1999. Т. 35, № 1. С. 3 — 7

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.42

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ КРАТНЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ

В. В. Амелькин, А. В. Левин

Рассмотрим вещественную автономную систему двух дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = P(x,y), \quad \dot{y} = Q(x,y), \quad (\dot{} = d/dt), \tag{1}$$

где P и Q — голоморфные в любой конечной области фазовой плоскости $\mathbb{R}^2$ функции.

Предположим, что система (1) имеет отрицательно ориентированный предельный цикл Γ, параметрические уравнения которого задаются соотношениями

$$x = f(t), \quad y = g(t), \tag{2}$$

где f и g — периодические функции t с периодом ω.

Если цикл Γ грубый, то вопрос о его устойчивости или неустойчивости решается просто: если характеристический показатель цикла отрицателен, то Γ — устойчивый предельный цикл, если характеристический показатель цикла положителен, то Γ — неустойчивый предельный цикл.

В случае негрубого (кратного) предельного цикла решение вопроса об устойчивости и о степени его негрубости резко усложняется и обычно связывается с изучением в окрестности цикла Γ дифференциального уравнения траекторий системы (1) в так называемой универсальной системе криволинейных координат. Именно выберем в качестве параметра в уравнениях (2) не время t, а длину дуги s предельного цикла, отсчитываемую от некоторой фиксированной точки B_0 на кривой Γ, где под положительным направлением понимается направление движения часовой стрелки. При таком подходе изменению параметра s в положительном направлении соответствует изменение времени $t = \tau(s)$ также в положительном направлении.

Пусть l — длина дуги предельного цикла, соответствующая его однократному обходу, а $x = f(\tau(s)) = \varphi(s)$, $y = g(\tau(s)) = \psi(s)$, где $0 \le s \le l$, — параметрические уравнения предельного цикла (2). Тогда универсальная система криволинейных координат (s, n) задается соотношениями [1]:

$$x = \varphi(s) - n\psi'(s), \quad y = \psi(s) + n\varphi'(s), \tag{3}$$

где $\varphi'(s) = dx/ds|_B = P_0(P_0^2 + Q_0^2)^{-1/2}$, $\psi'(s) = dy/ds|_B = Q_0(P_0^2 + Q_0^2)^{-1/2}$. Здесь P_0 и Q_0 — значения P и Q в точке $B(\varphi(s), \psi(s))$ и, таким образом, формулы (3) однозначным образом связывают прямоугольные координаты (x, y) точки A, лежащей на направленной нормали n, проходящей через точку B предельного цикла, с ее криволинейными координатами.

С учетом формул (3) можно в окрестности предельного цикла Γ выписать дифференциальное уравнение траекторий системы (1) в криволинейных координатах в виде

$$dn/ds = (Q\varphi' - P\psi' - n(P\varphi'' + Q\psi''))/(P\varphi' + Q\psi') = F(s, n), \tag{4}$$

где $\varphi''(s) = -Q_0[P_0^2 Q_{x_0} + P_0 Q_0(Q_{y_0} - P_{x_0}) - Q_0^2 P_{y_0}]/(P_0^2 + Q_0^2)^2$, $\psi''(s) = P_0[P_0^2 Q_{x_0} + P_0 Q_0(Q_{y_0} - P_{x_0}) - Q_0^2 P_{y_0}]/(P_0^2 + Q_0^2)^2$, а P_{x_0}, P_{y_0}, Q_{x_0}, Q_{y_0} — частные производные P и Q при $n = 0$.

Заметим, что в силу голоморфности правой части системы (1) функция F в (4) будет голоморфной по n. Поэтому, разлагая ее в ряд по целым степеням n в окрестности предельного цикла, уравнение (4) можно переписать в виде

$$\frac{dn}{ds} = F'_n(s,0)n + \frac{1}{2!}F''_{n^2}(s,0)n^2 + \ldots + \frac{1}{k!}F^{(k)}_{n^k}(s,0)n^k + \ldots$$

Интегрируя теперь уравнение (4) по s от 0 до l, где l — длина траектории Г, получим так называемую функцию последования

$$\Psi(n_0) = n(l,n_0) - n_0 = \int\limits_0^l F(s,n(s,n_0))\,ds, \tag{5}$$

где $n_0 = n(0)$. Очевидно, что $\Psi(0) = 0$, и поэтому по поведению функции (5) при $n_0 > 0$ и $n_0 < 0$, близких к нулю, можно судить об устойчивости, полуустойчивости и неустойчивости предельного цикла Г. Так, условия

$$\Psi'(0) = \Psi''(0) = \ldots = \Psi^{(k-1)}(0) = 0, \quad \Psi^{(k)}(0) < 0 \quad (> 0), \tag{6}$$

где k — нечетное число, являются необходимыми и достаточными условиями как устойчивости (неустойчивости), так и k-кратности предельного цикла Г. Условия же

$$\Psi'(0) = \Psi''(0) = \ldots = \Psi^{(k-1)}(0) = 0, \quad \Psi^{(k)}(0) \neq 0, \tag{7}$$

где k — четное число, являются необходимыми и достаточными условиями полуустойчивости и k-кратности предельного цикла Г.

Из сказанного выше следует, что для решения вопроса об устойчивости предельного цикла Г и степени его кратности нужно знать явное представление производных $\Psi^{(i)}$.

В работе [2] такое явное представление дается для первых пяти производных. Что же касается представления производной $\Psi^{(k)}(0)$ при произвольном k, то выведенные в [2] формулы оказываются настолько необозримыми, что реально на практике они вряд ли могут быть использованы, при этом трудность их практического применения при достаточно больших k объясняется еще и тем, что всякий раз необходимо предварительно находить функции $F^{(k)}_{n^k}(s,0)$, аналитические представления для которых оказываются довольно сложными. В работе [3], используя результаты работы [4], была предпринята попытка упростить формулы для нахождения $\Psi^{(k)}(0)$. Именно в терминах правых частей уравнений системы (1) и их производных удалось получить формулы рекуррентного типа, взаимно однозначно связанные с производными $\Psi^{(k)}(0)$, позволяющие ответить как на вопрос о степени кратности предельного цикла, так и на вопрос о его устойчивости.

Так, если обозначить $P^2 + Q^2 = b_0$, $(P^2+Q^2)^{1/2} = \beta_0$, $\beta_1 = (Q\,dP/dt - P\,dQ/dt)/b_0$, $(PD^jP + QD^jQ)/j! = b_j$, $(PD^iQ - QD^iP)/i! = g_i$, где $i,j = 1,2,3,\ldots$, а оператор D^i (D^j) определяется равенством $D^\nu = \left[-\frac{Q}{\beta_0}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{P}{\beta_0}\frac{\partial}{\partial y}\right]^\nu$, $\nu = 1,2,3,\ldots$, $d_0 = 1/b_0$, $d_1 = -b_1/b_0^2$, $d_2 = b_1^2/b_0^3 - b_2/b_0^2$, $\ldots$, $d_k = -(1/b_0)(b_kd_0 + b_{k-1}d_1 + \ldots + b_1d_{k-1})$, где $k = 3,4,\ldots$, и учитывать, что функции P и Q всюду рассматриваются вдоль цикла Г, то оказывается, что

$$F^{(k)}_{n^k}(t,0) = k!\left[\beta_0\sum_{i=1}^{k} g_i \sum_{j=0}^{k} d_j + \beta_1 \sum_{l=1}^{k} g_l \sum_{s=0}^{k} d_s\right], \tag{8}$$

где $i+j = l+s+1 = k$. Если положить теперь

$$a_1(t) = \exp\int\limits_0^t F'_n\,d\tau, \quad a_2(t) = \frac{1}{2!}a_1\int\limits_0^t F''_{n^2}a_1\,d\tau, \quad a_3(t) = \frac{1}{3!}a_1\int\limits_0^t F'''_{n^3}a_1^2 d\tau + a_1\int\limits_0^t F''_{n^2}a_2\,d\tau, \quad \ldots$$

$$\ldots, \quad a_{k-1} = a_1 \int\limits_0^t \sum_{j=2}^{k-1} F_{n^j}^{(j)} \sum_{s_1+s_2+\ldots+s_{k-2}=j} \frac{a_1^{s_1-1} a_2^{s_2} \cdots a_{k-2}^{s_{k-2}}}{s_1! s_2! \cdots s_{k-2}!} \, d\tau$$

при условии, что

$$h_1 = \frac{1}{\omega} \int\limits_0^\omega F_n' \, dt = 0, \quad h_2 = \frac{1}{2!\omega} \int\limits_0^\omega F_{n^2}'' a_1 \, dt = 0, \quad h_3 = \frac{1}{3!\omega} \int\limits_0^\omega F_{n^3}''' a_1^2 \, dt = 0, \quad \ldots$$

$$\ldots, \quad h_{k-1} = \frac{1}{\omega} \int\limits_0^\omega \sum_{j=2}^{k-1} F_{n^j}^{(j)} \sum_{s_1+s_2+\ldots+s_{k-2}=j} \frac{a_1^{s_1-1} a_2^{s_2} \cdots a_{k-2}^{s_{k-2}}}{s_1! s_2! \cdots s_{k-2}!} \, dt = 0, \tag{9}$$

где $k = 5, 6, \ldots$, а $s_1, s_2, \ldots, s_{k-2}$ — целые неотрицательные числа такие, что $s_1 + 2s_2 + \ldots$ $\ldots + (k-2)s_{k-2} = k-1$, то выполнение условия $h_k < 0$ (> 0) при k нечетном является необходимым и достаточным условием устойчивости (неустойчивости) и k-кратности предельного цикла Γ, условие же $h_k \neq 0$ при k четном является необходимым и достаточным условием полуустойчивости и k-кратности цикла Γ.

Как видно из аналитического представления постоянных h_i, упрощение в их вычислении может быть достигнуто как за счет более простого, чем (8), представления функций $F_{n^j}^{(j)}$, так и за счет уменьшения числа интегралов в (9), ибо часть из них может обращаться в нуль вдоль траектории Γ.

В работе [5] введены в рассмотрение функции

$$H_1(s,n) = P_x'(x(s,n), y(s,n)) + Q_y'(x(s,n), y(s,n)),$$

$$H_2(s,n) = \partial(PH_1/b_0)/\partial y - \partial(QH_1/b_0)/\partial x, \quad H_3(s,n) = \partial(PH_2/b_0)/\partial y - \partial(QH_2/b_0)/\partial x,$$

$$H_4(s,n) = \partial(PH_3/b_0)/\partial y - \partial(QH_3/b_0)/\partial x, \quad \delta = \exp \delta_1,$$

где $\delta_1 = \int\limits_0^t H_1(s(\tau), 0) \, d\tau$, $\delta_2 = \int\limits_0^t H_2(s(\tau), 0)\delta \, d\tau$, и доказана

Теорема 1. *Если:*

i) $k = 2$ и вдоль замкнутой траектории Γ системы (1) $\overline{h}_1 = \int\limits_0^\omega H_1(s(t), 0) \, dt = 0$, $\overline{h}_2 = \int\limits_0^\omega H_2(s(t), 0)\delta \, dt \neq 0$, то Γ — двукратный полуустойчивый предельный цикл системы (1);

ii) $k = 3$ и вдоль Γ $\overline{h}_1 = \overline{h}_2 = 0$, $\overline{h}_3 = \int\limits_0^\omega H_3(s(t), 0)\delta^2 \, dt < 0$ (> 0), то Γ — трехкратный устойчивый (неустойчивый) предельный цикл системы (1);

iii) $k = 4$ и вдоль Γ $\overline{h}_1 = \overline{h}_2 = \overline{h}_3 = 0$, $\overline{h}_4 = \int\limits_0^\omega H_4(s(t), 0)\delta^3 \, dt + 2\int\limits_0^\omega H_3(s(t), 0)\delta^2\delta_2 \, dt \neq 0$, то Γ — четырехкратный полуустойчивый предельный цикл системы (1).

Обозначив теперь $H_5(s,n) = \partial(PH_4/b_0)/\partial y - \partial(QH_4/b_0)/\partial x$, докажем следующее утверждение.

Теорема 2. *Если $k = 5$ и вдоль замкнутой траектории Γ системы (1)*

$$\overline{h}_1 = \overline{h}_2 = \overline{h}_3 = \overline{h}_4 = 0, \tag{10}$$

$$\overline{h}_5 = \int\limits_0^\omega H_5(s(t), 0)\delta^4 \, dt + 5\int\limits_0^\omega H_4(s(t), 0)\delta^3\delta_2 \, dt + 5\int\limits_0^\omega H_3(s(t), 0)\delta^2\delta_2^2 \, dt < 0 \quad (> 0), \tag{11}$$

то Γ — пятикратный устойчивый (неустойчивый) предельный цикл системы (1).

Доказательство. Следуя [5], введем в рассмотрение алгебраическое произведение $J(u,v) = (P_0 v - Q_0 u)/(P_0^2 + Q_0^2)$, $J_0(u,v) = (P_0 v_0 - Q_0 u_0)/(P_0^2 + Q_0^2)$, где u, v — голоморфные в любой конечной области фазовой плоскости $\mathbb{R}^2$ функции, а u_0, v_0 — их значения в точке $B(\varphi(s), \psi(s))$.

Если воспользоваться теперь формулами (3.25) — (3.28) из [5]:

$$F'_n(s,0) = H_1(s,0)(P_0^2+Q_0^2)^{-1/2} - 2^{-1}(P_0^2+Q_0^2)^{-1}d(P_0^2+Q_0^2)/ds,$$

$$F''_{n^2}(s,0) = H_2(s,0) - [dX_2/ds + X_2J_0(\partial P/\partial n, \partial Q/\partial n)],$$

$$F'''_{n^3}(s,0) = H_3(s,0)(P_0^2+Q_0^2)^{1/2} - [dX_3/ds + 2X_3J_0(\partial P/\partial n, \partial Q/\partial n)],$$

$$F^{(\mathrm{IV})}_{n^4}(s,0) = H_4(s,0)(P_0^2+Q_0^2) - [dX_4/ds + 3X_4J_0(\partial P/\partial n, \partial Q/\partial n)] + 2(P_0^2+Q_0^2)^{1/2}H_{30}X_2 -$$
$$-2H_{20}X_3 + 2X_3[dX_2/ds + X_2J_0(\partial P/\partial n, \partial Q/\partial n)],$$

то можно доказать, что

$$F^{(\mathrm{V})}_{n^5}(s,0) = H_5(s,0)(P_0^2+Q_0^2)^{3/2} - [dX_5/ds + 4X_5J_0(\partial P/\partial n, \partial Q/\partial n)] + 5H_{40}X_2(P_0^2+Q_0^2)+$$
$$+5H_{30}X_2^2(P_0^2+Q_0^2)^{1/2} - 5H_{20}X_4 + 5X_4[dX_2/ds + X_2J_0(\partial P/\partial n, \partial Q/\partial n)]. \qquad (12)$$

Здесь $H_{k0} = H_k(s,0)$, а X_2, X_3, X_4, X_5 — периодические функции s с периодом l, которые задаются формулами:

$$X_2 = J_0\left(-\frac{\partial Q}{\partial n}, \frac{\partial P}{\partial n}\right),$$

$$X_3 = J_0\left(-\frac{\partial^2 Q}{\partial n^2}, \frac{\partial^2 P}{\partial n^2}\right) - \frac{3}{2}J_0\left(-\frac{\partial Q}{\partial n}, \frac{\partial P}{\partial n}\right)^2 - (P_0^2+Q_0^2)^{-1/2}J_0\left(\frac{\partial P}{\partial n}, \frac{\partial Q}{\partial n}\right)H_{10},$$

$$X_4 = J_0\left(-\frac{\partial^3 Q}{\partial n^3}, \frac{\partial^3 P}{\partial n^3}\right) - 4J_0\left(-\frac{\partial Q}{\partial n}, \frac{\partial P}{\partial n}\right)J_0\left(-\frac{\partial^2 Q}{\partial n^2}, \frac{\partial^2 P}{\partial n^2}\right) + 3J_0\left(-\frac{\partial Q}{\partial n}, \frac{\partial P}{\partial n}\right)^3 -$$
$$-H_{20}J_0\left(\frac{\partial P}{\partial n}, \frac{\partial Q}{\partial n}\right) - (P_0^2+Q_0^2)^{-1/2}H_{10}\left[J_0\left(\frac{\partial^2 P}{\partial n^2}, \frac{\partial^2 Q}{\partial n^2}\right) - 5J_0\left(-\frac{\partial Q}{\partial n}, \frac{\partial P}{\partial n}\right)J_0\left(\frac{\partial P}{\partial n}, \frac{\partial Q}{\partial n}\right)\right] -$$
$$-2\left(\frac{\partial H_1}{\partial n}\right)_0(P_0^2+Q_0^2)^{-1/2}J_0\left(\frac{\partial P}{\partial n}, \frac{\partial Q}{\partial n}\right),$$

$$X_5 = J_0\left(-\frac{\partial^4 Q}{\partial n^4}, \frac{\partial^4 P}{\partial n^4}\right) - 5J_0\left(-\frac{\partial Q}{\partial n}, \frac{\partial P}{\partial n}\right)J_0\left(-\frac{\partial^3 Q}{\partial n^3}, \frac{\partial^3 P}{\partial n^3}\right) + 20J_0\left(-\frac{\partial^2 Q}{\partial n^2}, \frac{\partial^2 P}{\partial n^2}\right)J_0\left(-\frac{\partial Q}{\partial n}, \frac{\partial P}{\partial n}\right)^2 -$$
$$-5J_0\left(-\frac{\partial^2 Q}{\partial n^2}, \frac{\partial^2 P}{\partial n^2}\right)^2 - \frac{45}{4}J_0\left(-\frac{\partial Q}{\partial n}, \frac{\partial P}{\partial n}\right)^4 - (P_0^2+Q_0^2)^{-1/2}\left\{3J_0\left(\frac{\partial P}{\partial n}, \frac{\partial Q}{\partial n}\right)\left(\frac{\partial^2 H_1}{\partial n^2}\right)_0 +\right.$$
$$+3\left[J_0\left(\frac{\partial^2 P}{\partial n^2}, \frac{\partial^2 Q}{\partial n^2}\right) - 4J_0\left(-\frac{\partial Q}{\partial n}, \frac{\partial P}{\partial n}\right)J_0\left(\frac{\partial P}{\partial n}, \frac{\partial Q}{\partial n}\right)\right]\left(\frac{\partial H_1}{\partial n}\right)_0 + \left[J_0\left(\frac{\partial^3 P}{\partial n^3}, \frac{\partial^3 Q}{\partial n^3}\right) -\right.$$
$$-6J_0\left(\frac{\partial P}{\partial n}, \frac{\partial Q}{\partial n}\right)J_0\left(-\frac{\partial^2 Q}{\partial n^2}, \frac{\partial^2 P}{\partial n^2}\right) - 6J_0\left(-\frac{\partial Q}{\partial n}, \frac{\partial P}{\partial n}\right)J_0\left(\frac{\partial^2 P}{\partial n^2}, \frac{\partial^2 Q}{\partial n^2}\right) - 6J_0\left(\frac{\partial P}{\partial n}, \frac{\partial Q}{\partial n}\right)^3 +$$
$$\left.\left.+18J_0\left(-\frac{\partial Q}{\partial n}, \frac{\partial P}{\partial n}\right)^2 J_0\left(\frac{\partial P}{\partial n}, \frac{\partial Q}{\partial n}\right)\right]H_{10}\right\} + J_0\left(\frac{\partial P}{\partial n}, \frac{\partial Q}{\partial n}\right)\left(\frac{\partial H_2}{\partial n}\right)_0 + H_{20}\left[J_0\left(\frac{\partial^2 P}{\partial n^2}, \frac{\partial^2 Q}{\partial n^2}\right) -\right.$$
$$\left.-4J_0\left(-\frac{\partial Q}{\partial n}, \frac{\partial P}{\partial n}\right)J_0\left(\frac{\partial P}{\partial n}, \frac{\partial Q}{\partial n}\right)\right] + 2(P_0^2+Q_0^2)^{1/2}J_0\left(\frac{\partial P}{\partial n}, \frac{\partial Q}{\partial n}\right)H_{30},$$

где $(\partial H_1/\partial n)_0$, $(\partial H_2/\partial n)_0$, $(\partial^2 H_1/\partial n^2)_0$ обозначают соответственно $\partial H_1(s,0)/\partial n$, $\partial H_2(s,0)/\partial n$, $\partial^2 H_1(s,0)/\partial n^2$.

Соотношение (12) позволяет показать, что

$$\Psi^{(\mathrm{V})}(0) = \int\limits_0^l \left[H_{50}(P_0^2+Q_0^2)^{3/2} - \left(\frac{dX_5}{ds} + 4X_5J_0\left(\frac{\partial P}{\partial n}, \frac{\partial Q}{\partial n}\right)\right) + 5H_4X_2(P_0^2+Q_0^2)+\right.$$
$$\left.+5H_{30}X_2^2(P_0^2+Q_0^2)^{1/2} - 5H_{20}X_4 + 5X_4\left(\frac{dX_2}{ds} + X_2J_0\left(\frac{\partial P}{\partial n}, \frac{\partial Q}{\partial n}\right)\right)\right]\sigma^4 ds+$$

$$+5\int\limits_0^l\Big[H_{40}(P_0^2+Q_0^2)-\Big(\frac{dX_4}{ds}+3X_4J_0\Big(\frac{\partial P}{\partial n},\frac{\partial Q}{\partial n}\Big)\Big)+2H_{30}X_2(P_0^2+Q_0^2)^{1/2}-2H_{20}X_3+$$

$$+2X_3\Big(\frac{dX_2}{ds}+X_2J_0\Big(\frac{\partial P}{\partial n},\frac{\partial Q}{\partial n}\Big)\Big)\Big]\sigma^3\int\limits_0^s\Big[H_{20}-\Big(\frac{dX_2}{dt}+X_2J_0\Big(\frac{\partial P}{\partial n},\frac{\partial Q}{\partial n}\Big)\Big)\Big]\sigma\,dt\,ds+$$

$$+5\int\limits_0^l\Big[H_{30}(P_0^2+Q_0^2)^{1/2}-\Big(\frac{dX_3}{ds}+2X_3J_0\Big(\frac{\partial P}{\partial n},\frac{\partial Q}{\partial n}\Big)\Big)\Big]\sigma^2\Big(\int\limits_0^s\Big[H_{20}-$$

$$-\Big(\frac{dX_2}{dt}+X_2J_0\Big(\frac{\partial P}{\partial n},\frac{\partial Q}{\partial n}\Big)\Big)\Big]\sigma\,dt\Big)^2ds,$$

где $\sigma=\exp\int\limits_0^z J_0(\partial P/\partial n,\partial Q/\partial n)\,d\xi$.

Обозначим $A=\int\limits_0^l H_{50}(P_0^2+Q_0^2)^{3/2}\sigma^4\,ds+5\int\limits_0^l H_{40}(P_0^2+Q_0^2)\sigma^3\int\limits_0^s H_{20}\sigma\,dt\,ds+5\int\limits_0^l H_{30}(P_0^2+Q_0^2)^{1/2}\times$ $\times\sigma^2\Big(\int\limits_0^s H_{20}\sigma\,dt\Big)^2ds$. Тогда, раскрывая скобки в выражениях под знаками интегралов в правой части представления для $\Psi^{(V)}(0)$, приводя подобные и интегрируя по частям с учетом условий (10), можно убедиться, что $\Psi^{(V)}(0)=A$. Переходя же к декартовым координатам, окончательно получим

$$\Psi^{(V)}(0)=(P_{B_0}^2+Q_{B_0}^2)^2\Big(\int\limits_0^\omega H_{50}\delta^4dt+5\int\limits_0^\omega H_{40}\delta^3\delta_2dt+5\int\limits_0^\omega H_{30}\delta^2\delta_2^2dt\Big),$$

где P_{B_0}, Q_{B_0} — значения P и Q в точке B_0.

Завершает доказательство теоремы ссылка на работу [5], из которой следует, что условия (10) равносильны условиям $\Psi'(0)=\Psi''(0)=\Psi'''(0)=\Psi^{(IV)}(0)=0$, и тот факт, что, как показано выше, условие (11) равносильно условию $\Psi^{(V)}(0)<0$ (>0).

В заключение отметим, что если постоянные h_k, определяемые формулами (9), формально переписать в виде $h_k=\int\limits_0^\omega f_k(F'_n,F''_{n^2},\ldots,F^{(k)}_{n^k})\,dt$, где f_k — известная функция своих аргументов и $k=1,2,3,\ldots$, то теоремы 1 и 2 дают определенное основание для следующего утверждения.

Гипотеза. *Первые $(k-1)$ условий из (6) и (7) равносильны условиям:* $\overline{h}_1=\int\limits_0^\omega f_1(H_1)\,dt=0$, $\overline{h}_2=\int\limits_0^\omega f_2(H_1,H_2)\,dt=0$, $\ldots$, $\overline{h}_{k-1}=\int\limits_0^\omega f_{k-1}(H_1,H_2,\ldots,H_{k-1})\,dt=0$, *а последние условия равносильны соответственно условиям:* $\overline{h}_k=\int\limits_0^\omega f_k(H_1,H_2,\ldots,H_k)\,dt<0$ (>0) *и* $\overline{h}_k=\int\limits_0^\omega f_k(H_1,H_2,\ldots,H_k)\,dt\neq 0$.

Литература

1. *Папуш П. Н.* // Успехи мат. наук. 1952. Т. 7, вып. 4(50). С. 165 — 168.
2. *Ткачев В. Ф.* // Мат. сб. 1962. Т. 56(98), № 3. С. 281 — 300.
3. *Амелькин В. В., Мошенский А. М.* // Межвуз. сб. научных трудов: Проблемы мат. обеспечения совершенствования техн. средств железнодор. транспорта. М., 1992. Ч. 2. С. 14 — 18.
4. *Амелькин В. В.* // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 8. С. 1291 — 1296.
5. *Anthony W. Leung, Xu Rong-Liang* // Dynamic Systems and Applications. 1992. N 3. P. 283 — 315.

Белорусский государственный университет

Поступила в редакцию 9 сентября 1997 г.