

УДК 517.984.5

**ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ СУЩЕСТВЕННЫХ СПЕКТРОВ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ТИПА  
БАЛСЛЕВА — ГАМЕЛИНА — ФАШИАНА В  
ШКАЛЕ ЛЕБЕГОВЫХ ПРОСТРАНСТВ**

В. А. ЕРОВЕНКО

В настоящей работе исследуются спектральные и полуредгольмовы свойства максимальных и минимальных дифференциальных операторов типа Балслева — Гамелина — Фашиана в шкале лебеговых пространств на полуоси и в качестве приложения получены точные формулы для нахождения различных существенных спектров и спектра обыкновенных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами, порядок которых не превосходит порядка соответствующей производной. В работе Балслева и Гамелина исследованы фредгольмовы свойства максимальных дифференциальных операторов, порожденных дифференциальным выражением Фашиана (см. [1, с. 771]) вида  $(mf)(t) = \sum_{j=0}^n a_j(t)f^{(j)}(t)$ , где  $a_k(t) = O(t^k)$ , в пространствах  $L^p(1, \infty)$ ,  $1 < p < \infty$ . Различные существенные спектры максимальных и минимальных дифференциальных операторов Эйлера, порожденных выражением  $m$  с коэффициентами  $a_k(t) = a_k t^k$  в пространствах  $L^p(1, \infty)$  и  $L^p(0, 1)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , впервые вычислены в работе [2].

Для конкретных дифференциальных уравнений функциональные пространства, в которых действуют операторы, соответствующие рассматриваемым уравнениям, условиями задачи, как правило, однозначно не определяются. Поэтому определенный интерес представляют теоремы, посвященные спектральным, фредгольмовым и полуредгольмовым свойствам операторов в шкале лебеговых пространств. В данной работе дополняются и обобщаются результаты о существенных спектрах дифференциальных операторов в пространствах  $L^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , полученные в [2 — 4].

Для замкнутого линейного оператора  $T$  на комплексном банаховом пространстве  $X$  существенные спектры оператора  $T$  можно определить как дополнения в комплексной плоскости  $\mathbf{C}$  множеств, задаваемых различными фредгольмовыми свойствами семейства операторов  $T - \lambda I$ :

$$\sigma_{ek}(T) := \mathbf{C} \setminus \Delta_k(T), \quad k = \overline{1, 5}, \quad \sigma_{e2}^{\pm}(T) := \mathbf{C} \setminus \Phi^{\pm}(T),$$

где  $\Delta_1(T) := \{\lambda \in \mathbf{C} : \overline{R(T - \lambda I)} = R(T - \lambda I)\}$ ,  $\Phi^+(T) := \{\lambda \in \Delta_1(T) : \text{nul}(T - \lambda I) < \infty\}$ ,  $\Phi^-(T) := \{\lambda \in \Delta_1(T) : \text{def}(T - \lambda I) < \infty\}$ ,  $\Delta_2(T) := \Phi^+(T) \cup \Phi^-(T) = s - \Phi(T)$ ,  $\Delta_3(T) := \Phi^+(T) \cap \Phi^-(T) = \Phi(T)$ ,  $\Delta_4(T) := \{\lambda \in \Delta_3(T) : \text{ind}(T - \lambda I) = 0\} = \Phi_0(T)$ ,  $\Delta_5(T) := \{\lambda \in \Delta_4(T) : \text{проколота́я окрестность точки } \lambda \text{ лежит в резольвентном множестве оператора } T \text{ } \rho(T)\}$ .

Каждое из множеств  $\sigma_{ek}(T)$ ,  $k = \overline{1, 5}$ , и  $\sigma_{e2}^{\pm}(T)$  называется существенным спектром; ясно, что  $\sigma_{ek}(T) \subseteq \sigma_{el}(T)$  для  $k \leq l$  и  $\sigma_{e2}(T) \subseteq \sigma_{e2}^{\pm}(T) \subseteq \sigma_{e3}(T)$ , причем включения могут быть, вообще говоря, собственными. Существенные спектры принято называть именами Голдберга  $\sigma_{e1}(T)$ , Като  $\sigma_{e2}(T)$ , Вольфа  $\sigma_{e2}^+(T)$ , Густафсона — Вейдмана  $\sigma_{e2}^-(T)$ , Фредгольма  $\sigma_{e3}(T)$ , Вейля или Шехтера  $\sigma_{e4}(T)$  и Браудера  $\sigma_{e5}(T)$ . Различные характеристические свойства устойчивости существенных спектров при относительно компактных или относительно малых возмущениях, при полиномиальных отображениях, а также некоторые эквивалентные способы их описания даны в [5, 6].

Рассмотрим дифференциальную операцию Балслева — Гамелина — Фашиана, которую можно рассматривать как возмущенную дифференциальную операцию Эйлера вида

$$\omega := \sum_{k=0}^n (a_k + b_k(t)) t^k D^k, \quad a \leq t < \infty, \quad 0 < a < \infty, \quad (1)$$

где  $b_k(t)$  — комплекснозначные функции такие, что  $b_k(t) \in C^k[a, \infty)$ ,  $a_k$  — комплексные числа,  $a_n \neq 0$ ,  $1/(a_n + b_n)$ ,  $b_k \in L^\infty(a, \infty)$ ,  $0 \leq k \leq n$ , и  $D := d/dt$ . Дифференциальное выражение  $\varepsilon := \sum_{k=0}^n a_k t^k D^k$  с соответствующими степенными коэффициентами называется операцией Эйлера [1, 2]. Обозначим через  $T(\omega, p, [a, \infty))$ ,  $0 < a < \infty$ , максимальный оператор, который определен на  $L^p(a, \infty)$  и задается следующим образом:  $D[T(\omega, p, [a, \infty))] := \{f : f^{(n-1)} \in AC_{loc}[a, \infty); f, \omega f \in L^p(a, \infty)\}$ , где  $AC_{loc}[a, \infty)$  — множество комплекснозначных функций  $f$ , абсолютно непрерывных на каждом компактном подынтервале из  $[a, \infty)$ , и  $T(\omega, p, [a, \infty))f := \omega f$  для  $f \in D[T(\omega, p, [a, \infty))]$ , а через  $T_0(\omega, p, [a, \infty))$ ,  $0 < a < \infty$ , обозначим минимальный оператор, определенный на  $L^p(a, \infty)$  для  $1 \leq p < \infty$  как замыкание сужения максимального оператора  $T(\omega, p, [a, \infty))$  на множество функций из  $D[T(\omega, p, [a, \infty))]$ , имеющих компактный носитель в  $(a, \infty)$ , и для  $1 < p \leq \infty$  определенный через банаховый сопряженный  $T'(\omega^*, p', [a, \infty))$ , где  $\omega^*$  — формально сопряженная дифференциальная операция

$$\omega^* g := \sum_{k=0}^n (-1)^k D^k ((a_k + b_k(t)) t^k g), \quad a \leq t < \infty, \quad (2)$$

и  $1/p + 1/p' = 1$ , если  $1 < p < \infty$ ;  $p' = \infty$ , если  $p = 1$ ;  $p' = 1$ , если  $p = \infty$ . Спектральные, фредгольмовы и полужедгольмовы свойства минимальных и максимальных обыкновенных дифференциальных операторов с постоянными, с почти постоянными коэффициентами и дифференциальных операторов Эйлера в шкале лебеговых пространств исследованы в [7 — 10].

Обозначим через  $\gamma(T)$  минимальный модуль Като для замкнутого линейного оператора  $T$ , т.е.  $\gamma(T) := \inf \{\|Tu\|/\text{dist}(u, N(T)) : u \in D(T), u \notin N(T)\}$ , где  $N(T)$  — нуль-пространство, являющееся замкнутым подпространством. Другими словами,  $\gamma(T)$  — это наибольшее число  $\gamma$  такое, что  $\|Tu\| \geq \gamma \text{dist}(u, N(T))$ ,  $u \in D(T)$ . Заметим, что если замкнутый оператор  $T : X \rightarrow Y$ , где  $X, Y$  — банаховы пространства, то область значений  $R(T)$  замкнута тогда и только тогда, когда  $\gamma(T) > 0$  [5, теорема IV.1.6]. Центральное место в дальнейшем исследовании подмножеств спектра возмущенных операторов занимает теорема об устойчивости полужедгольмовых операторов следующего вида (см., например, [5, теорема V.3.6]).

**Лемма 1.** Пусть  $X$  и  $Y$  — банаховы пространства,  $T : X \rightarrow Y$  — замкнутый линейный оператор,  $B : X \rightarrow Y$  и  $D(T) \subset D(B)$ . Если  $T$  — полужедгольмов оператор, т.е.  $\overline{R(T)} = R(T)$ ,  $\text{nul}(T) < \infty$  или  $\text{def}(T) < \infty$ , и  $\|Bx\| \leq a\|x\| + b\|Tx\|$ ,  $x \in D(T)$ , где  $a$  и  $b$  — неотрицательные числа такие, что  $a + b\gamma(T) < \gamma(T)$ , т.е.  $B$  —  $T$ -ограниченный оператор, то тогда оператор  $T+B$  замкнут и полужедгольмов и, кроме того,  $\text{nul}(T+B) \leq \text{nul}(T)$ ,  $\text{def}(T+B) \leq \text{def}(T)$ ,  $\text{ind}(T+B) = \text{ind}(T)$ .

Теорема [10], обобщающая классическую теорему Вейля об инвариантности существенного спектра для новых классов (в определенном смысле относительно малых “на бесконечности”) возмущений, является базовой в изучении свойств рассматриваемых операторов. Доказательство этой теоремы основано на лемме 1 и принципе расщепления для существенных спектров обыкновенных дифференциальных операторов [7, теорема 2]. Для ее формулировки рассмотрим формальную дифференциальную операцию общего вида

$$\mu := \tau + \sum_{k=0}^n b_k(t) D^k = \sum_{k=0}^n (a_k(t) + b_k(t)) D^k, \quad a \leq t < \infty, \quad (3)$$

где  $\tau := \sum_{k=0}^n a_k(t) D^k$  и  $a_k(t)$ ,  $b_k(t)$  — комплекснозначные функции такие, что  $a_k, b_k \in C^k(a, \infty)$ ,  $b_k, 1/(a_n + b_n) \in L^\infty(a, \infty)$ ,  $k = \overline{0, n}$ . Максимальные и минимальные дифференциальные опера-

торы  $T(\mu, p, [a, \infty))$ ,  $T_0(\mu, p, [a, \infty))$ ,  $T(\tau, p, [a, \infty))$  и  $T_0(\tau, p, [a, \infty))$ , порожденные формальными дифференциальными операциями  $\mu$  и  $\tau$  соответственно, определяются так же, как и аналогичные операторы для операции  $\omega$ , задаваемой формулой (1).

**Теорема 1.** Пусть коэффициенты  $b_k(t)$ ,  $0 \leq k \leq n$ , в дифференциальной операции  $\mu$ , определенной по формуле (3), удовлетворяют интегральным условиям малости на бесконечности

$$\sup_{m \leq s < \infty} \int_s^{s+1} |b_k(t)|^p dt \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty, \quad 0 \leq k \leq n-1. \quad (4)$$

Тогда для существенных спектров минимального  $T_0(\mu, p, [a, \infty))$  и максимального  $T(\mu, p, [a, \infty))$  операторов, порожденных дифференциальной операцией  $\mu$  в банаховых пространствах  $L^p(a, \infty)$ ,  $-\infty < a < \infty$ ,  $1 \leq p < \infty$ , и замкнутого дифференциального оператора  $S(\mu, p, [a, \infty))$ , являющегося расширением минимального и сужением максимального операторов, т. е. удовлетворяющего включению  $T_0(\mu, p, [a, \infty)) \subset S(\mu, p, [a, \infty)) \subset T(\mu, p, [a, \infty))$ , справедливы равенства

$$\sigma_{ek}[S(\mu, p, [a, \infty))] = \sigma_{ek}[S(\tau, p, [a, \infty))], \quad k = 1, 2, 2^\pm, 3,$$

$$\sigma_{ek}[T_0(\mu, p, [a, \infty))] = \sigma_{ek}[T_0(\tau, p, [a, \infty))], \quad \sigma_{ek}[T(\mu, p, [a, \infty))] = \sigma_{ek}[T(\tau, p, [a, \infty))], \quad k = 4, 5.$$

**З а м е ч а н и е 1.** При дополнительных ограничениях “малости в среднем на бесконечности” для производных  $b_k^{(i)}(t)$ ,  $1 \leq k \leq n$ ,  $1 \leq i \leq k$ , вида (4) с показателем  $p = 1$  можно доказать в пространстве  $L^\infty(a, \infty)$ ,  $0 < a < \infty$ , с помощью предсопряженных операторов справедливость формул для существенных спектров обыкновенных дифференциальных операторов, рассмотренных в теореме 1.

Операторы Эйлера — это специальные классы обыкновенных дифференциальных операторов порядка  $n$  со степенными коэффициентами при производных вида  $\varepsilon$ . С помощью соответствующих изометрических преобразований минимальные и максимальные дифференциальные операторы Эйлера сводятся к минимальным и максимальным дифференциальным операторам с постоянными коэффициентами (см., например, [1, 5, 8]). При специальных ограничениях “малости на бесконечности” на возмущающие коэффициенты  $b_k(t)$  аналогичным способом можно свести дифференциальные операторы, порожденные возмущенной дифференциальной операцией Эйлера  $\omega$ , к обыкновенным дифференциальным операторам с почти постоянными коэффициентами и затем применить к ним утверждение теоремы 1 об инвариантности существенных спектров относительно рассмотренных возмущений. Совпадение существенных спектров подобных дифференциальных операторов, рассмотренных ниже, вытекает из теоремы 1 работы [7] и следующей теоремы о произведении замкнутых полуфредгольмовых операторов [5, теорема IV.2.7], обобщающей известную теорему Гохберга и Крейна для фредгольмовых операторов.

**Теорема 2.** Пусть  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  — банаховы пространства и замкнутый линейный оператор  $T: X \rightarrow Y$  принадлежит классу  $\Phi^+$ , т. е.  $\overline{R(T)} = R(T)$  и  $\text{nul}(T) < \infty$ . Допустим, что  $V: Z \rightarrow X$  — линейный оператор. Тогда: 1) если оператор  $V$  замкнут, то  $TV$  — замкнутый оператор; 2) если оператор  $V$  нормально разрешимый, т. е.  $\overline{R(T)} = R(T)$ , то оператор  $TV$  нормально разрешимый,  $\overline{R(TV)} = R(TV)$ ; 3) если область определения оператора  $T$  плотна в  $X$  и операторы  $T$  и  $V$  фредгольмовы, то оператор  $TV$  фредгольмов и  $\text{ind}(TV) = \text{ind}(T) + \text{ind}(V)$ ; 4) если области определений операторов  $T$  и  $V$  плотны в  $X$  и  $Z$  соответственно и оператор  $V$  замкнут и принадлежит классу  $\Phi^-$ , т. е.  $\text{def}(V) < \infty$ , то область определения произведения операторов  $TV$  плотна в  $Z$ .

Для исследования области определения дифференциальных операторов, подобных максимальным и минимальным дифференциальным операторам Балслева — Гамелина — Фашиана, рассматриваемых как возмущенные дифференциальные операторы Эйлера, понадобятся следующие вспомогательные леммы.

**Лемма 2.** Пусть функция  $f$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$  и пусть функция  $\varphi$  абсолютно непрерывная и монотонная на отрезке  $[\alpha, \beta]$  и такая, что  $a \leq \varphi(t) \leq b$  для

$\alpha \leq t \leq \beta$ . Тогда функция  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$  интегрируема и справедливо равенство

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

**Лемма 3.** Пусть функция  $f$  абсолютно непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и функция  $\varphi$  определена и абсолютно непрерывна на отрезке  $[\alpha, \beta]$  со значениями, лежащими в интервале  $[a, b]$ . Если выполняется одно из следующих двух условий: *i*) функция  $\varphi$  монотонна; *ii*) функция  $f$  удовлетворяет условию Липшица, то  $f(\varphi(t))$  абсолютно непрерывна на отрезке  $[\alpha, \beta]$ .

С помощью следующей теоремы исследование существенных спектров операторов Балслева — Гамелина — Фашиана можно свести к изучению аналогичных спектров операторов Эйлера.

**Теорема 3.** Пусть коэффициенты  $b_k$  формальной обыкновенной дифференциальной операции  $\omega$ , задаваемой формулой (1), удовлетворяют условиям  $b_k \in L^p_{loc}(a, \infty)$ ,  $0 < a < \infty$ , где  $1 \leq p < \infty$ , и пусть

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{e^s}^{e^{s+1}} \frac{1}{t} |b_k(t)|^p dt = 0, \quad k = \overline{0, n}. \quad (5)$$

Тогда для максимального  $T(\omega, p, [a, \infty))$ , минимального  $T_0(\omega, p, [a, \infty))$  и замкнутого промежуточного  $S(\omega, p, [a, \infty))$ ,  $T_0 \subseteq S \subseteq T$ , дифференциальных операторов Балслева — Гамелина — Фашиана, порожденных формальной операцией  $\omega = \varepsilon + \sum_{k=0}^n b_k(t)t^k D^k$  в лебеговых пространствах  $L^p(a, \infty)$ ,  $0 < a < \infty$ ,  $1 \leq p < \infty$ , и для соответствующих дифференциальных операторов, задаваемых операцией Эйлера  $\varepsilon = \sum_{k=0}^n a_k t^k D^k$ , справедливы равенства

$$\begin{aligned} \sigma_{ek}[S(\omega, p, [a, \infty))] &= \sigma_{ek}[S(\varepsilon, p, [a, \infty))], \quad k = 1, 2, 2^\pm, 3, \\ \sigma_{ek}[T_0(\omega, p, [a, \infty))] &= \sigma_{ek}[T_0(\varepsilon, p, [a, \infty))], \\ \sigma_{ek}[T(\omega, p, [a, \infty))] &= \sigma_{ek}[T(\varepsilon, p, [a, \infty))], \end{aligned} \quad k = 4, 5. \quad (6)$$

**Доказательство.** Воспользуемся отображением  $\Theta : L^p(a, \infty) \rightarrow L^p(a^*, \infty)$ , где  $0 < a < \infty$ ,  $a^* := \ln a$ , определенным для всех функций  $f \in L^p(a, \infty)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , по формуле

$$(\Theta f)(s) := e^{s/p} f(e^s) = g(s), \quad a^* \leq s < \infty. \quad (7)$$

Обратное отображение  $\Theta^{-1} : L^p(a^*, \infty) \rightarrow L^p(a, \infty)$  задается для функций  $g \in L^p(a^*, \infty)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , формулой вида

$$(\Theta^{-1} g)(t) := t^{-1/p} g(\ln t) = f(t), \quad a \leq t < \infty. \quad (8)$$

Из леммы 2 следует, что пространства  $L^p(a, \infty)$  и  $L^p(a^*, \infty)$  эквивалентны относительно отображения  $\Theta$ . Кроме того, поскольку функция  $e^s$  на  $[a^*, \infty)$  и функция  $\ln t$  на  $[a, \infty)$  монотонно возрастающие и бесконечно дифференцируемые, то из леммы 3 и формул (7), (8) получаем

$$\Theta(AC^n[a, \infty) \cap L^p(a, \infty)) = AC^n[a^*, \infty) \cap L^p(a^*, \infty), \quad (9)$$

где  $AC^n(I)$  — пространство комплекснозначных функций  $f$  на множестве  $I \subseteq \mathbf{R}$ , для которых существует производная  $f^{(n-1)} = D^{n-1}f$  абсолютно непрерывная на каждом компактном подынтервале из  $I$ . Если функция  $f$  из пространства  $AC^n[a, \infty)$ , то  $g = \Theta f \in AC^n[a^*, \infty)$  и поэтому в силу равенства (8) имеем

$$\begin{aligned} df/dt &= t^{-(1/p)-1} g'(\ln t) - (1/p)t^{-(1/p)-1} g(\ln t) = t^{-(1/p)-1} [(d/dt - 1/p)g(s)]_{s=\ln t}, \\ d^2 f/dt^2 &= t^{-(1/p)-2} (d/ds) [(d/ds - 1/p)g(s)]_{s=\ln t} - (1/p+1)t^{-(1/p)-2} [(d/ds - 1/p)g(s)]_{s=\ln t} = \\ &= t^{-(1/p)-2} [(d/ds - (1/p+1))(d/ds - 1/p)g(s)]_{s=\ln t}. \end{aligned}$$

Продолжая по индукции, для  $1 \leq k \leq n$  получим равенство

$$d^k f / dt^k = t^{-(1/p)-k} [(d/ds - (1/p + k - 1))(d/ds - (1/p + k - 2)) \dots (d/ds - 1/p)g(s)]_{s=\ln t}.$$

Поэтому для функций  $f \in D[T(\omega, p, [a, \infty))]$  справедливы равенства

$$(\varepsilon f)(t) = t^{-1/p} \left\{ \left[ a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \prod_{j=0}^{k-1} \left( \frac{d}{ds} - \left( \frac{1}{p} + j \right) \right) \right] g(s) \right\}_{s=\ln t}, \quad (10)$$

$$(\omega f)(t) = t^{-1/p} \left\{ \left[ a_0 + b_0(e^s) + \sum_{k=1}^n (a_k + b_k(e^s)) \prod_{j=0}^{k-1} \left( \frac{d}{ds} - \left( \frac{1}{p} + j \right) \right) \right] g(s) \right\}_{s=\ln t}. \quad (11)$$

Рассмотрим обыкновенные дифференциальные операции  $\alpha$  и  $\beta$ , задаваемые формулами

$$\alpha := a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \prod_{j=0}^{k-1} \left[ \frac{d}{ds} - \left( \frac{1}{p} + j \right) \right], \quad \beta := \alpha + b_0(e^s) + \sum_{k=1}^n b_k(e^s) \prod_{j=0}^{k-1} \left[ \frac{d}{ds} - \left( \frac{1}{p} + j \right) \right], \quad (12)$$

и пусть  $T(\alpha, p, [a^*, \infty))$  и  $T(\beta, p, [a^*, \infty))$  — соответствующие этим операциям  $\alpha$ ,  $\beta$  максимальные дифференциальные операторы с областями определения, содержащимися в пространстве  $L^p(a^*, \infty)$ . Из равенств (10), (11) и формулы (7), определяемой преобразование  $\Theta$ , вытекают равенства  $\Theta(\varepsilon f) = \alpha g = \alpha(\Theta f)$ ,  $\Theta(\omega f) = \beta g = \beta(\Theta f)$ , из которых в силу равенства (9) для соответствующих максимальных дифференциальных операторов получаем  $T(\varepsilon, p, [a, \infty)) = \Theta^{-1}T(\alpha, p, [a^*, \infty))\Theta$  и  $T(\omega, p, [a, \infty)) = \Theta^{-1}T(\beta, p, [a^*, \infty))\Theta$ , что эквивалентно равенствам

$$\begin{aligned} T(\varepsilon, p, [a, \infty)) - \lambda I &= \Theta^{-1}(T(\alpha, p, [a^*, \infty)) - \lambda I)\Theta, \\ T(\omega, p, [a, \infty)) - \lambda I &= \Theta^{-1}(T(\beta, p, [a^*, \infty)) - \lambda I)\Theta, \end{aligned} \quad (13)$$

справедливым для всех  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Так как отображение  $\Theta$  — линейная изометрия, то в силу теоремы 2 и теоремы 1 [7] из равенств (13) следует совпадение существенных спектров максимальных дифференциальных операторов Эйлера и дифференциальных операторов Балслева — Гамелина — Фашиана со специальными дифференциальными операторами с постоянными коэффициентами и возмущенными дифференциальными операторами с почти постоянными коэффициентами. Таким образом, принимая во внимание равенство

$$\int_x^{x+1} |b_k(e^s)|^p ds = \int_{e^x}^{e^{x+1}} \frac{1}{t} |b_k(t)|^p dt, \quad 0 \leq k \leq n,$$

в силу условий (5) на функции  $b_k$ , входящие в коэффициенты дифференциальных операторов Балслева — Гамелина — Фашиана, из теоремы 1 вытекает утверждение теоремы для максимальных дифференциальных операторов. Аналогичным образом доказываются равенства для существенных спектров минимальных дифференциальных операторов. А из теоремы 1 [11], в которой сформулированы результаты о совпадении существенных спектров дифференциальных операторов с гладкими коэффициентами, вытекают спектральные соотношения для соответствующих промежуточных операторов.

Для доказательства аналога теоремы 3 для минимальных и максимальных дифференциальных операторов Балслева — Гамелина — Фашиана в лебеговом пространстве  $L^\infty(a, \infty)$ ,  $0 < a < \infty$ , с использованием замечания 1, нам понадобится равенство для сопряженного от произведения плотно определенных операторов и произведения их сопряженных. Вообще говоря, для неограниченных плотно определенных операторов в банаховых пространствах выполняется неравенство  $(ST)' \neq T'S'$ . Сформулируем результат Шехтера [11].

**Лемма 4.** Пусть  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  — банаховы пространства и замкнутый плотно определенный линейный оператор  $T: X \rightarrow Y$  полуфредгольмов класса  $\Phi^-$ , т. е.  $R(\bar{T}) = R(T)$  и

$\text{def}(T) = \dim[Y/R(T)] < \infty$ . Тогда если  $S : Y \rightarrow Z$  — плотно определенный линейный оператор, то  $D(ST)$  плотно в  $X$  и справедливо равенство для сопряженного произведения операторов  $(ST)' = T'S'$ .

**Теорема 4.** Пусть коэффициенты  $b_k$  дифференциальной операции  $\omega$ , определенной по формуле (1), их производные  $b_k^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, k}$ , удовлетворяют интегральному условию (5) для  $p = 1$ . Тогда для существенных спектров минимального  $T_0(\omega, \infty, [a, \infty))$ , максимального  $T(\omega, \infty, [a, \infty))$  и замкнутого промежуточного  $S(\omega, \infty, [a, \infty))$  дифференциальных операторов Балслева — Гамелина — Фашиана, порожденных возмущенной операцией  $\omega$  в лебеговом пространстве  $L^\infty(a, \infty)$ ,  $0 < a < \infty$ , выполняются для  $p = \infty$  равенства (6).

**Доказательство.** Воспользуемся соотношениями двойственности для минимального и максимального операторов, порожденных дифференциальной операцией  $\omega$ , определенной формулой (1), в банаховом пространстве  $L^\infty(a, \infty)$ , и банаховых сопряженных к максимальному и минимальному операторам, порожденных формально сопряженной дифференциальной операцией  $\omega^*$ , задаваемой формулой (2), в банаховом пространстве  $L^1(a, \infty)$ , а именно равенствами вида (см. [5,7])

$$T_0(\omega, \infty, [a, \infty)) = T'(\omega^*, 1, [a, \infty)), \quad T(\omega, \infty, [a, \infty)) = T'_0(\omega^*, 1, [a, \infty)) \quad (14)$$

и аналогичными равенствами двойственности для минимальных и максимальных дифференциальных операторов, порожденных операцией Эйлера  $\epsilon$  и формально сопряженной операцией  $\epsilon^*g := \sum_{k=0}^n (-1)^k D^k(a_k t^k g)$  в соответствующих пространствах  $L^\infty(a, \infty)$  и  $L^1(a, \infty)$ .

Из формул двойственности (14) следует, что дифференциальные операторы  $T(\omega^*, 1, [a, \infty))$  и  $T_0(\omega^*, 1, [a, \infty))$  можно рассматривать как предсопряженные (см. [5]) соответственно к дифференциальным операторам  $T_0(\omega, \infty, [a, \infty))$  и  $T(\omega, \infty, [a, \infty))$ . Заметим, что для сопряженного к ограниченному обратному  $\Theta^{-1}$  ограниченного оператора  $\Theta$  справедливо равенство  $(\Theta^{-1})' = (\Theta')^{-1}$ . Применяя к аналогам равенств (13), записанных для формально сопряженных дифференциальных операций  $\epsilon^*$  и  $\omega^*$  и для  $p = 1$ :

$$\begin{aligned} T(\epsilon^*, 1, [a, \infty)) - \lambda I &= \Theta^{-1}(T(\alpha, 1, [a^*, \infty)) - \lambda I)\Theta, \\ T(\omega^*, 1, [a, \infty)) - \lambda I &= \Theta^{-1}(T(\beta, 1, [a^*, \infty)) - \lambda I)\Theta, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — дифференциальные операции с постоянными коэффициентами, определяемые формулами (12), формулы двойственности (14) для операций  $\omega$  и  $\epsilon$  и используя лемму 4 и теорему 2, получаем с помощью теоремы 3, основанной на базовой теореме 1, искомые равенства для существенных спектров минимальных дифференциальных операторов Балслева — Гамелина — Фашиана  $T_0(\omega, \infty, [a, \infty))$ . Аналогичным способом, используя аналоги равенств (15), для минимальных операторов можно доказать утверждение теоремы для максимальных операторов  $T(\omega, \infty, [a, \infty))$  и, следовательно, в силу теоремы 1 [11] для промежуточных операторов  $S(\omega, \infty, [a, \infty))$ .

Теоремами 3, 4 и результатами из [12 — 14] можно воспользоваться для нахождения точных формул существенных спектров различных типов дифференциальных операторов Балслева — Гамелина — Фашиана в лебеговых пространствах  $L^p(a, \infty)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Сформулируем вспомогательный результат о существенных спектрах дифференциальных операторов Эйлера [2, 8].

**Лемма 5.** Существенные спектры и спектры дифференциальных операторов Эйлера  $T_0(\epsilon, p, [a, \infty))$ ,  $T(\epsilon, p, [a, \infty))$  и  $S(\epsilon, p, [a, \infty))$ , порожденных в  $L^p(a, \infty)$ ,  $0 < a < \infty$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , операцией  $\epsilon$ ,  $p$ -зависимы и вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{ek}[S(\epsilon, p, [a, \infty))] &= \sigma_{e2}^\pm[S(\epsilon, p, [a, \infty))] = \{Q(\lambda) : \text{Re } \lambda = 0\}, \quad k = \overline{1, 3}, \\ \sigma_{ek}[T_0(\epsilon, p, [a, \infty))] &= \sigma[T_0(\epsilon, p, [a, \infty))] = \{Q(\lambda) : \text{Re } \lambda \geq 0\}, \\ \sigma_{ek}[T(\epsilon, p, [a, \infty))] &= \sigma[T(\epsilon, p, [a, \infty))] = \{Q(\lambda) : \text{Re } \lambda \leq 0\}, \quad k = 4, 5, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $Q$  — полином, соответствующий дифференциальной операции  $\alpha$  (12), задаваемый равенством

$$Q(t) := a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \prod_{j=0}^{k-1} \left[ t - \left( \frac{1}{p} + j \right) \right]. \quad (17)$$

**Теорема 5.** При выполнении условий на коэффициенты  $b_k$  дифференциальной операции  $\omega$  из теоремы 3 для  $1 \leq p < \infty$  и теоремы 4 для  $p = \infty$  для существенных спектров и спектра минимальных, максимальных и промежуточных дифференциальных операторов Балслева — Гамелина — Фашиана, заданных в пространствах  $L^p(a, \infty)$ ,  $0 < a < \infty$ , для всех  $1 \leq p \leq \infty$ , справедливы формулы вида (16), в которых следует записать  $\omega$  вместо  $\varepsilon$ .

Доказательство утверждения следует из равенств для существенных спектров соответствующих дифференциальных операторов Балслева — Гамелина — Фашиана и дифференциальных операторов Эйлера, полученных в теоремах 3, 4, и из леммы 5.

В качестве приложения теоремы 5 опишем все существенные спектры дифференциальных операторов, рассмотренных в работах [1, 5], а именно рассмотрим минимальный  $T_0(r, p, [a, \infty))$ , максимальный  $T(r, p, [a, \infty))$  и промежуточный  $S(r, p, [a, \infty))$  дифференциальные операторы, порожденные в лебеговых пространствах  $L^p(a, \infty)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , дифференциальной операцией Римана  $r$  вида

$$(rf)(t) := t(t+1)f^{(2)}(t) + (at+b)f'(t) + ((ct^2+dt+e)/(t(t+1)))f(t), \quad (18)$$

где  $a, b, c, d, e$  — произвольные комплексные числа.

**Следствие 1.** Для существенных спектров  $\sigma_{ek}$ ,  $k = \overline{1, 5}$ , и  $\sigma_{e2}^\pm$  дифференциальных операторов Римана, порожденных в лебеговых пространствах  $L^p(a, \infty)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , формальной операцией  $r$  (18), справедливы формулы типа (16), в которых следует положить  $r$  вместо  $\varepsilon$  и  $Q(t) = (t-1/p)(t-(1/p)-1) + a(t-1/p) + c$ .

Это утверждение вытекает из теоремы 5, так как дифференциальную операцию (18) можно представить в виде  $(rf)(t) = t^2(1+b_2(t))f^{(2)}(t) + t(a+b_1(t))f'(t) + (c+b_0(t))f(t)$  с коэффициентами  $b_2(t) = 1/t$ ,  $b_1(t) = b/t$  и  $b_0(t) = (d-c)/(t+1) + e/(t(t+1))$ .

**Замечание 2.** Отображение  $(\Theta f)(s) = e^{s/p} f(e^s)$  (см. формулу (7)) устанавливает также изометрический изоморфизм пространства  $L^p(0, a)$ ,  $0 < a < \infty$ , и  $L^p(-\infty, a^*)$ , где  $a^* = \ln a$ . Поэтому максимальный дифференциальный оператор Балслева — Гамелина — Фашиана  $T(\omega, p, (0, a))$ , задаваемый формулой (1), в пространстве  $L^p(0, a)$  подобен через  $\Theta$  максимальному дифференциальному оператору  $T(\beta, p, (-\infty, a^*))$ , задаваемому формулой (12), в пространстве  $L^p(-\infty, a^*)$ . Аналогичное утверждение справедливо и для соответствующих минимальных операторов.

**Замечание 3.** Оператор  $D = d/dt$  в пространстве  $L^p(-\infty, a^*)$  подобен через изометрическое отображение  $\nu f(t) := f(-t)$  оператору  $(-D)$  в пространстве  $L^p(-a^*, \infty)$ , так как  $D\nu f(t) = (-Df)(-t) = \nu(-Df)(t)$ , т. е.  $\nu^{-1}D\nu = -D$ . Поэтому максимальный дифференциальный оператор  $T(D, p, (-\infty, a^*))$  подобен максимальному дифференциальному оператору  $T(-D, p, [-a^*, \infty))$ . То же справедливо и для соответствующих минимальных операторов.

**Следствие 2.** Пусть  $T_0(\omega, p, (0, a])$  и  $T(\omega, p, (0, a])$  — минимальный и максимальный дифференциальные операторы Балслева — Гамелина — Фашиана, порожденные в лебеговых пространствах  $L^p(0, a)$ ,  $0 < a < \infty$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , операцией  $\omega$  (1) и пусть коэффициенты  $b_k$  удовлетворяют условиям теоремы 3 для  $1 \leq p < \infty$  и теоремы 4 для  $p = \infty$ . Тогда существенные спектры минимального, максимального и замкнутого промежуточного дифференциальных операторов  $p$ -зависимы и находятся по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{ek}[S(\omega, p, (0, a])] &= \sigma_{e2}^\pm[S(\omega, p, (0, a])] = \{Q(\lambda) : \operatorname{Re} \lambda = 0\}, & k = 1, 2, 3, \\ \sigma_{ek}[T_0(\omega, p, (0, a])] &= \sigma[T_0(\omega, p, (0, a])] = \{Q(\lambda) : \operatorname{Re} \lambda \leq 0\}, & \\ \sigma_{ek}[T(\omega, p, (0, a])] &= \sigma[T(\omega, p, (0, a])] = \{Q(\lambda) : \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}, & k = 4, 5, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $Q$  — полином, определенный формулой (17).

Доказательство следует из аналога теоремы 5 и замечаний 2 и 3 (см. также теорему 4 из [8]). Отличие формул (19) от формул (16) связано с тем, что, хотя для существенных спектров Фредгольма они совпадают, так как  $\sigma_{\text{ез}}[T_0(D, p, (-\infty, a^*))] = \sigma_{\text{ез}}[T(D, p, (-\infty, a^*))] = \{\lambda \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} \lambda = 0\}$ , спектры минимального и максимального дифференциальных операторов соответственно равны  $\sigma[T_0(D, p, (-\infty, a^*))] = \{\lambda \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} \lambda \leq 0\}$  и  $\sigma[T(D, p, (-\infty, a^*))] = \{\lambda \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$ .

Отметим, что в работе [15] изучались спектральные свойства самосопряженных дифференциальных операторов Эйлера и некоторых их возмущений в гильбертовом пространстве.

### Литература

1. *Balslev E., Gamelin T.W.* // Pacific J. Math. 1964. Vol. 14, N 3. P. 755 — 776.
2. *Еровенко В. А.* // Докл. АН Беларуси. 1994. Т. 38, № 1. С. 21 — 26.
3. *Еровенко В. А.* // Докл. АН Беларуси. 1995. Т. 39, № 2. С. 26 — 30.
4. *Еровенко В. А.* // Докл. АН Беларуси. 1996. Т. 40, № 2. С. 39 — 43.
5. *Goldberg S.* Unbounded linear operators. Theory and application. N. Y., 1966.
6. *Edmunds D. E., Evans W. D.* Spectral theory and differential operators. Oxford, 1987.
7. *Еровенко В. А.* // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 8. С. 1024 — 1034.
8. *Еровенко В. А.* // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 9. С. 1162 — 1170.
9. *Еровенко В. А.* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 7. С. 867 — 875.
10. *Еровенко В. А.* // Matemat. Vesnik. 1997. Vol. 49, N 3, 4. P. 177 — 185.
11. *Schechter M.* // J. Functional Anal. 1970. Vol. 6, N 1. P. 26 — 28.
12. *Еровенко В. А.* // Докл. НАН Беларуси. 1998. Т. 42, № 2. С. 13 — 17.
13. *Еровенко В. А.* // Докл. НАН Беларуси. 1998. Т. 42, № 5. С. 40 — 44.
14. *Еровенко В. А.* // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 1. С. 58 — 64.
15. *Evans W. D., Kwong M. K., Zettl A.* // J. Differ. Equat. 1983. Vol. 48, N 1. P. 123 — 155.

Белорусский государственный университет

Поступила в редакцию  
11 ноября 1998 г.