

УДК 517.968.22

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С СОПРЯЖЕНИЕМ

А. П. Шилин

Решение на полуоси интегральных уравнений Вольтерра с ядрами, зависящими от разности аргументов, — хорошо известный пример эффективного использования операционного исчисления. Менее известно, что на конечном интервале подобные уравнения также могут быть решены; соответствующие формулы решения, основанные на интегральном преобразовании Фурье, содержатся в [1]. Рассмотрим более сложные уравнения

$$\varphi(t) + \int_0^t k(t-s)\varphi(s) ds + \int_0^{1-t} k(t+s)\overline{\varphi(s)} ds = g(t), \quad 0 < t < 1, \quad (1)$$

$$\varphi(t) + \int_t^1 l(t-s)\varphi(s) ds + \int_0^{1-t} \overline{l(-t-s)} \overline{\varphi(s)} ds = g(t), \quad 0 < t < 1, \quad (2)$$

в предположении, что $k(t) \in L_1(0, 1)$, $l(t) \in L_1(-1, 0)$, $g(t), \varphi(t) \in L_2(0, 1)$; функция $\varphi(t)$ искомая, остальные функции заданы.

Введем целые функции

$$K(z) = \int_0^1 k(t) \exp(izt) dt, \quad L(z) = \int_{-1}^0 l(t) \exp(izt) dt, \quad G(z) = \int_0^1 g(t) \exp(izt) dt.$$

Пусть $a > 0$, $b < 0$ — числа такие, что в полуплоскости $\text{Im } z \geq a$ не имеет нулей функция $1 + K(z)$, а в полуплоскости $\text{Im } z \leq b$ — функция $1 + L(z)$. Числа a и b существуют [1].

Для любого действительного числа c функцию $K(x + ic)$ как функцию действительной переменной x можно считать преобразованием Фурье функции

$$k_1(t) = \begin{cases} k(t) \exp(-ct), & \text{если } 0 < t < 1, \\ 0, & \text{если } t > 1 \text{ или } t < 0. \end{cases}$$

Так как преобразование Фурье функций из $L_1(-\infty, \infty)$ исчезает при $x \rightarrow \pm\infty$ [2, с. 19], то в любой полосе вида $c_1 \leq \text{Im } z \leq c_2$ функция $1 + K(z)$ имеет разве что конечное число нулей. В самом деле, если бы нулей было бесконечное множество, то они имели бы точку сгущения. Точка сгущения не могла бы быть на бесконечности, поскольку это противоречило бы упомянутому свойству преобразования Фурье, и не могла бы быть конечной точкой, поскольку это противоречило бы свойству изолированности нулей аналитической функции. Отсюда также, очевидно, вытекает, что, не теряя общности, выбор числа a можно подчинить требованию $1 + K(\zeta) \neq 0$ при $\text{Im } \zeta = -a$. Аналогично считаем $1 + L(\zeta) \neq 0$ при $\text{Im } \zeta = -b$. Обозначим: z_k — нули функции $1 + K(z)$ в полосе $-a < \text{Im } z < a$, μ_k — их соответствующие кратности, $k = \overline{1, n}$, ζ_s — нули функции $1 + L(z)$ в полосе $b < \text{Im } z < -b$, ν_s — их соответствующие кратности, $s = \overline{1, m}$. Дополнительно предположим, что как среди точек z_k , так и среди точек ζ_s нет точек, симметричных относительно действительной оси.

Продолжим функции $k(t)$, $l(t)$, $g(t)$ тождественными нулями на лучи $t > 1$, $t < -1$, $t > 1$ и продолженные функции будем обозначать через $\tilde{k}(t)$, $\tilde{l}(t)$, $\tilde{g}(t)$ соответственно.

Лемма 1. Все решения уравнения (1) получаются как сужения на интервал $0 < t < 1$ взятых в классе $\{a\}$ решений уравнения

$$\tilde{\varphi}(t) + \int_0^t \tilde{k}(t-s)\tilde{\varphi}(s) ds + \int_0^\infty \tilde{k}(t+s)\overline{\tilde{\varphi}(s)} ds = \tilde{g}(t), \quad t > 0. \quad (3)$$

Доказательство. Напомним вначале, что $\tilde{\varphi}(t) \in \{a\}$ означает $\exp(-at)\tilde{\varphi}(t) \in L_2(0, \infty)$. Подобные классы функций (классы функций показательного роста) введены Ю. И. Черским в [3] (см. также [4, с. 112]).

Очевидно, что упомянутое в формулировке леммы сужение является решением уравнения (1). Предположим теперь, что мы имеем некоторое решение $\varphi(t)$ уравнения (1). Нам следует показать еще, что это решение можно продолжить на луч $t > 1$ так, чтобы получилось решение уравнения (3) в классе $\{a\}$. Указанное продолжение должно удовлетворять уравнению

$$\tilde{\varphi}(t) + \int_1^t \tilde{k}(t-s)\tilde{\varphi}(s) ds = g_1(t), \quad t > 1, \quad (4)$$

$$g_1(t) = - \int_0^1 \tilde{k}(t-s)\varphi(s) ds - \int_0^1 \tilde{k}(t+s)\overline{\varphi(s)} ds.$$

После замен $t_1 + 1 = t$, $s_1 + 1 = s$ уравнение (4) переходит в частный случай уравнения Винера — Хопфа. Класс $\{a\}$ подобран так, чтобы уравнение (4) было безусловно разрешимым (и имело единственное решение; по поводу уравнений Винера — Хопфа в классах функций показательного роста см. [4, с. 132]). Лемма доказана.

Лемма 2. Все решения уравнения (2) получаются как сужения на интервал $0 < t < 1$ взятых в классе $\{b\}$ решений уравнения

$$\tilde{\varphi}(t) + \int_t^\infty \tilde{l}(t-s)\tilde{\varphi}(s) ds + \int_0^\infty \overline{\tilde{l}(-t-s)} \overline{\tilde{\varphi}(s)} ds = \tilde{g}(t), \quad t > 0. \quad (5)$$

Доказательство. Если продолжить любое решение уравнения (2) на луч $t > 1$ тождественным нулем, то получим, очевидно, нужное нам решение уравнения (5). Пусть теперь $\tilde{\varphi}(t)$ — некоторое решение уравнения (5). Тогда на луче $t > 1$ это решение удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\varphi}(t) + \int_t^\infty \tilde{l}(t-s)\tilde{\varphi}(s) ds = 0, \quad t > 1. \quad (6)$$

Сводя уравнение (6) аналогично уравнению (4) к уравнению Винера — Хопфа, несложно установить, что это уравнение имеет лишь нулевое решение.

Запишем для $0 < t < 1$ уравнение (5) следующим образом:

$$\tilde{\varphi}(t) + \int_t^1 l(t-s)\tilde{\varphi}(s) ds + \int_1^\infty \tilde{l}(t-s)\tilde{\varphi}(s) ds + \int_0^{1-t} \overline{\tilde{l}(-t-s)} \overline{\tilde{\varphi}(s)} ds = g(t).$$

Поскольку второй интеграл в левой части этого равенства обратится в нуль, то получаем, что сужение $\tilde{\varphi}(t)$ на интервал $0 < t < 1$ удовлетворяет уравнению (2). Лемма доказана.

Теперь следует решить уравнения (3), (5). Эти уравнения заданы на бесконечном интервале, благодаря чему можем воспользоваться математическим аппаратом из [3; 4, с. 111], позволяющим сводить такие уравнения к краевым задачам для аналитических функций. Важно отметить, что уравнения из указанных работ, рассматриваемые в классах функций показательного роста, содержат только ядра, зависящие от разности аргументов. Наличие в уравнениях (3), (5) еще и ядер, зависящих от суммы аргументов, также позволяет сводить эти уравнения к

краевым задачам, однако нам не известны работы, в которых дается анализ возникающих при этом краевых задач. Можем указать лишь статью [5], где рассмотрены уравнения с ядрами, зависящими от разности и суммы аргументов, но без комплексно-сопряженных значений неизвестной функции. Из-за чрезмерной общности исходных уравнений в [5] возникают краевые задачи, не решенные до настоящего времени. Мы существенно используем специфику ядер в уравнениях (3), (5), благодаря чему окончательный результат имеет вполне законченный вид.

Уравнение (3) сводится к краевой задаче

$$(1 + K(\zeta))\Phi^+(\zeta) = G(\zeta) + \Omega(\zeta), \quad \text{Im } \zeta = a; \quad K(\zeta)\overline{\Phi^+(\bar{\zeta})} = -\Omega(\zeta) + \Phi^-(\zeta), \quad \text{Im } \zeta = -a. \quad (7)$$

Здесь $\Phi^+(\zeta)$, $\Omega(\zeta)$, $\Phi^-(\zeta)$ — предельные значения на указанных прямых неизвестных функций $\Phi^+(\zeta)$, $\Omega(\zeta)$, $\Phi^-(\zeta)$, принадлежащих классам $\{\{a, \infty\}\}$, $\{\{-a, a\}\}$, $\{\{-\infty, -a\}\}$ соответственно.

Напомним, что $\Phi^+(z) \in \{\{a, \infty\}\}$ означает [3] аналитичность функции $\Phi^+(z)$ в области $a < \text{Im } z < \infty$; при этом существует такое число K , для которого $\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi^+(x + iy)|^2 dx < K$ сразу при всех значениях $y \in [a, \infty)$. Аналогично определяются классы $\{\{-a, a\}\}$, $\{\{-\infty, -a\}\}$.

В краевой задаче (7) нас интересует функция

$$\Phi^+(z) = \int_0^{\infty} \tilde{\varphi}(t) \exp(izt) dt, \quad (8)$$

знание которой позволит по формуле

$$\tilde{\varphi}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+ia}^{+\infty+ia} \Phi^+(\zeta) \exp(-i\zeta t) d\zeta, \quad t > 0, \quad (9)$$

найти решение уравнения (3).

Аналитически продолжим первое краевое условие в (7) на прямую $\text{Im } \zeta = -a$. При этом функция $\Phi^+(z)$ будет допускать в точках z_k полюсы порядка не выше μ_k , $k = \overline{1, n}$. Из полученных на прямой $\text{Im } \zeta = -a$ двух краевых условий исключим функцию $\Omega(\zeta)$ и получим следующее краевое условие:

$$(1 + K(\zeta))\Phi_*(\zeta) = \Phi_-(\zeta) + G(\zeta), \quad \text{Im } \zeta = -a, \quad (10)$$

где $\Phi_*(\zeta)$ и $\Phi_-(\zeta)$ — предельные значения функций $\Phi_*(z)$ и $\Phi_-(z)$, принадлежащих классам $\{\{-a, a\}\}$ и $\{\{-\infty, -a\}\}$ соответственно и вводимых нами по формулам

$$\Phi_*(z) = \Phi^+(z) + \overline{\Phi^+(\bar{z})}, \quad \Phi_-(z) = \Phi^-(z) + \overline{\Phi^+(\bar{z})}. \quad (11)$$

Функция $\Phi_*(z)$ удовлетворяет, очевидно, условию симметрии относительно действительной оси $\Phi_*(z) \equiv \overline{\Phi_*(\bar{z})}$.

Преобразуем краевое условие (10) к виду $(1 + K(\zeta))(1 + \overline{K(\bar{\zeta})})\Phi_*(\zeta) = (1 + \overline{K(\bar{\zeta})})\Phi_-(\zeta) + H(\zeta)$, $\text{Im } \zeta = -a$, где $H(\zeta) = (1 + \overline{K(\bar{\zeta})})G(\zeta)$, а затем к виду

$$(1 + K(\zeta))(1 + \overline{K(\bar{\zeta})})\Phi_*(\zeta) - H_*(\zeta) = (1 + \overline{K(\bar{\zeta})})\Phi_-(\zeta) - H_-(\zeta), \quad \text{Im } \zeta = -a, \quad (12)$$

$$H_*(\zeta) = \int_0^{\infty} h(t) \exp(i\zeta t) dt + \int_0^{\infty} \overline{h(t)} \exp(-i\zeta t) dt,$$

$$H_-(\zeta) = - \int_{-\infty}^0 h(t) \exp(i\zeta t) dt + \int_0^{\infty} \overline{h(t)} \exp(-i\zeta t) dt,$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty - ia}^{+\infty - ia} H(\zeta) \exp(-i\zeta t) d\zeta.$$

Слева в краевом условии (12) стоит предельное значение функции, аналитической в полосе $-a < \text{Im } z < a$ и удовлетворяющей там условию симметрии относительно действительной оси, а справа — предельное значение функции, аналитической в полуплоскости $-\infty < \text{Im } z < -a$. Из свойств классов этих функций вытекает, что они исчезают на бесконечности, поэтому аналитическое продолжение через прямую $\text{Im } \zeta = -a$ приводит к функции, тождественно равной нулю. Следовательно,

$$\Phi_*(\zeta) = H_*(\zeta) / [(1 + K(\zeta))(1 + \overline{K(\zeta)})], \quad \text{Im } \zeta = -a. \quad (13)$$

(Функция $\Phi_-(\zeta)$ теперь не нужна.)

Поскольку функция $\Phi^+(\zeta)$ с прямой $\text{Im } \zeta = a$ аналитически продолжима в полосу $-a < \text{Im } z < a$, кроме, возможно, точек z_k , $k = \overline{1, n}$, где у нее допускаются полюсы, то для нахождения решения уравнения (3) можем вместо формулы (8) взять формулу

$$\tilde{\varphi}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty - ia}^{+\infty - ia} \Phi^+(\zeta) \exp(-i\zeta t) d\zeta + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty + ia}^{+\infty + ia} S(\zeta) \exp(-i\zeta t) d\zeta. \quad (14)$$

Здесь через $S(\zeta)$ обозначено значение на прямой $\text{Im } \zeta = a$ суммы $S(z)$ главных частей разложения функции $\Phi^+(z)$ в ряд Лорана в окрестностях точек z_k , $k = \overline{1, n}$. Из первой формулы (11) вытекает, что сумма $S(z)$ совпадает с аналогично составленной суммой для функции $\Phi_*(z)$. Отметим, что именно здесь используется предположение об отсутствии симметричных точек среди точек z_k .

Так как $\Phi^+(z) \in \{\{a, \infty\}\}$, то $\overline{\Phi^+(\bar{z})} \in \{\{-\infty, -a\}\}$, а для таких функций при $t > 0$

$$\int_{-\infty - ia}^{+\infty - ia} \overline{\Phi^+(\bar{\zeta})} \exp(-i\zeta t) d\zeta = 0.$$

Следовательно, в интеграле по прямой $\text{Im } \zeta = -a$ в равенстве (14) функцию $\Phi^+(\zeta)$ можно заменить на $\Phi^+(\zeta) + \overline{\Phi^+(\bar{\zeta})}$, т.е. на функцию, найденную по формуле (13).

Итак, решение уравнения (3) (а вместе с ним и уравнения (1)) свелось к нахождению интегралов, имеющих характер обратного преобразования Фурье, от найденной функции $\Phi_*(\zeta)$ и функции $S(\zeta)$, выражающейся через нее. Опуская вычислительные выкладки, основанные на известных свойствах обратного преобразования Фурье, сформулируем результат.

Теорема 1. Уравнение (1) безусловно разрешимо и имеет единственное решение, определяемое формулой

$$\varphi(t) = g(t) + \int_0^1 r_1(t, s) g(s) ds + \int_0^1 r_2(t, s) \overline{g(s)} ds + \sum_{k=1}^n \exp(-iz_k t) \sum_{j=1}^{\mu_k} a_{kj} t^{j-1},$$

где

$$r_1(t, s) = r(t - s) + \int_0^s r(t - \tau) \overline{k(s - \tau)} d\tau, \quad r_2(t, s) = r(t + s) + \int_0^s r(t + \tau) k(s - \tau) d\tau,$$

$$r(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty - ia}^{+\infty - ia} \frac{K(\zeta) + \overline{K(\bar{\zeta})} + K(\zeta) \overline{K(\bar{\zeta})}}{(1 + K(\zeta))(1 + \overline{K(\bar{\zeta})})} \exp(-i\zeta t) d\zeta,$$

a_{kj} — коэффициенты в суммах $\sum_{j=1}^{\mu_k} a_{kj} i^j (j-1)! / (z-z_k)^j$, представляющих собой главные части разложений функции $(F(z) + \overline{F(\bar{z})}) / [(1+K(z))(1+\overline{K(\bar{z})})]$ в ряд Лорана в окрестностях точек z_k , $k = \overline{1, n}$,

$$F(z) = G(z) + \int_0^1 \exp(izt) dt \int_t^1 \overline{k(s-t)} g(s) ds.$$

Теперь запишем краевую задачу, к которой сводится уравнение (5):

$$\overline{L(\zeta)} \overline{\Phi^+(\zeta)} = \Omega(\zeta) + G(\zeta), \quad \text{Im } \zeta = -b; \quad (1 + L(\zeta))\Phi^+(\zeta) = -\Omega(\zeta) + \Phi^-(\zeta), \quad \text{Im } \zeta = b. \quad (15)$$

Здесь $\Phi^+(\zeta)$, $\Omega(\zeta)$, $\Phi^-(\zeta)$ — предельные значения на указанных прямых неизвестных функций $\Phi^+(z)$, $\Omega(z)$, $\Phi^-(z)$ классов $\{\{b, \infty\}\}$, $\{\{b, -b\}\}$, $\{\{-\infty, b\}\}$ соответственно. При этом функция $\Phi^+(z)$ снова определяется формулой (8), что позволяет по формуле

$$\check{\varphi}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+ib}^{+\infty+ib} \Phi^+(\zeta) \exp(-i\zeta t) d\zeta, \quad t > 0, \quad (16)$$

найти решение уравнения (5).

Аналитически продолжим второе краевое условие (15) на прямую $\text{Im } \zeta = -b$ и исключим из двух краевых условий на этой прямой функцию $\Omega(\zeta)$. Получим краевое условие, которому придадим вид

$$\Phi^+(\zeta) + \overline{\Phi^+(\zeta)} + L(\zeta)\Phi^+(\zeta) + \overline{L(\zeta)} \overline{\Phi^+(\zeta)} = G(\zeta) + \Phi^-(\zeta) + \overline{\Phi^+(\zeta)}, \quad \text{Im } \zeta = -b. \quad (17)$$

Так как слева в последнем равенстве стоит предельное значение функции, аналитической в полосе $b < \text{Im } z < -b$ и удовлетворяющей там условию симметрии относительно действительной оси, то с необходимостью должно быть $\Phi^-(\zeta) + \overline{\Phi^+(\zeta)} = \overline{G(\zeta)}$. Таким образом, удается исключить функцию $\Phi^-(\zeta)$, после чего краевое условие (17) можно переписать в виде

$$(1 + L(\zeta))\Phi^+(\zeta) - G(\zeta) = \overline{G(\bar{z})} - (1 + \overline{L(\bar{z})}) \overline{\Phi^+(\bar{z})}, \quad \text{Im } \zeta = -b. \quad (18)$$

Введем новую неизвестную функцию класса $\{\{b, -b\}\}$ $\Phi_{**}(z) = (1 + L(z))\Phi^+(z) - G(z)$. Из краевого условия (18) следует, что функция $\Phi_{**}(z)$ удовлетворяет условию антисимметрии относительно действительной оси $\Phi_{**}(z) \equiv -\overline{\Phi_{**}(\bar{z})}$.

Придадим равенству (18) вид краевого условия двухэлементной краевой задачи

$$(1 + L(\zeta))\Phi^+(\zeta) = \Phi_{**}(\zeta) + G(\zeta), \quad \text{Im } \zeta = -b. \quad (19)$$

Теперь краевое условие (19) преобразуем вначале к виду $\Phi^+(\zeta)/(1 + \overline{L(\bar{\zeta})}) = \Phi_{**}(\zeta)/[(1 + L(\zeta))(1 + \overline{L(\bar{\zeta})})] + Q(\zeta)$, $\text{Im } \zeta = -b$, где

$$Q(\zeta) = G(\zeta)/[(1 + L(\zeta))(1 + \overline{L(\bar{\zeta})})], \quad (20)$$

а затем к виду

$$\Phi^+(\zeta)/(1 + \overline{L(\bar{\zeta})}) - Q_+(\zeta) = \Phi_{**}(\zeta)/[(1 + L(\zeta))(1 + \overline{L(\bar{\zeta})})] - Q_{**}(\zeta), \quad \text{Im } \zeta = -b, \quad (21)$$

$$Q_+(\zeta) = \int_0^{\infty} q(t) \exp(i\zeta t) dt + \int_{-\infty}^0 \overline{q(t)} \exp(-i\zeta t) dt,$$

$$Q_{**}(\zeta) = - \int_{-\infty}^0 q(t) \exp(i\zeta t) dt + \int_{-\infty}^0 \overline{q(t)} \exp(-i\zeta t) dt,$$

$$q(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty - ib}^{+\infty - ib} Q(\zeta) \exp(-i\zeta t) d\zeta.$$

При этом мы использовали равенство $Q(\zeta) = Q_+(\zeta) - Q_{**}(\zeta)$, $\text{Im } \zeta = -b$, в котором функция $Q_+(\zeta)$ аналитически продолжима в полуплоскость $-b < \text{Im } z < \infty$, а функция $Q_{**}(\zeta)$ аналитически продолжима в полосу $b < \text{Im } z < -b$ с условием антисимметрии. Отметим для дальнейшего следующее обстоятельство: из формулы (20) видно, что функция $Q(\zeta)$ аналитически продолжима в полосу $b < \text{Im } z < -b$, кроме, возможно, точек $\zeta_s, \bar{\zeta}_s$, в которых у нее допускаются полюсы порядков не выше ν_s соответственно, $s = \overline{1, m}$. Нетрудно понять, что отсюда вытекает аналитическая продолжимость функции $Q_+(\zeta)$ в ту же полосу, кроме, возможно, тех же точек; более того, главные части разложений в ряд Лорана в окрестностях точек $\zeta_s, \bar{\zeta}_s$ у функций $Q_+(z)$ и $Q(z)$ совпадают.

Слева в равенстве (21) стоит предельное значение функции, аналитической в полуплоскости $-b < \text{Im } z < \infty$, а справа — предельное значение функции, аналитической в полосе $b < \text{Im } z < -b$, удовлетворяющей там условию антисимметрии и допускающей в точках $\zeta_s, \bar{\zeta}_s$ полюсы порядков не выше ν_s соответственно, $s = \overline{1, m}$. (Если бы среди точек ζ_s были симметричные относительно действительной оси, то порядки полюсов могли быть иными). Совершая аналитическое продолжение через прямую $\text{Im } \zeta = -b$, приходим (с учетом исчезновения обеих функций на бесконечности) к единой аналитической функции

$$\sum_{s=1}^m \sum_{j=1}^{\nu_s} \left(\frac{c_{sj}}{(z - \zeta_s)^j} - \frac{\overline{c_{sj}}}{(z - \bar{\zeta}_s)^j} \right),$$

где c_{sj} — произвольные комплексные постоянные. Отсюда

$$\Phi^+(z) = (1 + \overline{L(\bar{z})}) \left[Q_+(z) + \sum_{s=1}^m \sum_{j=1}^{\nu_s} \left(\frac{c_{sj}}{(z - \zeta_s)^j} - \frac{\overline{c_{sj}}}{(z - \bar{\zeta}_s)^j} \right) \right]. \quad (22)$$

Нужна еще аналитическая продолжимость функции $\Phi^+(z)$ в полосу $b < \text{Im } z < -b$ (более точно, нужна принадлежность этой функции классу $\{\{b, \infty\}\}$). Очевидно, что этому мешают лишь возможные полюсы в точках $\zeta_s, s = \overline{1, m}$, у функции, стоящей в квадратных скобках в формуле (22). (Полюсы в точках $\bar{\zeta}_s$ невозможны: они устраняются нулями функции $1 + \overline{L(\bar{z})}$.)

Для устранения полюсов в точках ζ_s постоянные c_{sj} следует брать такими, чтобы суммы $\sum_{j=1}^{\nu_s} c_{sj}/(z - \zeta_s)^j$ отличались бы лишь знаком от главных частей разложений в ряд Лорана функции $Q_+(z)$ в окрестностях точек $\zeta_s, s = \overline{1, m}$. Это приведет к тому, что постоянные c_{sj} станут в формуле (22) вполне определенными. Как отмечено выше, при нахождении главных частей функцию $Q_+(z)$ можно заменять на функцию $Q(z)$, что упрощает вычисления. Эти вычисления теперь следует проводить по формуле (16), что в силу леммы 2 приведет к решению исходного уравнения (2). Сами вычисления, основанные на известных свойствах обратного преобразования Фурье, здесь не приводим, а формулируем окончательный результат. Отметим лишь, что интегрирование в формуле (16) можно осуществлять по прямой $\text{Im } \zeta = -b$ вследствие аналитичности подынтегральной функции, причем именно так и удобнее делать, поскольку на этой прямой решается краевая задача (19).

Теорема 2. Уравнение (2) безусловно разрешимо и имеет единственное решение, которое находится по формуле

$$\varphi(t) = \sigma(t) + \int_0^t \overline{l(s-t)} \sigma(s) ds,$$

где

$$\sigma(t) = g(t) + \int_0^1 \rho(t-s) g(s) ds + \int_0^1 \overline{\rho(-t-s)} \overline{g(s)} ds +$$

$$+ \sum_{s=1}^m \left(\exp(-i\bar{\zeta}_s t) \sum_{j=1}^{\nu_s} (-1)^j \bar{b}_{sj} t^{j-1} - \exp(-i\zeta_s t) \sum_{j=1}^{\nu_s} b_{sj} t^{j-1} \right),$$

$$\rho(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty-ib}^{+\infty-ib} \frac{L(\zeta) + \overline{L(\bar{\zeta})} + L(\zeta)\overline{L(\bar{\zeta})}}{(1+L(\zeta))(1+\overline{L(\bar{\zeta})})} \exp(-i\zeta t) d\zeta,$$

b_{sj} — коэффициенты в суммах $\sum_{j=1}^{\nu_s} \frac{b_{sj} i^j (j-1)!}{(z-\zeta_s)^j}$, представляющих собой главные части разложений функции $G(z)/[(1+L(z))(1+\overline{L(\bar{z})})]$ в ряд Лорана в окрестностях точек ζ_s , $s = \overline{1, m}$.

Литература

1. Черский Ю. И. // Математические методы и физико-математические поля. 1982. Вып. 15. С. 3 — 5.
2. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.; Л., 1948.
3. Черский Ю. И. // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1958. Т. 22, № 3. С. 361 — 378.
4. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свертки. М., 1978.
5. Азаматова В. И. // Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1972. № 5. С. 24 — 33.

Белорусский государственный университет

Поступила в редакцию
2 февраля 1999 г.