomory R.E., Johnson E. L. // Math. Program. 2003. Vol. 96. P. 377.
10. Шевченко В.Н. // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. Горький, 1979. С. 109.
11. Веселов С.И. // Кибернетика. 1981. № 6. С. 137.
12. Веселов С.И., Шевченко В.Н. // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. Горький, 1981. С. 39.
13. Gomory R.E., Johnson E.L. // Math. Program. 2003. Vol. 96. P. 181.
14. Шлык В.А. // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1988. № 1. С. 94.
15. Shlyk V.A. // J. Combin. 2005. Vol. 26. № 8. P. 1139.
16. Шлык В.А. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2009. № 2. С. 109.
17. Шлык В.А. // Докл. НАН Беларуси. 2009. Т. 53. № 6. С. 27.

Поступила в редакцию 15.05.11.

Владимир Александрович Шлык – кандидат физико-математических наук, доцент, докторант Института математики НАН Беларуси.