# НАХОЖДЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РЕКУРРЕНТНОГО ПОТОКА ТРЕБОВАНИЙ

**В. Ивницкий**

*Московский государственный университет путей сообщения*

*Москва, Россия*

ivnit@vniizht.ru

Для рекуррентного потока получены нестационарные моменты корреляционной функции остаточного времени до наступления следующего требования и количества поступивших требований, а также асимптотическая формула для момента произвольного порядка числа поступивших требований.

*Ключевые слова:* рекуррентный поток, моменты корреляционной функции, асимптотические формулы для моментов.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть на оси времени последовательно расположены случайные точки $t_0$, $t_1$, $t_2$, $\ldots, t_n, \ldots$, так, что с вероятностью 1 $t_n \geq t_{n-1}, n \geq 1, t_0 \geq 0$. В каждую из точек $t_0$, $t_1$, $t_2, \ldots, t_n, \ldots$ поступает одно требование. Образуем случайные величины $z_0 = t_0$, $z_1 = t_1 - t_0, \ldots, z_n = t_n - t_{n-1}, \ldots$ Если $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ являются независимыми неотрицательными случайными величинами, причем $\mathrm{P}\{z_0 < x\} = \varphi^{(0)}(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} P_i^{(0)} \varphi_i^{(0)}(x)$, а $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ одинаково распределены и их функция распределения имеет произвольный вид $\mathrm{P}\{z_i < x\} = F(x), i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$, то последовательность моментов $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ образует *рекуррентный поток требований* или *процесс восстановления* [1].

Обозначим $z = z_i, i \geq 1$. Введем случайный процесс $\nu(t)$ – количество требований рекуррентного потока, поступивших до момента $t$. Математическое ожидание процесса $\nu(t)$ обозначается через $H(t)$ и называется функцией восстановления.

Возможны два типа зависимости развития рекуррентного потока от начального условия $\nu(0)$ . Первый тип зависимости – поступающие требования просто добавляются к $\nu(0)$, т.е. первое требование потока поступает в момент $t_1$, имеющий функцию распределения $\varphi^{(0)}(x)$ и т.д.

При втором типе зависимости развития рекуррентного потока от начального условия $\nu(0)$ происходит следующее. Функции распределения $\varphi^{(0)}(x)$ и $F(x)$ будут зависеть от $\nu(0)$, т.е. они будут иметь вид $\varphi^{(0)}(x, \nu(0))$, $F(x, \nu(0))$.

Процесс $\nu(t)$ – это немарковский процесс. Для того чтобы он стал марковским, необходимо ввести дополнительную переменную, в данном случае в качестве такой дополнительной переменной можно взять величину $\xi(t)$ – длительность интервала времени с момента $t$ до момента поступления следующего требования. Назовем эту величину *остаточным временем до поступления требования*. Тогда двумерный случайный процесс $\zeta(t) = \{\nu(t), \xi(t)\}$ уже будет марковским. Необходимо найти распределение процесса $\zeta(t)$, характеристики процесса $\xi(t)$ (начальные моменты произвольных порядков, корреляционную функцию), начальные моменты процесса $\nu(t)$ произвольных порядков и его корреляционную функцию при обоих типах зависимости развития рекуррентного потока от начального условия $\nu(0)$, а также первых три члена асимптотического разложения начального момента процесса $\nu(t)$ произвольного порядка при $t \to \infty$.

## 2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ КОЛИЧЕСТВА ПОСТУПИВШИХ ТРЕБОВАНИЙ РЕКУРРЕНТНОГО ПОТОКА

Введем обозначения $P_i(t,x) = \mathrm{P}\{\nu(t) = i, \xi(t) < x\}$, $\tilde{\varphi}_i(u,s) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty e^{-ut-sx} d_x P_i(t,x)$, $\frac{\partial}{\partial x}\tilde{\varphi}_i(u,0) = \int\limits_0^\infty e^{-ut}\frac{\partial}{\partial x}P_i(t,0)dt$, $\tilde{\varphi}_i^{(0)}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} d\varphi_i^{(0)}(x)$, $i = 0,1,\ldots$, $\tilde{\varphi}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx}dF(x)$, $\sum\limits_{i=0}^\infty \tilde{\varphi}_i(u,s)z^i = \tilde{a}(u,s,z)$, $\sum\limits_{i=0}^\infty \frac{\partial}{\partial x}\tilde{\varphi}_i(u,0)z^i = \frac{\partial}{\partial x}\tilde{a}(u,0,z)$, $\sum\limits_{i=0}^\infty \tilde{\varphi}_i^{(0)}(s)z^i = \tilde{a}^{(0)}(s,z)$.

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.** *Преобразование Лапласа по $t$ и Лапласа-Стилтьеса по $x$ производящей функции распределения вероятностей количества поступивших требований рекуррентного потока при произвольных начальных условиях $P_i(0,x) = P_i^{(0)}\varphi_i^{(0)}(x)$, $i = 0,1,\ldots$ $\tilde{a}(u,s,z)$ дается следующей формулой*

$$\tilde{a}(u,s,z) = (u-s)^{-1}\left(\tilde{a}^{(0)}(s,z) - (1-z\tilde{\varphi}(s))\right)\left(1 - z\tilde{\varphi}(u))^{-1}\tilde{a}^{(0)}(u,z)\right). \quad (1)$$

Доказательство проводится стандартным образом.

**Следствие 1**. *Преобразование Лапласа $\tilde{H}(u)$ функции восстановления при произвольных начальных условиях определяется формулой*

$$\tilde{H}(u) = \frac{\partial}{\partial z}\tilde{a}(u,0,1) = u^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial z}\tilde{a}^{(0)}(0,1) + (1-\tilde{\varphi}(u))^{-1}\tilde{a}^{(0)}(u,1)\right). \quad (2)$$

Доказательство также стандартно.

## 3. ОСТАТОЧНОЕ ВРЕМЯ ДО МОМЕНТА ПОСТУПЛЕНИЯ СЛЕДУЮЩЕГО ТРЕБОВАНИЯ

Найдем нестационарные моменты указанного остаточного времени.

**Теорема 2.** *Преобразование Лапласа нестационарного момента остаточного времени до поступления требования $k$-ого порядка, где $k$ – любое конечное целое положительное число, имеет вид*

$$\tilde{a}_k(u) = \sum_{i=2}^{k}(-1)^{k-i}\frac{k!}{u^{k-i+1}i!}\left(\mathrm{M}\xi(0)^i + \mathrm{M}z^i\frac{\tilde{h}(u)}{u}\right) +$$

$$+(-1)^{k-1}\frac{k!}{u^{k+1}}\left[\left(\tau_1+\tau\tilde{\varphi}^{(0)}(u)(1-\tilde{\varphi}(u))^{-1}\right)u-1\right]. \quad (3)$$

Определим корреляционную функцию случайного процесса – остаточного времени с момента $t$ до следующего момента восстановления процесса восстановления.

Формула для $\mathrm{M}\xi(t)$ получается обращением (3) для $k=1$, остается найти выражение для $\mathrm{M}\xi(t)\xi(t')$. Пусть $t'>t$. Имеет место теорема.

**Теорема 3.** *Для* $\mathrm{M}\xi(t)\xi(t')$ *справедлива формула*

$$\mathrm{M}\xi(t)\xi(t')=\int\limits_{t'-t}^{\infty}x^2d_xP(t,x)+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int\limits_0^{t'-t}\left(\int\limits_0^{t'-t-y}\left(\int\limits_{t'-t-y-u}^{t'-t-y}x^2d_xP(x,t)\right)dF(u)\right)dF_n(y)-\right.$$

$$-(t'-t)\int\limits_{t'-t}^{\infty}xd_xP(t,x)+(t'-t)\int\limits_0^{t'-t}\left(\int\limits_0^{t'-t-y}\left(\int\limits_{t'-t-y-u}^{t'-t-y}xd_xP(x,t)\right)dF(u)\right)dF_n(y)+$$

$$+\int\limits_0^{t'-t}\left(\int\limits_0^{t'-t-y}\left(\int\limits_{t'-t-y-u}^{t'-t-y}xyd_xP(x,t)\right)udF(u)\right)dF_n(y)+$$

$$\left.+\int\limits_0^{t'-t}\left(\int\limits_0^{t'-t-y}\left(\int\limits_{t'-t-y-u}^{t'-t-y}xud_xP(x,t)\right)udF(u)\right)dF_n(y)\right), \quad (4)$$

*где* $F_n(y)$ *–* $n$*-кратная свертка распределения* $F(y)$.

Теорема доказывается методом стохастических разностных уравнений [2].

## 4. НАХОЖДЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАЧАЛЬНЫХ МОМЕНТОВ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА КОЛИЧЕСТВА ПОСТУПИВШИХ ТРЕБОВАНИЙ РЕКУРРЕНТНОГО ПОТОКА

Метод стохастических разностных уравнений применяется к величине $\nu(t,x)=\nu(t)I(\xi(t)<x)$ для более удобного способа нахождения нестационарного начального момента произвольного порядка количества поступивших требований рекуррентного потока. Случайный процесс $\nu(t,x)$ можно назвать рекуррентным потоком с дополнительной переменной. Обозначим $n^{(k)}(t,x)=\mathrm{M}\nu(t)^kI(\xi(t)<x)$ , $n^{(k)}(t)=n^{(k)}(t,\infty)$, $k=1,2,\ldots$ Найдем уравнение для $n^{(k)}(t,x)$. Справедлива теорема.

**Теорема 4.** *Для* $n^{(k)}(t,x)$ *имеет место следующее линейное дифференциальное уравнение в частных производных*

$$\frac{\partial}{\partial t}n^{(k)}(t,x)-\frac{\partial}{\partial x}n^{(k)}(t,x)=-\frac{\partial}{\partial x}n^{(k)}(t,0)(1-F(x))+\sum_{i=0}^{k-1}C_k^i\frac{\partial}{\partial x}n^{(i)}(t,0)F(x) \quad (5)$$

*с начальным условием* $n^{(k)}(0,x)=n^{(k)}(0)\tilde{\varphi}^{(0)}(x)$*, где* $n^{(k)}(0)=\mathrm{M}\nu(0)^k$.

Перейдем к решению полученного уравнения. Введем следующие обозначения $\tilde{n}^{(k)}(u,s)=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-ut-sx}d_x n^{(k)}(t,x)dt$, $\tilde{n}^{(k)}(u)=\int\limits_0^\infty e^{-ut}n^{(k)}(t)dt$, $\tilde{\varphi}^{(0)}(s)=\int\limits_0^\infty e^{-sx}d\varphi^{(0)}(x)$, $\frac{\partial}{\partial x}\tilde{n}^{(i)}(u,0)=\int\limits_0^\infty e^{-ut}\frac{\partial}{\partial x}n^{(i)}(t,0)dt$, $i=0,\ldots,k$, $\tilde{\varphi}(s)=\int\limits_0^\infty e^{-sx}dF(x)$.

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 5.** *Для $\tilde{n}^{(k)}(u,s)$ имеет место следующая формула*

$$\tilde{n}^{(k)}(u,s)=(u-s)^{-1}\left(\sum_{i=0}^{k-1}C_k^i\frac{\partial}{\partial x}\tilde{n}^{(i)}(u,0)\left(\tilde{\varphi}(s)-(1-\tilde{\varphi}(s))\tilde{h}_1(u)\right)+\right.$$

$$\left.+\,n^{(k)}(0)\left(\tilde{\varphi}^{(0)}(s)-\tilde{h}(u)(1-\tilde{\varphi}(s))\right)\right), \qquad (6)$$

*где $\frac{\partial}{\partial x}\tilde{n}^{(i)}(u,0)$ определяется по рекуррентной формуле*

$$\frac{\partial}{\partial x}\tilde{n}^{(i)}(u,0)=\sum_{j=0}^{i-1}C_i^j\frac{\partial}{\partial x}\tilde{n}^{(j)}(u,0)\tilde{h}_1(u)+n^{(i)}(0)\tilde{h}(u), \qquad (7)$$

$$\tilde{h}_1(u)=\tilde{\varphi}(u)(1-\tilde{\varphi}(u))^{-1}, \tilde{h}(u)=\tilde{\varphi}^{(0)}(u)(1-\tilde{\varphi}(u))^{-1}, \frac{\partial}{\partial x}\tilde{n}^{(0)}(u,0)=\tilde{h}(u).$$

Доказательство проводится стандартным образом применением к (5) преобразований Лапласа и Лапласа–Стилтьеса соответственно.

**Следствие 2**. *Для преобразования Лапласа нестационарного начального момента $k$-го порядка количества поступивших требований рекуррентного потока имеет место формула*

$$\tilde{n}^{(k)}(u)=u^{-1}\left(\sum_{i=0}^{k-1}C_k^i\frac{\partial}{\partial x}\tilde{n}^{(i)}(u,0)+n^{(k)}(0)\right), \qquad (8)$$

*где $\frac{\partial}{\partial x}\tilde{n}^{(i)}(u,0)$ определяется рекуррентной формулой (7) по $i$.*

Из (8) и (7) получаем преобразование Лапласа нестационарного математического ожидания количества поступивших требований $\tilde{n}(u)$. Имеем

$$\tilde{n}(u)=u^{-1}\left(\tilde{h}(u)+n^{(1)}(0)\right). \qquad (9)$$

Из (8) и (7) получаем преобразование Лапласа нестационарного второго начального момента количества поступивших требований $\tilde{n}^{(2)}(u)$. Имеем

$$\tilde{n}^{(2)}(u)=u^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{n}^{(0)}(u,0)+2\frac{\partial}{\partial x}\tilde{n}^{(1)}(u,0)+n^{(2)}(0)\right)=$$

$$=u^{-1}\left(\tilde{h}(u)+2\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{n}^{(0)}(u,0)\tilde{h}_1(u)+n^{(1)}(0)\tilde{h}(u)\right)+n^{(2)}(0)\right)=$$

$$= u^{-1}\left(\tilde{h}(u) + 2\left(\tilde{h}(u)\tilde{h}_1(u) + n^{(1)}(0)\tilde{h}(u)\right) + n^{(2)}(0)\right) =$$

$$= u^{-1}\left(n^{(2)}(0) + \tilde{h}(u)\left(1 + 2\left(n^{(1)}(0) + \tilde{h}_1(u)\right)\right)\right). \quad (10)$$

Обращая (10), получаем второй начальный нестационарный момент $n^{(2)}(t,\infty)$. Обращая (9), получаем первый начальный нестационарный момент $n(t,\infty)$. Отсюда получаем дисперсию количества требований.

Найдем для $\frac{\partial}{\partial x}\tilde{n}^{(i)}(u,0)$ явное функциональное выражение через $\tilde{h}_1(u)$ и $\tilde{h}(u)$. Справедлива следующая теорема.

**Теорема 6.** *Выражение $\frac{\partial}{\partial x}\tilde{n}^{(i)}(u,0)$ представляется в виде функциональной зависимости от $\tilde{h}_1(u)$, $\tilde{h}(u)$ и $n^{(j)}(0)$, $j = 0,1,2,\ldots$ следующей формулой*

$$\frac{\partial}{\partial x}\tilde{n}^{(i)}(u,0) = \tilde{h}(u)\sum_{l=0}^{i} a_l^{(i)}\tilde{h}_1^l(u), \quad (11)$$

*где $a_l^{(i)}$ определяются явными формулами и рекуррентными соотношениями*

$$a_i^{(i)} = i!, a_{i-1}^{(i)} = i!\left(0,5(i-1) + n^{(1)}(0)\right),$$

$$a_{i-2}^{(i)} = 0,5i!\left((i-2)\left(\frac{1}{3} + n^{(1)}(0)\right) + 0,5C_{i-2}^2 + n^{(2)}(0)\right), \ldots,$$

$$a_l^{(i)} = \sum_{j=l-1}^{i-1} C_i^j a_{l-1}^{(j)}, \ldots, a_1^{(i)} = \sum_{j=0}^{i-1} C_i^j n^{(j)}(0),$$

$$a_0^{(i)} = n^{(i)}(0), a_0^{(1)} = n^{(1)}(0), a_1^{(1)} = 1,$$

$$a_2^{(2)} = 2, a_1^{(2)} = 2n^{(1)}(0) + 1, a_0^{(2)} = n^{(2)}(0). \quad (12)$$

Раскрывая рекуррентное соотношение и проводя некоторые преобразования, приходим к (12). Из теоремы 6 следует следующая теорема.

**Теорема 7.** *Аналитический вид нестационарного начального момента $k$-го порядка количества поступивших требований рекуррентного потока $h^{(k)}(t)$ ($k$ – произвольное целое положительное число) дается следующей формулой*

$$h^{(k)}(t) = n^{(k)}(0) + \sum_{l=0}^{k-1} A_l(t)\sum_{i=l}^{k-1} C_k^i a_l^{(i)}, \quad (13)$$

*где $A_l(t)$ есть свертка $H_0(t)$ и $l$-кратной свертки $H_1(t)$, $H_0(t)$ – общий процесс восстановления (для которого $\varphi^{(0)}(x) \neq F(x)$), $H_1(t)$ – простой процесс восстановления (для которого $\varphi^{(0)}(x) \equiv F(x)$), $a_l^{(i)}$ определяются явными формулами и рекуррентными соотношениями (12).*

# 5. НАХОЖДЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ПРОЦЕССА ВОССТАНОВЛЕНИЯ (РЕКУРРЕНТНОГО ПОТОКА)

Перейдем к нахождению корреляционной функции процесса восстановления (рекуррентного потока) с дополнительной переменной $\nu(t,x)$.

Выше были указаны способы нахождения $n^{(1)}(t,x)$ и $n^{(2)}(t,x)$.

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 8.** *Для* $\mathrm{M}\nu(t,x)\nu(t',x')$ *справедлива формула*

$$\mathrm{M}\nu(t,x)\nu(t',x') = n^{(2)}\left(t,\min\left(x,x'+(t'-t)\right)\right) - n^{(2)}(t,t'-t)+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int\limits_0^{t'-t}\left(\int\limits_0^{t'-t-y_1} n^{(2)}\left(t,\min(x,x'+t'-t-y_1-y_2,t'-t-y_1)\right)dF(y_2)\right)dF_n(y_1)-\right.$$

$$-\int\limits_0^{t'-t}\left(\int\limits_0^{t'-t-y_1} n^{(2)}(t,t'-t-y_1-y_2)dF(y_2)\right)dF_n(y_1)+$$

$$+(n+1)\left(\int\limits_0^{t'-t}\left(\int\limits_0^{t'-t-y_1} n^{(1)}\left(t,\min(x,x'+t'-t-y_1-y_2,t'-t-y_1)\right)dF(y_2)\right)dF_n(y_1)-\right.$$

$$\left.\left.-\int\limits_0^{t'-t}\left(\int\limits_0^{t'-t-y_1} n^{(1)}(t,t'-t-y_1-y_2)dF(y_2)\right)dF_n(y_1)\right)\right), \qquad (14)$$

*где* $F_n(y)$ *–* $n$*-кратная свертка распределения* $F(y)$.

Найдем корреляционную функцию процесса восстановления $\nu(t)$. Формула для $n^{(1)}(t)$ получается обращением формулы (9). Остается найти $\mathrm{M}\nu(t)\nu(t')$.

**Следствие 3**. *Для* $\mathrm{M}\nu(t)\nu(t')$ *справедлива формула*

$$\mathrm{M}\nu(t)\nu(t') = n^{(2)}(t,\infty) - n^{(2)}(t,t'-t) + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int\limits_0^{t'-t} n^{(2)}(t,t'-t-y_1)dF_n(y_1)-\right.$$

$$-\int\limits_0^{t'-t}\left(\int\limits_0^{t'-t-y_1} n^{(2)}(t,t'-t-y_1-y_2)dF(y_2)\right)dF_n(y_1)+(n+1)\left(\int\limits_0^{t'-t} n^{(1)}(t,t'-t-y_1)dF_n(y_1)-\right.$$

$$\left.\left.-\int\limits_0^{t'-t}\left(\int\limits_0^{t'-t-y_1} n^{(1)}(t,t'-t-y_1-y_2)dF(y_2)\right)dF_n(y_1)\right)\right). \qquad (15)$$

Устремляя в (14) $x,x'\to\infty$, приходим к (15).

Обращение преобразования Лапласа можно производить либо по справочникам операционного исчисления (Дёч Г., Диткин и Прудников), либо численными методами (Стехфест [3]).

# 6. ПРЕДЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ РЕКУРРЕНТНОГО ПОТОКА

Целесообразно рассмотреть случай произвольных начальных условий $\varphi^{(0)}(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} P_i^{(0)} \varphi_i^{(0)}(x)$, $\tilde{\varphi}^{(0)}(u) = \int\limits_0^{\infty} exp(-ux) d\varphi^{(0)}(x)$, $P_i^{(0)} = \mathrm{P}\{\nu(0) = i\}$.

Обозначим $\tau_i^{(0)} = \int\limits_0^{\infty} x d\varphi_i^{(0)}(x)$, $\tau^{(0)} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} P_i^{(0)} \tau_i^{(0)}$, $n^{(1)}(0) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} i P_i^{(0)}$, $\tilde{\varphi}(u) = \int\limits_0^{\infty} e^{-ux} dF(x)$, $\tilde{h}(u) = \int\limits_0^{\infty} e^{-ux} dH(x)$, $\tilde{H}(u) = \int\limits_0^{\infty} e^{-ux} H(x) dx$.

Имеет место теорема.

**Теорема 9.** *Для произвольных начальных условий $n^{(1)}(0)$ и $\varphi^{(0)}(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} P_i^{(0)} \varphi_i^{(0)}(x)$ и нерешетчатых распределениях $F(x)$ и $\varphi^{(0)}(x)$, имеющих конечные начальные моменты $\alpha_2$ и $\alpha_1^{(0)}$, при $t \to \infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$H(t) = \frac{t}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{2\alpha_1^2} - \frac{\alpha_1^{(0)}}{\alpha_1} + n^{(1)}(0) + o(1). \tag{16}$$

Найдем асимптотические формулы для начальных моментов $\nu(t)$ произвольного ($k$-го) порядка при $t \to \infty$ для произвольных начальных условий $n^{(k)}(0) = \mathrm{M}\nu(0)^k$ и $\varphi^{(0)}(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} P_i^{(0)} \varphi_i^{(0)}(x)$ и нерешетчатых распределениях $F(x)$ и $\varphi_i^{(0)}(x)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, имеющих конечные моменты 3-го и 2-го порядка соответственно. Начнем со второго начального момента. Справедлива следующая теорема.

**Теорема 10.** *Для второго начального момента $n^{(2)}(t) = \mathrm{M}\nu(t)^2$ процесса $\nu(t)$ для произвольных начальных условий $n^{(i)}(0) = \mathrm{M}\nu(0)^i$, $i = 1, 2$ и $\varphi^{(0)}(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} P_i^{(0)} \varphi_i^{(0)}(x)$ и нерешетчатых распределений $F(x)$ и $\varphi^{(0)}(x)$, имеющих конечные начальные моменты 3-го и 2-го порядка соответственно, при $t \to \infty$ имеет место асимптотическая формула*

$$n^{(2)}(t) = \frac{t^2}{\alpha_1^2} + \frac{2t}{\alpha_1^2}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} + 2n^{(1)}(0)\alpha_1 - 0,5\alpha_1 - \alpha_1^{(0)}\right) + n^{(2)}(0) + n^{(1)}(0)\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} - \alpha_1^{(0)}\left(1 + 2n^{(1)}(0)\right) +$$
$$+ \frac{2}{\alpha_1^2}\left(\alpha_1\alpha_1^{(0)} + 0,5\alpha_2^{(0)}\right) + \frac{3\alpha_2}{2\alpha_1^2} - \frac{2}{\alpha_1^4}\left(\frac{1}{4}\alpha_2^2 + \frac{1}{3}\alpha_3\alpha_1\right) + 2\frac{\alpha_2}{\alpha_1^3}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \alpha_1 - \alpha_1^{(0)}\right) + o(1). \tag{17}$$

**Следствие 4**. *Для дисперсии процесса $\nu(t)$ с произвольными начальными условиями $n^{(i)}(0) = \mathrm{M}\nu(0)^i$, $i = 1, 2$ и $\varphi^{(0)}(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} P_i^{(0)} \varphi_i^{(0)}(x)$ и нерешетчатых распределений $F(x)$ и $\varphi^{(0)}(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} P_i^{(0)} \varphi_i^{(0)}(x)$, имеющих конечные начальные моменты 3-го и 2-го порядка соответственно, справедлива следующая асимптотическая формула*

$$\mathrm{D}\nu(t) = \frac{t}{\alpha_1^3}\mathrm{D}z_1 + \frac{5\alpha_2^2}{4\alpha_1^4} - \frac{2\alpha_3}{3\alpha_1^3} - \frac{\alpha_2}{2\alpha_1} + \mathrm{D}\nu(0) + \frac{\alpha_1^{(0)}}{\alpha_1} + \frac{\mathrm{D}z_0}{\alpha_1^2} - \frac{\alpha_2\alpha_1^{(0)}}{\alpha_1^3} + o(1). \tag{18}$$

*Доказательство.* Имеем

$$\mathrm{D}\nu(t) = n^{(2)}(t) - H(t)^2 = \frac{t}{\alpha_1^2} + \frac{2t}{\alpha_1^2}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} + n^{(1)}(0)\alpha_1 - 0,5\alpha_1 - \alpha_1^{(0)}\right) + n^{(2)}(0) + n^{(1)}(0)\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}$$

$$-\alpha_1^{(0)}\left(1 + 2n^{(1)}(0)\right) + \frac{2}{\alpha_1^2}\left(\alpha_1\alpha_1^{(0)} + 0,5\alpha_2^{(0)}\right) + \frac{3\alpha_2}{2\alpha_1^2} - \frac{2}{\alpha_1^4}\left(\frac{1}{4}\alpha_2^2 + \frac{1}{3}\alpha_3\alpha_1\right) +$$

$$+2\frac{\alpha_2}{\alpha_1^3}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \alpha_1 - \alpha_1^{(0)}\right) - \frac{t^2}{\alpha_1^2} - \frac{\alpha_2^2}{4\alpha_1^4} - \left(\frac{\alpha_1^{(0)}}{\alpha_1}\right)^2 - n^{(1)}(0)^2 - \frac{2t}{\alpha_1}\left(\frac{\alpha_2}{2\alpha_1^2} - \frac{\alpha_1^{(0)}}{\alpha_1} + n^{(1)}(0)\right) -$$

$$-\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\left(-\frac{\alpha_1^{(0)}}{\alpha_1} + n^{(1)}(0)\right) + 2\frac{\alpha_1^{(0)}}{\alpha_1}n^{(1)}(0) + o(1).$$

После приведения подобных членов приходим к (18). Следствие доказано. □

**Замечание**. *Формула (18) учитывает начальные условия в общем виде.*

Перейдем теперь к рассмотрению возможностей получения предельного поведения при $t \to \infty$ начального момента $n^{(k)}(t)$ процесса $\nu(t)$ $k$-го порядка, где $k$ – произвольное конечное целое число. При этом ограничимся получением первых трех членов разложения $n^{(k)}(t)$ при $t \to \infty$.

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 11.** *Для начального момента $n^{(k)}(t) = \mathrm{M}\nu(t)^k$ процесса $\nu(t)$, где $k$ – произвольное целое положительное число, для произвольных начальных условий $n^{(k)}(0) = \mathrm{M}\nu(0)^k$ и $\varphi^{(0)}(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} P_i^{(0)}\varphi_i^{(0)}(x)$ и нерешетчатых распределений $F(x)$ и $\varphi^{(0)}(x)$, имеющих конечные начальные моменты 3-го и 2-го порядка соответственно, при $t \to \infty$ имеет место асимптотическая формула*

$$n^{(k)}(t) = \frac{t^k}{\alpha_1^k} + \frac{t^{k-1}}{\alpha_1^k}\left(k\left(\frac{k}{2}\frac{\alpha_2}{\alpha_1^k} - (k-1)\alpha_1 - \alpha_1^{(0)}\right) + k!\left(0,5(k-1) + n^{(1)}(0)\right)\frac{\alpha_1}{(k-1)!}\right) +$$

$$+\frac{t^{k-2}}{\alpha_1^k}\Big(k(k-1)\Big((k-1)\alpha_1\alpha_1^{(0)} + 0,5(k-1)\alpha_2 + 0,5\alpha_2^{(0)} + C_{k-1}^2\alpha_1^2 -$$

$$-\frac{1}{\alpha_1^2}\left(\frac{1}{4}C_k^2\alpha_2^2 + \frac{k}{6}\alpha_3\alpha_1\right) + \frac{k}{2}\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(\frac{k}{2}\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - (k-1)\alpha_1 - \alpha_1^{(0)}\right) +$$

$$+k!\left(0,5(k-1) + n^{(1)}(0)\right)\left(\frac{k-1}{2}\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - (k-2)\alpha_1 - \alpha_1^{(0)}\right)\frac{\alpha_1}{(k-2)!} +$$

$$+\left(k!\left(0,25k + 0,5n^{(1)}(0) - \frac{7}{12}\right) +\right.$$

$$\left. + 0,5k!\left((k-3)\left(\frac{1}{3} + n^{(1)}(0)\right) + n^{(2)}(0) + \frac{1}{2}C_{k-3}^2\right)\frac{\alpha_1^2}{(k-2)!}\right) + o(t^{k-2}). \qquad (19)$$

# 7. НАХОЖДЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК РЕКУРРЕНТНОГО ПОТОКА ДЛЯ ВТОРОГО ТИПА ЗАВИСИМОСТИ ОТ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

При втором типе зависимости развития рекуррентного потока от начального условия $\nu(0)$ функции распределения $\varphi^{(0)}(x)$ и $F(x)$ будут зависеть от $\nu(0)$, т.е. они будут иметь вид $\varphi^{(0)}(x, \nu(0))$, $F(x, \nu(0))$. В этом случае нахождение характеристик рекуррентного потока с сводится к тому, что все результаты, полученные выше, надо усреднить по распределению $\nu(0)$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания. М.: КомКнига, 2005.
2. *Ивницкий В. А.* Теория произвольного входящего потока с применениями к нестационарным системам и сетям массового обслуживания. Изд-во “Palmarium”, ФРГ, 2012.
3. *Stehfest H.* Numerical inversion of Laplace transformations // Commun. ACM. 1970. V. 13. № 1. P. 47–49.