ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2000. Т. 36, № 10. С. 1393 — 1397

УДК 517.968.2

ФОРМУЛА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КВАЗИОБРАТНОГО ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

А. А. Кулешов

Введение. В данной статье уточняются результаты [1]. Рассматривается линейный интегральный оператор третьего рода

$$(\mathcal{K}u)(s) \equiv a(s)u(s) + \int\limits_X K(s,t)u(t)\mu(dt). \tag{1}$$

Предположим, что (X, Σ, μ) — пространство с мерой μ такой, что пространство $L^2(X,\mu)$ сепарабельно. Функции $a(s)$, $K(s,t)$ измеримы, определены и конечны почти всюду относительно мер μ и $\mu \times \mu$ (произведение мер) соответственно. В остальном придерживаемся ограничений и соглашений, принятых в работе [1]. Как установлено в [1], оператор $\mathcal{K} \in B(L^2(X, g_1^2\mu), L^2(X, g_0^2\mu))$, т. е. является ограниченным оператором, действующим из $L^2(X, g_1^2\mu)$ в $L^2(X, g_0^2\mu)$. Как обычно, пространство $B(X,Y)$ снабжается топологией равномерной сходимости. Весовые функции g_0 и g_1 определены в [2, теорема 1.1]. При выполнении условия

$$K_0(t) = \left(\int\limits_X |K(s,t)|^2 g_0^2(t)\mu(dt)\right)^{1/2} < +\infty, \tag{2}$$

почти всюду в [1] исследуется возможность интегрального представления оператора $\mathcal{K}^\oplus$, квазиобратного к оператору $\mathcal{K}$. Формула для квазиобратного оператора, найденная в [1], имеет следующий вид:

$$\mathcal{K}^\oplus(v)(s) = \frac{\overline{a(s)}}{|a(s)|^2}\chi_a(s)v(s) + \frac{\overline{a(s)}g_0^2(s)}{2g_1^2(s)}\mathrm{Q}_0(v)(s) + \frac{1}{g_1^2(s)}\int\limits_X \frac{\overline{K(t,s)}g_1^2(t)}{|a(t)|^2}\chi_a(t)v(t)\mu(dt) +$$

$$+\frac{1}{2g_1^2(s)}\int\limits_X \overline{K(t,s)}\mathrm{Q}_0(v)(t)g_0^2(t)\mu(dt). \tag{3}$$

Здесь $\chi(s)$ — характеристическая функция множества supp a, а линейный оператор $Q_0 \in B(L^2(X, g_0^2\mu))$. В [1] доказано, что Q_0 — предел в равномерной операторной топологии пространства $B(L^2(X, g_0^2\mu))$ последовательности регулярных интегральных операторов Q_N с ядрами

$$Q_N(s,t) = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k\binom{N+1}{k+1}\alpha^{k+1}\frac{K_{2k+1}^{(2k+1)}(s,t)}{2^{2k+1}}, \tag{4}$$

где α — параметр сходимости, $K_{2k+1}^{(2k+1)}(s,t)$ — некоторые функции от итерированных ядер интегрального слагаемого в формуле (1) (см. [2, теорема 3.1]). Сама формула (3) установлена в предположении (2) и условиях $\mathcal{K} \in (CR)$, $a \in (CR)$. Последнее означает, что оператор $\mathcal{K}$ и оператор умножения на функцию $a(s)$ имеют замкнутые области значений. Таким образом, в [1] исследуется возможность интегрального представления оператора Q_0. Следующее определение необходимо для формулировки основного результата [1].

Обозначим $L^{\infty,2} = L^\infty[L^2(X, g_0^2\mu)]$ — пространство классов всех $\lambda = \mu \times \mu$ измеримых комплекснозначных функций $H(s,t)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) при почти всех $t \in X$ функция $s \to H(s,t)$ принадлежит пространству $L^2(X, g_0^2\mu)$;

2) функция $\left(\int\limits_X |H(s,t)|^2 g_0^2(s)\mu(ds)\right)^{1/2} \in L^\infty(X,\mu)$.

Так определенное пространство называется пространством со смешанной нормой

$$|||H|||_{\infty,2} = \mu\text{-}\operatorname*{ess\text{-}sup}_t \left(\int\limits_X |H(s,t)|^2 g_0^2(s)\mu(ds)\right)^{1/2}.$$

С помощью теоремы 2.2 [1] задача об интегральном представлении оператора $\mathcal{K}^{\oplus}$ сводится к задаче об интегральном представлении оператора $H_0(\xi,t,\varphi)$:

$$H_0(\xi,t,\varphi) = \int\limits_X Q(\xi,t,s) g_0^2(s)\varphi(s)\mu(ds) \tag{5}$$

с некоторой $(\mu \times \mu \times \mu)$-измеримой функцией $Q(\xi,t,s)$, принадлежащей по переменной s пространству $L^1(X, g_0^2\mu)$ почти при всех (ξ,t).

В настоящей работе доказываются следующие результаты.

Теорема 1. *Если $\mathcal{K} \in (CR), a \in (CR)$ и выполнено условие (2), то справедливо интегральное представление (5).*

Следствие 1. *При выполнении условий теоремы 1 существует подпоследовательность $\{N_k\}_{k=1}^\infty$ натурального ряда, не зависящая от выбора точки (ξ,t), такая, что последовательность $\{Q_{N_k}, (s,\xi)\overline{K(s,t)}\}_{k=1}^\infty$ сильно сходится в пространстве $L^1(X, g_0^2\mu)$ почти при всех $(\xi,t) \in X \times X$ к функции $Q(\xi,t,s)$.*

Следствие 2. *В условиях теоремы 1 оператор $H_0(\xi,t,\varphi)$ является оператором с абстрактной нормой, т. е. $\int\limits_X |Q(\xi,t,s)| g_0^2(s)\mu(ds) \in S(\mathrm{X}\times\mathrm{X}, \mu\times\mu)$, где $S(X\times X, \mu\times\mu)$ — совокупность всех измеримых относительно меры $\mu\times\mu$ почти всюду конечных функций, определенных $\mu\times\mu$ почти всюду на $X\times X$ с обычным отождествлением.*

Прежде чем переходить к доказательству теоремы 1 и следствий 1, 2, остановимся на вопросе выполнения условий теоремы 1. Условие $a \in (CR)$ легко проверяется (см. [2, неравенство (9)]). Условие $\mathcal{K} \in (CR)$ является самым трудным для проверки и, кроме того, оно не всегда влечет за собой условие $a \in (CR)$. Импликация $\mathcal{K} \in (CR) => a \in (CR)$ установлена только в случае, когда $\int\limits_X g_0^2(\xi)\mu(d\xi) < +\infty$ (см., например, [5]). Известные результаты относительно включения $\mathcal{K} \in (CR)$ относятся в основном к специальным классам интегральных операторов (фредгольмовы, типа свертки и т. д.). В настоящей работе интегральная часть формулы (1) не предполагается компактным оператором. Из построения весов g_0, g_1 следует только, что оператор $u \to \int\limits_X K(s,t)u(t)\mu(dt)$ является регулярным интегральным оператором. На основании результатов [7, с. 34 — 40] и [8, лемма 1.2] в этом случае можно установить, например, следующее

Предложение 1. *Пусть $a \in (CR)$, тогда $\mathcal{K} \in (CR)$ в том и только в том случае, когда ограничена в равномерной операторной топологии пространства $B(L^2(X, g_0^2\mu))$ последовательность Q_N интегральных операторов с ядрами (4).*

Предложение 2. *Пусть $a \in (CR)$ и для каждого достаточно большого числа N существует почти всюду конечная измеримая положительная функция $\varphi_N(x)$ такая, что неравенства*

$$\int\limits_X |Q_N(x,\xi)|\varphi_N(\xi)g_0^2(\xi)\mu(d\xi) \le c\varphi_N(x) \tag{6}$$

выполняются почти всюду с константой $c > 0$, не зависящей от x и N, тогда $\mathcal{K} \in (CR)$.

Известно, что функции $\varphi_N(x)$, указанные в предложении 2, существуют всегда, но для них, вообще говоря, константа c в правой части (6) зависит от N.

Для доказательства основных результатов нам понадобится

Лемма 1. *Если выполнены условия теоремы 1, то существует подпоследовательность $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ натурального ряда, не зависящая от выбора точки (ξ,t), такая, что последовательность $\{Q_{N_k}(s,\xi)\overline{K(s,t)}\}_{k=1}^{\infty}$ слабо сходится в пространстве $L^1(X,g_0^2\mu)$ почти при всех $(\xi,t)\in X\times X$.*

Доказательство. Докажем сначала, что при каждом N и почти при всех $(\xi,t)\in X\times X$ справедливо включение $Q_N(s,\xi)\overline{K(s,t)}\in L^1(X,g_0^2\mu)$ по переменной s. Действительно, в силу регулярности интегрального оператора с ядром $Q_N(s,\xi)$ имеем

$$\left|\int_X \overline{K(s,t)}(Q_N(s,\xi)v(\xi)g_0^2(\xi)\mu(d\xi))\varphi(s)g_0^2(s)\mu(ds)\right| \le \left(\int_X\left(\int_X |K(s,t)|Q_N(s,\xi)g_0^2(s)|\varphi(s)|\mu(ds)\right)\times\right.$$

$$\left.\times|v(\xi)|g_0^2(\xi)\mu(d\xi)\right) \le \left(\int_X |K(s,t)|^2|\varphi(s)|^2g_0^2(s)\mu(dt)\right)^{1/2}|||Q_N|||_{g_0}\|v\|_{g_0}\le$$

$$\le\left(\int_X |K(s,t)|^2g_0^2(s)\mu(ds)\right)^{1/2}|||Q_N|||_{g_0}\|v\|_{g_0}.$$

Здесь $|Q_N|$ — интегральный оператор с ядром $|Q_N(s,t)|$. Отсюда находим

$$\sup_{\|\varphi\|_\infty\le 1}\left(\int_X\left(\int_X |K(s,t)|Q_N(s,\xi)q_0^2(s)|\varphi(s)|\mu(ds)\right)^2 g_0^2(\xi)\mu(d\xi)\right)^{1/2}\le |||Q_N|||_{g_0}K_0(t).$$

В частности, $\int_X|K(s,t)||Q_N(s,\xi)|q_0^2(s)\mu(ds)\in S(X\times X,\mu\times\mu)$. Теперь выберем подпоследовательность $H_{N_k}(\xi,t,\varphi)/K_0^+(t)$ последовательности $H_N(\xi,t,\varphi)/K_0^+(t)$ (см. формулировку теоремы 2.2 из [1]) так, чтобы $\sup\limits_{\|\varphi\|_\infty\le1}|||H_{N_k}(\cdot,\cdot,\varphi)/K_0^+(\cdot)-H_0(\cdot,\cdot,\varphi)|||_{\infty,2}<1/2^k$. В этом случае ряд $r(\xi,t,\varphi)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}k|H_{N_k}(\xi,t,\varphi)/K_0^+(t)-H_0(\xi,t,\varphi)|$ сходится по норме пространства $L^{\infty,2}$ равномерно по φ из единичного шара пространства $L^\infty(X,\mu)$. Поскольку $L^{\infty,2}$ — банахово фундаментальное пространство (БФП), то $|H_{N_k}(\xi,t,\varphi)/K_0^+(t)-H_{N_m}(\xi,t,\varphi)/K_0^+(t)|\le\le(1/k+1/m)r(\xi,t,\varphi)$. Полученное неравенство показывает, что $\{Q_{N_k}(s,\xi)\overline{K(s,t)}\}_{k=1}^{\infty}$ — слабая фундаментальная последовательность в пространстве $L^1(X,g_0^2\mu)$ почти при всех (ξ,t). В силу слабой секвенциальной полноты $L^1(X,g_0^2\mu)$ получаем требуемое. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть подпоследовательность $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$, как в лемме 1. Тогда последовательность $\{Q_{N_k}(s,\xi)\overline{K(s,t)}\}_{k=1}^{\infty}$ слабо сходится к некоторой функции $Q'(\xi,t,s)$. Следовательно, последовательность $\int_X(\overline{K(s,t)}/K_0^+(t))Q_{N_k}(s,\xi)\varphi(s)g_0^2(s)\mu(ds)$ сходится к функции $\int_X(Q'(\xi,t,s)/K_0^+(t))\varphi(s)g_0^2(s)\mu(ds)$ при $k\to\infty$ и почти при всех $(\xi,t)\in X\times X$, $\varphi\in L^\infty(X,\mu)$. Отсюда получаем

$$H_0(\xi,t,\varphi)=\int_X(Q'(\xi,t,s)/K_0^+(t))\varphi(s)g_0^2(s)\mu(ds), \tag{7}$$

поскольку $L^{\infty,2}$ — пространство БФП. Левая часть формулы (7) является линейным непрерывным оператором из $L^\infty(X,\mu)$ в $L^{\infty,2}$. Следовательно, существует измеримая функция $Q(\xi,t,s)$ такая, что выполнено (5) (см. [9, 10]). Теорема 1 доказана.

Доказательство следствия 1. Выберем подпоследовательность $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$, как в лемме 1, и рассмотрим функцию $r(\xi,t,\varphi)$. Из вида этой функции получаем $|H_{N_k}(\xi,t,\varphi)/K_0^+(t)-\\-H_0(\xi,t,\varphi)|\le(1/k)r(\xi,t,\varphi)$. В силу оценок

$$|H_{N_k}(\xi,t,\varphi)|\le\left(\int_X|K(s,t)||Q_{N_k}(s,\xi)|g_0^2(s)\mu(ds)\right)\|\varphi\|_\infty, \tag{8}$$

$$|H_0(\xi,t,\varphi)|\le\left(\int_X|Q(\xi,t,s)|g_0^2(s)\mu(ds)\right)\|\varphi\|_\infty \tag{9}$$

почти при всех (ξ, t) операторы $H_{N_k}(\xi, t, \varphi)$ и $H_0(\xi, t, \varphi)$ — линейные непрерывные отображения $L^\infty(X, \mu)$ в поле комплексных чисел. Теперь функцию $r(\xi, t, \varphi)$ можно рассмотреть как верхнюю огибающую семейства: $r_m(\xi, t, \varphi) = \sum\limits_{k=1}^{m} k|H_{N_k}(\xi, t, \varphi)/K_0^+(t) - H_0(\xi, t, \varphi)|$. Из (8) и (9) следует, что почти при всех (ξ, t) каждая из функций $r_m(\xi, t, \varphi)$ непрерывна в нуле по переменной φ. Так что $r(\xi, t, \varphi) = \sup\limits_m r_m(\xi, t, \varphi)$ полунепрерывна снизу в нуле почти при всех (ξ, t) [11, с. 193]. Кроме того, $r(\xi, t, \varphi)$ — полунорма на банаховом пространстве $L^\infty(X, \mu)$ почти при всех (ξ, t). Значит, почти при всех (ξ, t) эта полунорма непрерывна в нуле (см., например, [12, принцип ОГБК, с. 634]): $r(\xi, t, \varphi) \le c(\xi, t)\|\varphi\|_\infty$, где константа $c(\xi, t) > 0$ не зависит от φ. Поэтому

$$\int\limits_X \left|\frac{\overline{K(s,t)}}{K_0^+(t)} Q_{N_k}(s, \xi) - Q(\xi, t, s)\right| g_0^2(s)\mu(ds) =$$

$$= \sup_{\|\varphi\|_\infty \le 1} \left|\int\limits_X \left(\frac{\overline{K(s,t)}}{K_0^+(t)} Q_{N_k}(s, \xi) - Q(\xi, t, s)\right) g_0^2(s)\varphi(s)\mu(ds)\right| =$$

$$= \sup_{\|\varphi\|_\infty \le 1} |H_{N_k}(\xi, t, \varphi)/K_0^+(t) - H_0(\xi, t, \varphi)| \le (1/k)c(\xi, t).$$

Следствие 1 доказано.

Доказательство следствия 2. Обозначим $Q_{N_k}(\xi, t, s) = (\overline{K(s,t)}/K_0^+(t))Q_{N_k}(s, \xi)$, где $\{N_k\}_{k=1}^\infty$ — подпоследовательность такая же, как в лемме 1. Как следует из доказательства предыдущего следствия, почти при всех (ξ, t) и $k \to \infty$ имеем

$$\int\limits_X |Q_{N_k}(\xi, t, s)| g_0^2(s)\mu(ds) \to \int\limits_X |Q(\xi, t, s)| g_0^2(s)\mu(ds).$$

Как установлено в лемме 1, $\int\limits_X |Q_{N_k}(\xi, t, s)| g_0^2(s)\mu(ds) \in S(X \times X, \mu \times \mu)$. Утверждение следствия вытекает теперь из стандартных положений теории меры и интегрирования. Следствие доказано.

Следствие 3. *При выполнении условий теоремы 1 справедливо представление*

$$\overline{K(t,s)} Q_0(v)(s) = \frac{K_0(t)}{g_0^2(s)} D_{\mathcal{P}(s)}\left[\int\limits_X \left(\int\limits_\Sigma Q(\xi, t, s) g_0^2(s)\mu(ds)\right) g_0^2(\xi) v(\xi)\mu(d\xi)\right].$$

В заключение остановимся на возможности выполнения условия (2) из теоремы 1. Рассмотрим частный случай, когда условие автоматически выполняется.

Пусть $X = R^n$, а μ — обычная мера Лебега на R^n. Предположим, что веса g_0 и g_1 строятся по субмультипликативной функции $g(\xi, \eta) \in K_s(R^{2n})$ [13, с. 10] и удовлетворяют следующим условиям:

1) $g_0(\xi) = (\int\limits_{R^n} g^{-2}(\xi, \eta)d\eta)^{-1/2} \in K(R^n)$;

2) $g_1(\eta) = (\int\limits_{R^n} g^2(\xi, \eta)|K(\xi, \eta)|^2 d\xi + |a(\eta)|^2 g_0^2(\eta))^{1/2}$ локально интегрируема в R^n и $g_1(\eta) > 0$ почти всюду.

Несложно установить оценку

$$\left(\int\limits_{R^n} g_0^2(\xi)|K(\xi, t)|^2 d\xi\right)^{1/2} \le \frac{g_0(0)}{g_*(0, t)} g_1(t) \tag{10}$$

при всех $t \in R^n$, где $g_*(\xi', \eta') = \inf\limits_{(\xi,\eta)} g(\xi + \xi', \eta + \eta')/g(\xi, \eta) \in K(R^{2n})$. Другими словами, в этой ситуации оценка (2) всегда выполнена, поскольку условия 1) и 2) означают, что $g_0(\xi)$ и $g_1(\eta)$ — веса, что эквивалентно определению рассматриваемого класса операторов [2].

Доказательство оценки (10). Сначала докажем включение $g_*(\xi',\eta') \in K(R^{2n})$. Субмультипликативность функции $g(\xi,\eta)$ означает, что

$$g(\xi+\xi',\eta+\eta') \le g(\xi,\eta)g(\xi',\eta') \tag{11}$$

при любых значениях (ξ,η) и (ξ',η') из R^{2n}. Отсюда $g(\xi,\eta)/g(\xi+\xi'+\xi'',\eta+\eta'+\eta'') \ge$ $\ge g(\xi,\eta)/g(\xi+\xi',\eta+\eta')g(\xi'',\eta'')$. Значит, $\inf\limits_{(\xi,\eta)} g(\xi+\xi',\eta+\eta')g(\xi'',\eta'')/g(\xi,\eta) \ge \inf\limits_{(\xi,\eta)} g(\xi+\xi'+$ $+\xi'',\eta+\eta'+\eta'')/g(\xi,\eta)$, а это одно и то же, что

$$g_*(\xi',\eta')g(\xi'',\eta'') \ge g_*(\xi'+\xi'',\eta'+\eta''). \tag{12}$$

Заменив в (11) переменную ξ на $-\xi$, а η на $-\eta$ и взяв вместо ξ' сумму $\xi+\xi'$, а вместо η' сумму $\eta+\eta'$, получим $g(\xi',\eta') \le g(-\xi,-\eta)g(\xi+\xi',\eta+\eta')$, откуда $1/g(-\xi,-\eta) \le g(\xi+$ $+\xi',\eta+\eta')/g(\xi',\eta')$. Следовательно, $1/g(-\xi,-\eta) \le \inf\limits_{(\xi',\eta')} g(\xi+\xi',\eta+\eta')/g(\xi',\eta') = g_*(\xi,\eta)$. Это доказывает необходимое включение.

Из оценок $g_*(\xi,\eta) \le g_*(\xi,0)g_*(0,\eta)$, $g_*(\xi,\eta) \le g_*(0,\eta)g_*(\xi,0)$, $g(0,\eta)g(\xi,0) \le g(\xi,\eta) \le$ $\le g(\xi,0)g(0,\eta)$, легко следующих из (11), (12), и субмультипликативности функции $g(\xi,\eta)$ вытекает неравенство

$$g_*(0,\eta)\Big(\int\limits_{R^n} g^2(\xi,0)|K(\xi,\eta)|^2 d\xi\Big)^{1/2} \le \Big(\int\limits_{R^n} g^2(\xi,\eta)|K(\xi,\eta)|^2 d\xi\Big)^{1/2} \le$$

$$\le g(0,\eta)\Big(\int\limits_{R^n} g^2(\xi,0)|K(\xi,\eta)|^2 d\xi\Big)^{1/2}$$

и аналогично

$$g_0(0)\Big(\int\limits_{R^n} g_*^2(\xi,0)|K(\xi,\eta)|^2 d\xi\Big)^{1/2} \le \Big(\int\limits_{R^n} g_0^2(\xi)|K(\xi,\eta)|^2 d\xi\Big)^{1/2} \le g_0(0)\Big(\int\limits_{R^n} g^2(\xi,0)|K(\xi,\eta)|^2 d\xi\Big)^{1/2}.$$

Отсюда непосредственно получается оценка (10).

Литература

1. *Кулешов А. А.* // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 5. С. 890 — 897.
2. *Кулешов А. А.* // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 3. С. 514 — 521.
3. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М., 1984.
4. *Харазашвили А. Б.* Топологические аспекты теории меры. Киев, 1984.
5. *Коротков В. Б.* // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 1. С. 201 — 204.
6. *Бухвалов А. В.* // Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. 1988. Т. 26. С. 3 — 63.
7. *Коротков В. Б.* Интегральные операторы. Новосибирск, 1983.
8. *Кулешов А. А.* // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 11. С. 1961 — 1965.
9. *Бухвалов А. В.* // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. 1974. Т. 47. С. 5 — 14.
10. *Бухвалов А. В., Лозановский Г. Я.* // Теория операторов в функциональных пространствах. Новосибирск, 1977. С. 71 — 98.
11. *Бурбаки Н.* Общая топология. Топологические группы, числа и связанные с ними группы и пространства. М., 1969.
12. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. М., 1969.
13. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. В 4 т.: Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. М., 1986.

Белорусский государственный университет

Поступила в редакцию
26 апреля 1999 г.