АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РАЗОМКНУТОЙ НЕМАРКОВСКОЙ СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ $HIMMPP - (GI|\infty)^K$

А. Назаров, А. Моисеев*

Томский государственный университет
Томск, Россия
* alexander-moiseev@mail.ru

В работе представлено исследование разомкнутой немарковской сети массового обслуживания с высокоинтенсивным входящим MMPP-потоком, марковской маршрутизацией, произвольным обслуживанием и неограниченным числом приборов в узлах. Получены средние значения для числа приборов, занятых в узлах рассматриваемой сети обслуживания. Показано, что в условии неограниченно растущей интенсивности входящего потока многомерное распределение вероятностей числа занятых приборов в узлах сети можно аппроксимировать многомерным нормальным, получены параметры этого распределения.

Ключевые слова: сеть массового обслуживания, MMPP-поток, асимптотический анализ.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследованию сетей массового обслуживания посвящено значительное число работ (см., например, обзор [1]). Достаточно полный материал исследований, накопившийся к настоящему времени в теории сетей массового обслуживания, представлен в [2]. Однако, большинство исследований в этой области посвящено сетям с пуассоновским входящим потоком. В настоящей же работе представлено исследование сети массового обслуживания с входящим MMPP-потоком в условии его высокой интенсивности. Такой поток событий будем обозначать HIMMPP (High Intensive Markov-Modulated Poisson Process).

В работе выполнен асимптотический анализ разомкнутой сети массового обслуживания с входящим HIMMPP-потоком, неограниченным числом приборов в узлах и рекуррентным обслуживанием заявок в условии растущей интенсивности входящего потока.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Рассмотрим разомкнутую [2] сеть массового обслуживания с высокоинтенсивным входящим MMPP-потоком. Сеть содержит K узлов, каждый из которых является системой массового обслуживания с неограниченным числом приборов и произвольным распределением $B_k(x)$ времени обслуживания заявок в k-ом узле, одинаковым для всех заявок этого узла ($k = \overline{1, K}$).

Входящий высокоинтенсивный MMPP-поток задан матрицей инфинитезимальных характеристик вида $N\mathbf{Q} = \{Nq_{\nu\eta}\}_{\nu,\eta=\overline{1,L}}$, где L – число состояний управляющей цепи Маркова, а также условными интенсивностями $N\lambda_1, ..., N\lambda_L$, определяющими параметры входящего потока при условии, что управляющая цепь находится в соответствующем состоянии. Параметр N, который встречается в этих выражениях, в теоретических исследованиях будем полагать неограниченно большим ($N \to \infty$).

Будем использовать обозначения: $\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, ..., \lambda_L\}$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{0}$ – векторы-столбцы длины L, состоящие соответственно из единиц и нулей. Следует заметить, что матрица $\mathbf{Q}$ обладает свойством

$$\mathbf{QE} = \mathbf{0}. \tag{1}$$

Пусть задано распределение вероятностей $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, \ldots, v_K\}$ того, что заявка входящего потока с вероятностью v_k ставится для обслуживания на k-й узел сети. Также пусть задана матрица маршрутизации $\mathbf{r} = \{r_{kl}\}_{k,l=\overline{1,K}}$ заявок по узлам сети. Здесь r_{kl} есть вероятность того, что заявка, завершив обслуживание в k-ом узле, переходит для обслуживания в l-й узел. Через r_{k0} обозначим вероятность того, что заявка, завершив обслуживание на k-ом узле, покидает сеть массового обслуживания. Естественно, что для любого $k = \overline{1, K}$ выполняются условия нормировки $r_{k0} + \sum_{l=1}^{K} r_{kl} = 1$.

Ставится задача нахождения K-мерного совместного распределения вероятностей числа приборов, занятых в узлах рассматриваемой сети. Решение этой задачи выполним, применяя методы динамически просеянного потока и асимптотического анализа [3] в предельном условии неограниченно растущей интенсивности входящего потока, то есть при $N \to \infty$.

3. МЕТОД ДИНАМИЧЕСКИ ПРОСЕЯННОГО ПОТОКА ДЛЯ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Изобразим $K + 1$ параллельных осей времени (рис. 1), пронумерованных от нуля до K. Оси под номерами от 1 до K будут соответствовать узлам сети с такими же номерами, а ось под номером 0 будет использоваться для изображения событий входящего потока сети (события помечены крестами на оси).

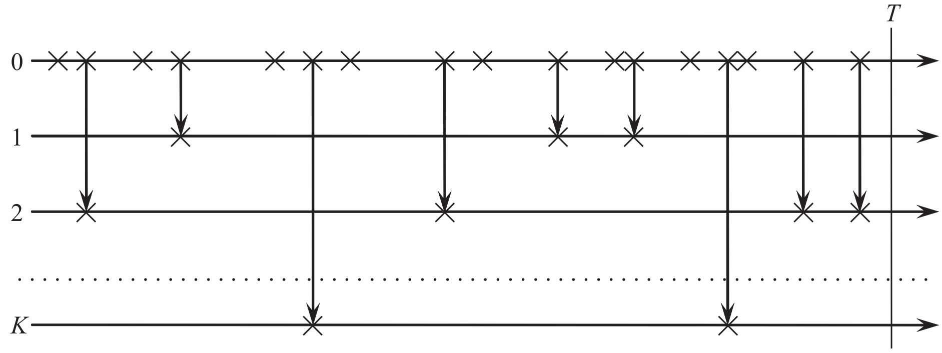

Рис. 1. Просеивание событий входящего потока на узлы сети

Пусть зафиксирован некоторый момент времени T. Обозначим через $S_k(t)$ при $t \leq T$ ($k = \overline{1,K}$) вероятность того, что заявка входящего потока, поступившая в момент времени t в сеть обслуживания, в момент T будет обслуживаться в k-ом узле. С вероятностью $S_0(t)$ рассматриваемая заявка покинет сеть, завершив обслуживание до момента времени T. Очевидно, что для вероятностей $S_k(t)$ и $S_0(t)$ при любом $t \leq T$ выполняется равенство

$$S_0(t) = 1 - \sum_{k=1}^{K} S_k(t). \tag{2}$$

Основная идея метода динамически просеянного потока для сети массового обслуживания заключается в следующем. Всякое событие входящего потока, наступившее в момент времени t, с вероятностью $S_0(t)$ исключается из дальнейшего рассмотрения, а с динамической (зависящей от времени) вероятностью $S_k(t)$ для $k = \overline{1,K}$ просеивается на k-ую ось времени (рис. 1). Заметим, что на k-ой оси времени реализованы моменты поступления в сеть тех и только тех заявок, которые в момент T будут находиться на обслуживании в k-ом узле рассматриваемой сети.

Обозначим через $i_k(T)$ число заявок, обслуживаемых в k-ом узле сети в момент времени T, а через $n_k(t)$ – число событий, наступивших в k-ом просеянном потоке (на k-ой оси времени) до момента t. В силу способа построения рассматриваемых просеянных потоков при всех $k = \overline{1,K}$ выполняются равенства

$$n_k(T) = i_k(T), \tag{3}$$

которые являются основными для получения результатов в методе динамически просеянного потока.

Далее, выполняя исследование K-мерного просеянного потока, то есть K-мерного случайного процесса

$$\mathbf{n}(t) = \{n_1(t), n_2(t), \ldots, n_K(t)\}^{\mathrm{T}}$$

и рассматривая его характеристики в момент времени $t = T$ в силу основного равенства (3) метода динамически просеянного потока, найдем соответствующие вероятностные характеристики числа занятых приборов, то есть сечение K-мерного случайного процесса

$$\mathbf{i}(t) = \{i_1(t), i_2(t), \ldots, i_K(t)\}^{\mathrm{T}}$$

в момент времени $t = T$. Эти характеристики будут являться характеристиками стационарного распределения процесса $\mathbf{i}(t)$, функционирующего в стационарном режиме.

4. ВЕРОЯТНОСТИ ПРОСЕИВАНИЯ

Заметим, что каждая заявка, поступающая в рассматриваемую сеть реализует некоторую траекторию (реализацию) полумарковского процесса [4], принимающего значения $k = \overline{0,K}$. Для этого процесса состояние 0 будем считать поглощающим – попадание в него обрывает (прекращает) развитие процесса. Этот полумарковский процесс начинается в момент времени t поступления заявки в сеть выбором с вероятностью v_k начального состояния k, в котором находится в течение случайного времени с функцией распределения $B_k(x)$, далее с вероятностью $r_{k\nu}$ $(\nu = \overline{1,K})$ переходит в ν-ое состояние, в котором находится случайное время с функцией распределения $B_\nu(x)$, либо с вероятностью r_{k0} переходит в нулевое (поглощающее) состояние. Если процесс попал в состяние $\nu \neq 0$, то дальнейшее его развитие определяется набором функций распределения $B_\nu(x)$ и вероятностями переходов $r_{\nu l}$, $l = \overline{0,K}$.

Пусть t – момент начала развития рассматриваемого полумарковского процесса. Обозначим через $k(\tau)$ его значение в момент времени $t+\tau$ $(\tau > 0)$. Вероятности просеивания определяются равенствами

$$S_k(t) = \mathrm{P}\{k(T-t) = k\},\ k = \overline{0,K}.$$

Можно показать, что вектор-строка $\mathbf{S}(t)$ вероятностей просеивания $S_k(t)(k = \overline{1,K})$ удовлетворяет выражению:

$$\mathbf{S}(t) = \frac{1}{2\pi}\mathbf{v}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-j\alpha(T-t)}\left(\mathbf{I} - \mathbf{B}^*(\alpha)\mathbf{r}\right)^{-1}\left(\mathbf{B}^*(\alpha) - \mathbf{I}\right)\frac{1}{j\alpha}\,d\alpha,$$

где j – мнимая единица ($j = \sqrt{-1}$), $\mathbf{I}$ – единичная матрица порядка K, $\mathbf{B}^*(\alpha)$ – диагональная матрица, составленная из преобразований Фурье-Стилтьеса $B_k^*(\alpha)$ функций распределения $B_k(x)$:

$$B_k^*(\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{j\alpha x}\,dB_k(x),\ k = \overline{1,K}.$$

Вероятность $S_0(t)$ определим из условия нормировки (2).

Найдем значения $s_k = \int\limits_{-\infty}^{T} S_k(t)\,dt,$ при $k = \overline{1,K}$. Обозначим через $\mathbf{b}$ диагональную матрицу с элементами по главной диагонали, равными b_k – средним значениям времени обслуживания заявок в k-ом узле $(k = \overline{1,K})$. Можно показать, что компоненты вектора-строки

$$\mathbf{s} = \{s_1, s_2, \ldots, s_K\} \qquad (4)$$

определяются равенством:

$$\mathbf{s} = \mathbf{v}(\mathbf{I} - \mathbf{r})^{-1}\cdot\mathbf{b}. \qquad (5)$$

Здесь сомножитель $\mathbf{v}\left(\mathbf{I} - \mathbf{r}\right)^{-1}$ является решением уравнения трафика (закона сохранения для интенсивности) [5]

$$e_k = v_k + \sum_{\nu=1}^{K} e_\nu r_{\nu k},$$

определяющего интенсивность потока, входящего в k-ый узел, нормированную величиной $\lambda_k N$. Диагональные элементы матрицы $\mathbf{b}$ определяют среднее значение времени обслуживания. Следовательно, в силу теоремы Литтла [6], найденные в (5) значения s_k равны нормированным средним значениям числа приборов, занятых в узлах рассматриваемой сети массового обслуживания.

5. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ КОЛМОГОРОВА

Пусть величина $m(t)$ определяет состояние управляющей цепи Маркова входящего потока в момент времени t. Рассмотрим $(K+1)$-мерный марковский случайный процесс $\{\mathbf{n}(t), m(t)\}$. Обозначим: $P(\mathbf{n}, m, t) = \mathrm{P}\{\mathbf{n}(t) = \mathbf{n}, m(t) = m\}$. Применяя формулу полной вероятности, запишем равенство

$$P(\mathbf{n}, m, t+\Delta t) = P(\mathbf{n}, m, t)(1 - N\lambda_m \Delta t)(1 + Nq_{mm}\Delta t) + \sum_{\nu \neq m} P(\mathbf{n}, \nu, t) N q_{\nu m} \Delta t +$$

$$+ \sum_{k=1}^{K} P(\mathbf{n} - \mathbf{e}_k, m, t) S_k(t) N\lambda_m \Delta t + P(\mathbf{n}, m, t) S_0(t) N\lambda_m \Delta t + o(\Delta t),$$

где $\mathbf{e}_k$ – вектор, k-ый элемент которого равен единице, а остальные – нулю. Отсюда получаем систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{1}{N}\frac{\partial P(\mathbf{n}, m, t)}{\partial t} = \sum_{\nu=1}^{L} P(\mathbf{n}, \nu, t) q_{\nu m} +$$

$$+ \left[\sum_{k=1}^{K} P(\mathbf{n} - \mathbf{e}_k, m, t) S_k(t) + P(\mathbf{n}, m, t) S_0(t) - P(\mathbf{n}, m, t)\right] \lambda_m. \quad (6)$$

Введем функцию $H(\mathbf{u}, m, t) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_K=0}^{\infty} \mathrm{e}^{ju_1 n_1 + \cdots + ju_K n_K} P(n_1, \ldots, n_K, m, t)$ векторного аргумента $\mathbf{u}^T = \{u_1, u_2, \ldots, u_K\}$, для нее, в силу уравнения (6), можно записать следующее равенство:

$$\frac{1}{N}\frac{\partial H(\mathbf{u}, m, t)}{\partial t} = \sum_{\nu=1}^{L} H(\mathbf{u}, \nu, t) q_{\nu m} +$$

$$+ \left[\sum_{k=1}^{K} e^{ju_k} H(\mathbf{u}, m, t) S_k(t) + H(\mathbf{u}, m, t) S_0(t) - H(\mathbf{u}, m, t)\right] \lambda_m.$$

Обозначив через $\mathbf{H}(\mathbf{u}, t)$ векторную характеристическую функцию в виде вектора-строки с компонентами $H(\mathbf{u}, 1, t), \ldots, H(\mathbf{u}, L, t)$ и учитывая условие нормировки (2), получаем в матричном виде следующую систему уравнений:

$$\frac{1}{N}\frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{u}, t)}{\partial t} = \mathbf{H}(\mathbf{u}, t) \left[\mathbf{Q} + \mathbf{\Lambda} \sum_{k=1}^{K} S_k(t) \left(e^{ju_k} - 1\right)\right]. \quad (7)$$

Решение $\mathbf{H}(\mathbf{u}, t)$ этого матричного уравнения удовлетворяет начальному (при $t = -\infty$) условию

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}, -\infty) = \mathbf{R}, \quad (8)$$

где вектор-строка $\mathbf{R}$ – стационарное распределение вероятностей управляющей цепи Маркова входящего потока, для которого справедливо:

$$\begin{cases} \mathbf{RQ} = \mathbf{0}^{\mathrm{T}}, \\ \mathbf{RE} = 1. \end{cases} \quad (9)$$

Выполнив в уравнении (7) замену

$$\mathbf{H}(\mathbf{u},t) = \mathbf{H}_2(\mathbf{u},t)\mathbf{e}^{\sum\limits_{k=1}^{K} ju_k N\lambda \int\limits_{-\infty}^{t} S_k(\tau)d\tau}, \tag{10}$$

где

$$\lambda = \mathbf{R\Lambda E}, \tag{11}$$

и принимая во внимание (8), для функции $\mathbf{H}_2(\mathbf{u},t)$ получим задачу

$$\begin{cases} \dfrac{1}{N}\dfrac{\partial \mathbf{H}_2(\mathbf{u},t)}{\partial t} + \mathbf{H}_2(\mathbf{u},t)\lambda\sum\limits_{k=1}^{K} ju_k S_k(t) = \mathbf{H}_2(\mathbf{u},t)\left[\mathbf{Q} + \mathbf{\Lambda}\sum\limits_{k=1}^{K} S_k(t)\left(e^{ju_k}-1\right)\right], \\ H_2(\mathbf{u},-\infty) = \mathbf{R}. \end{cases} \tag{12}$$

Для решения этой задачи применим метод асимптотического анализа [3] в предельном условии неограниченно растущей интенсивности ($N \to \infty$) высокоинтенсивного входящего MMPP-потока.

6. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕМАРКОВСКОЙ СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ВЫСОКОИНТЕНСИВНЫМ ВХОДЯЩИМ MMPP-ПОТОКОМ

Обозначив $1/N = \varepsilon^2$, в задаче (12) выполним замены

$$\mathbf{u} = \varepsilon\mathbf{w}, \quad \mathbf{H}_2(\mathbf{u},t) = \mathbf{F}(\mathbf{w},t,\varepsilon), \tag{13}$$

получим задачу

$$\begin{cases} \varepsilon^2\dfrac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{w},t,\varepsilon)}{\partial t} + \mathbf{F}(\mathbf{w},t,\varepsilon)\lambda\sum\limits_{k=1}^{K} jw_k\varepsilon S_k(t) = \mathbf{F}(\mathbf{w},t,\varepsilon)\left[\mathbf{Q} + \mathbf{\Lambda}\sum\limits_{k=1}^{K} S_k(t)\left(e^{jw_k\varepsilon}-1\right)\right], \\ \mathbf{F}(\mathbf{w},-\infty,\varepsilon) = \mathbf{R}. \end{cases} \tag{14}$$

Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Предельное при $\varepsilon \to 0$ значение $\mathbf{F}(\mathbf{w},t)$ задачи (14) имеет вид произведения*

$$\mathbf{F}(\mathbf{w},t) = \mathbf{R}\Phi(\mathbf{w},t), \tag{15}$$

в котором скалярная функция $\Phi(\mathbf{w},t)$ имеет вид

$$\Phi(\mathbf{w},t) = \mathbf{e}^{\lambda\sum_{k=1}^{K}\frac{(jw_k)^2}{2}\int\limits_{-\infty}^{t} S_k(\tau)\,d\tau + \frac{\kappa}{2}\sum_{k=1}^{K}\sum_{\nu=1}^{K} jw_k jw_\nu \int\limits_{-\infty}^{t} S_k(\tau)S_\nu(\tau)\,d\tau}, \tag{16}$$

где

$$\kappa = 2\mathbf{f}(\mathbf{\Lambda} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{E}, \tag{17}$$

а вектор-строка $\mathbf{f}$ является решением неоднородного уравнения

$$\mathbf{fQ} = \mathbf{R}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}).$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы выполним в три этапа.

Этап 1. Обозначив
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{F}(\mathbf{w},t,\varepsilon)=\mathbf{F}(\mathbf{w},t),$$
в задаче (14) выполним предельный переход $\varepsilon\to 0$, получим задачу
$$\begin{cases}\mathbf{F}(\mathbf{w},t)\mathbf{Q}=\mathbf{0}^{\mathrm{T}},\\ \mathbf{F}(\mathbf{w},-\infty)=\mathbf{R}.\end{cases}$$
Очевидно, что в силу (9) функция $\mathbf{F}(\mathbf{w},t)$ имеет вид произведения (15), в котором функция $\Phi(\mathbf{w},t)$ удовлетворяет начальному условию
$$\Phi(\mathbf{w},-\infty)=1. \tag{18}$$

Этап 2. Функцию $\mathbf{F}(\mathbf{w},t,\varepsilon)$ запишем в виде разложения
$$\mathbf{F}(\mathbf{w},t,\varepsilon)=\Phi(\mathbf{w},t)\left[\mathbf{R}+\mathbf{f}\sum_{k=1}^{K}j\varepsilon w_k S_k(t)\right]+\mathbf{O}(\varepsilon^2),$$
где $\mathbf{O}(\varepsilon^2)$ – вектор-строка длины K, состоящий из бесконечно малых величин порядка ε^2. Подставим это разложение в уравнение задачи (14). В результате получим равенство
$$\mathbf{O}(\varepsilon^2)+\mathbf{R}\lambda\sum_{k=1}^{K}j\varepsilon w_k S_k(t)=\mathbf{RQ}+\mathbf{R\Lambda}\sum_{k=1}^{K}j\varepsilon w_k S_k(t)+\mathbf{fQ}\sum_{k=1}^{K}j\varepsilon w_k S_k(t)+\mathbf{O}(\varepsilon^2),$$
из которого при условии $\varepsilon\to 0$ и с учетом (9) получаем неоднородное уравнение для вектора $\mathbf{f}$:
$$\mathbf{fQ}=\mathbf{R}(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{\Lambda}).$$

Этап 3. Просуммируем компоненты левой и правой частей матричного уравнения (14). Для этого умножим справа обе части этого уравнения на $\mathbf{E}$. Используя разложение $e^{j\varepsilon w_k}=1+j\varepsilon w_k+\frac{(j\varepsilon w_k)^2}{2}+O(\varepsilon^3)$, при условии $\varepsilon\to 0$ и с учетом (1), (9), (11), (17) получим линейное однородное по t дифференциальное уравнение относительно функции $\Phi(\mathbf{w},t)$:
$$\frac{\partial\Phi(\mathbf{w},t)}{\partial t}=\Phi(\mathbf{w},t)\left[\lambda\sum_{k=1}^{K}\frac{(jw_k)^2}{2}S_k(t)+\frac{\kappa}{2}\sum_{k=1}^{K}\sum_{\nu=1}^{K}jw_k jw_\nu S_k(t)S_\nu(t)\right],$$
решение которого, удовлетворяющее начальному условию (18), имеет вид
$$\Phi(\mathbf{w},t)=\mathbf{e}^{\lambda\sum_{k=1}^{K}\frac{(jw_k)^2}{2}\int\limits_{-\infty}^{t}S_k(\tau)\,d\tau+\frac{\kappa}{2}\sum_{k=1}^{K}\sum_{\nu=1}^{K}jw_k jw_\nu\int\limits_{-\infty}^{t}S_k(\tau)S_\nu(\tau)\,d\tau},$$
совпадающий с (16). Теорема доказана. □

7. МНОГОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ НЕМАРКОВСКОЙ СЕТИ ОБСЛУЖИВАНИЯ $HIMMPP-(GI|\infty)^K$

При $t=T$ функция $\Phi(\mathbf{w},t)$ из (16) имеет вид

$$\Phi(\mathbf{w},T)=\mathbf{e}^{\lambda\sum_{k=1}^K\frac{(jw_k)^2}{2}\int\limits_{-\infty}^{T}S_k(t)\,dt+\frac{\kappa}{2}\sum_{k=1}^K\sum_{\nu=1}^K jw_kjw_\nu\int\limits_{-\infty}^{T}S_k(t)S_\nu(t)\,dt},$$

в котором, выполнив замену $\mathbf{w}=\mathbf{u}\sqrt{N}$, обратную к (13), и принимая во внимание замену (10), а также равенство (3), получим гауссовскую аппроксимацию $h(\mathbf{u})$ K-мерной характеристической функции числа приборов, занятых в узлах рассматриваемой сети, в виде

$$h(\mathbf{u})=\mathbf{e}^{\sum\limits_{k=1}^K ju_k\lambda N\int\limits_{-\infty}^{T}S_k(t)\,dt+\lambda N\sum\limits_{k=1}^K\frac{(ju_k)^2}{2}\int\limits_{-\infty}^{T}S_k(t)\,dt+\frac{\kappa}{2}N\sum\limits_{k=1}^K\sum\limits_{\nu=1}^K ju_kju_\nu\int\limits_{-\infty}^{T}S_k(t)S_\nu(t)\,dt}=$$

$$=\mathbf{e}^{\sum_{k=1}^K ju_k\lambda Ns_k+\lambda N\sum_{k=1}^K\frac{(ju_k)^2}{2}s_k+\kappa N\sum_{k=1}^K\sum_{\nu=1}^K\frac{ju_kju_\nu}{2}V_{k\nu}},\quad(19)$$

где s_k определены равенствами (4–5), а величины $V_{k\nu}$ равны

$$V_{k\nu}=\int\limits_{-\infty}^{T}S_k(t)S_\nu(t)\,dt.$$

Обозначив через $\mathbf{S}$ диагональную матрицу с элементами s_k на главной диагонали, а через $\mathbf{V}$ – матрицу с элементами $V_{k\nu}$, (19) перепишем в виде

$$h(\mathbf{u})=\mathbf{e}^{j\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\lambda N\mathbf{s}+\frac{1}{2}j\mathbf{u}^{\mathrm{T}}N[\lambda\mathbf{S}+\kappa\mathbf{V}]j\mathbf{u}}.$$

То есть асимптотическое, в условии неограниченно растущей интенсивности входящего MMPP-потока, K-мерное распределение вероятностей числа приборов, занятых в узлах рассматриваемой сети массового обслуживания является гауссовским (нормальным) с вектором средних значений $\lambda N\mathbf{s}$ и матрицей ковариаций $N\left[\lambda\mathbf{S}+\kappa\mathbf{V}\right]$.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, в работе рассмотрена немарковская сеть массового обслуживания с высокоинтенсивным входящим MMPP-потоком, марковской маршрутизацией [2], произвольным обслуживанием и неограниченным числом приборов в узлах. Предложен метод динамически просеянного потока для исследования сетей массового обслуживания с неограниченным числом приборов в узлах. Получено выражение (5) для вычисления средних значений числа приборов, занятых в узлах рассматриваемой сети.

Установлено, что в условии неограниченно растущей интенсивности входящего потока многомерное распределение вероятностей числа занятых приборов в узлах рассматриваемой сети аппроксимируется многомерным нормальным распределением. В работе получены характеристики этого распределения в виде вектора $\lambda N\mathbf{s}$ математических ожиданий и матрицы $N\left[\lambda\mathbf{S}+\kappa\mathbf{V}\right]$ его ковариаций.

Такие же результаты получены для аналогичных сетей с другими типами входящих высокоинтенсивных потоков (рекуррентным, MAP).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Башарин Г. П., Толмачев А. Л.* Теория сетей массового обслуживания и ее приложения к анализу информационно-вычислительных систем / Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. М.: ВИНИТИ. 1983. Т. 21. С. 3–119.
2. *Ивницкий В. А.* Теория сетей массового обслуживания . М.: Изд-во физ.-мат. лит, 2004.
3. *Назаров А. А., Моисеева С. П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания . Томск: Изд-во НТЛ, 2006.
4. *Королюк В. С.* Стохастические модели систем. Киев: Наук. думка, 1989.
5. *Башарин Г. П.* Лекции по математической теории телетрафика: Уч. пособие . М.: РУДН, 2009.
6. *Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания. М.: Изд-во ЛКИ, 2007.