2000. Т. 36, № 5. С. 703 — 708

УДК 519.63

ОБ ОДНОМ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. III

А. А. Егоров

1. Введение. Настоящая статья завершает цикл работ [1, 2] по построению и исследованию экономичных итерационных методов декомпозиции области решения эллиптических краевых задач. Проблема разработки и усовершенствования эффективных алгоритмов решения уравнений математической физики в сложных составных областях, хорошо адаптирующихся для реализации на многопроцессорных ЭВМ, является весьма актуальной [3 — 5]. Для стационарных задач к таким методам можно отнести в первую очередь итерационные методы Шварца и разделения области [5, 6], позволяющие свести исходную задачу к решению подзадач, рассматриваемых в подобластях. Для разбиения исходной задачи на подобласти наряду с указанными методами используются также методы переменных направлений и суммарной аппроксимации (покомпонентного расщепления) [7 — 12]. К недостаткам первого алгоритма относится невозможность его применения в случае трех и более компонент разбиения, что не позволяет реализовать идею декомпозиции области в полном объеме. Схемы покомпонентного расщепления строятся на основе суммарной аппроксимации и малоэффективны при решении стационарных задач.

Отметим, что классический вариант метода Шварца так же, как и некоторые его обобщения на многокомпонентный случай (см., например, [13 — 16]), относится к алгоритмам последовательного типа. Естественно ориентироваться на создание методов декомпозиции с параллельной обработкой информации [4, 17] (для случая двух подобластей такие методы построены в [18, 19]). С этой точки зрения наиболее перспективным представляется использование в качестве схем декомпозиции многокомпонентного метода переменных направлений (ММПН) [20 — 23]. Этот метод абсолютно устойчив для любого числа попарно неперестановочных операторов разбиения, являясь при этом алгоритмом полной аппроксимации. Последнее свойство обеспечивает эффективность ММПН именно как итерационного метода для решения стационарных уравнений математической физики. В данной работе для эллиптической краевой задачи общего вида предложен и обоснован итерационный метод типа разделения области для произвольного числа подобластей разбиения. Доказательство сходимости итерационного процесса опирается на методику, предложенную в [24] и развитую в работах [25 — 27]. Полученные результаты существенно улучшают результаты аналогичных исследований, проведенных в [1, 2].

2. Постановка задачи и построение вычислительного алгоритма. Пусть имеется ограниченная область $G \subset R^n$ с кусочно-гладкой границей ∂G, локально удовлетворяющей условию Липшица. В $\overline{G} = G \cup \partial G$ рассмотрим задачу Дирихле

$$Lu = f(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in G, \quad u(x) = 0, \quad x \in \partial G, \tag{1}$$

$$Lu = -\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right) + c(x)u$$

— эллиптический оператор, коэффициенты которого $k_{\alpha\beta}(x) = k_{\beta\alpha}(x)$, $x \in \overline{G}$, $c(x) \geq 0$ — кусочно-гладкие вещественные функции. Предполагается также, что для оператора L выполнены условия сильной эллиптичности

$$\mu_0 \sum_{\alpha=1}^{n} \xi_\alpha^2 \leq \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} k_{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \leq \mu_1 \sum_{\alpha=1}^{n} \xi_\alpha^2, \quad x \in \overline{G},$$

где $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — произвольный вещественный ненулевой вектор из R^n, μ_0, μ_1 — положительные постоянные, $f(x) \in L_2(G)$.

Рассмотрим гильбертово пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^1(G) \subset L_2(G)$ и введем в нем скалярное произведение и норму:

$$[u, v] = \int_G \Big(\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} k_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v}{\partial x_\beta} + c(x) uv \Big)\, dx, \quad \|u\| = \sqrt{[u, u]}.$$

Тогда задачу (1) можно записать в следующей обобщенной форме:

$$[u, v] = f(v), \tag{2}$$

где $v(x)$ — произвольная функция из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$, $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ — искомое решение, $f(v) \equiv \equiv (f, v) = \int\limits_G f(x) v(x)\, dx$ — линейный непрерывный функционал над $\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$. При сделанных предположениях задача (1) имеет единственное обобщенное решение $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$, удовлетворяющее (2).

Разобьем область G на подобласти $G_1, \ldots, G_N$: $G = \bigcup\limits_{\alpha=1}^{N} G_\alpha$. Определим границу подобласти G_α, $\alpha = \overline{1, N}$, следующим образом: $\Gamma_\alpha = \gamma_\alpha \bigcup \partial G_\alpha$, где ∂G_α — часть границы Γ_α, принадлежащая ∂G, т.е. $\partial G_\alpha = \partial G \bigcap \Gamma_\alpha$; $\gamma_\alpha = \bigcup\limits_{m=1}^{p} \gamma_{k_m}^{(\alpha)}$, $\gamma_{k_m}^{(\alpha)}$ — граница раздела области G_α с соприкасающейся подобластью G_{k_m}. Предполагается также, что границы областей Γ_α локально удовлетворяют условию Липшица и $\operatorname{mes}(\partial G_\alpha) > 0$, $\alpha = \overline{1, N}$.

Предположим, что на границе γ_α определена внешняя по отношению к G_α конормальная производная

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial \nu_\alpha} = \sum_{i,j=1}^{n} k_{ij}(x) \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} \cos(n_\alpha, x_i),$$

где n_α — внешняя по отношению к G_α нормаль, $\cos(n_\alpha, x_i)$ — i-й направляющий косинус этой нормали.

Как правило, при построении итерационных методов решения задачи (1) используется классическая процедура установления $\partial u/\partial t + Lu = f$. Применительно к методам разделения области наиболее логичным представляется проведение установления только на внутренних границах подобластей. В этом случае внутри области G_α решается уравнение (1), а на γ_α, $\alpha = \overline{1, N}$, формулируются условия

$$\partial u_\alpha/\partial t + \partial u_\alpha/\partial \nu_\alpha + \partial u_\beta/\partial \nu_\beta = 0, \quad \beta = k_1^{(\alpha)}, \ldots, k_p^{(\alpha)}, \tag{3}$$

естественным образом объединяющие стандартные условия сопряжения $\partial u_\alpha/\partial \nu_\alpha + \partial u_\beta/\partial \nu_\beta = 0$, $u_\alpha - u_\beta = 0$.

Для решения задачи (1) рассмотрим следующий итерационный алгоритм. Пусть функция $\overset{\circ}{u}_\alpha(x)$ определена на G_α, функции $\overset{s}{u}_\alpha(x) \in W_2^1(G_\alpha)$, $\overset{s}{u}_\alpha = 0$ на Γ_α, $\alpha = \overline{1, N}$. Тогда для определения приближений $\overset{s+1}{u}_\alpha$ используем итерационный процесс ММПН:

$$L \overset{s+1}{u}_\alpha = f(x), \quad x \in G_\alpha, \quad \overset{s+1}{u}_\alpha = 0, \quad x \in \partial G_\alpha, \quad \alpha = \overline{1, N}, \tag{4}$$

$$(\overset{s+1}{u}_\alpha - \overset{s}{\tilde{u}})/\tau + \sigma(\partial \overset{s+1}{u}_\alpha/\partial \nu_\alpha - \partial \overset{s}{u}_\alpha/\partial \nu_\alpha) + \partial \overset{s}{u}_\alpha/\partial \nu_\alpha + \partial \overset{s}{u}_\beta/\partial \nu_\beta = 0, \quad x \in \gamma_\beta^{(\alpha)}, \tag{5}$$

$\overset{s}{\tilde{u}}_\alpha = 0{,}5(\overset{s}{u}_\alpha + \overset{s}{u}_\beta)$, $\beta = k_1^{(\alpha)}, \ldots, k_p^{(\alpha)}$, $\alpha = \overline{1, N}$. Метод (4), (5) относится к методам с параллельной (асинхронной) обработкой информации, что позволяет решать задачи во всех подобластях одновременно. При этом выполнение условий сопряжения (3) обеспечивается введением усреднения решения $\tilde{u}$ на границе подобластей. Численная реализация задачи (4), (5) достаточно легко осуществляется с помощью разностных (проекционно-разностных) методов.

3. Сходимость метода. Исследуем проблему сходимости итерационного процесса (4), (5). Для этого рассмотрим пространство R_α L-гармонических в G_α функций $u(x) \in W_2^1(G_\alpha)$ таких, что $u = 0$ на границе ∂G_α (функцию $u(x) \in W_2^1(G_\alpha)$ называем L-гармонической, если она почти всюду в G_α удовлетворяет уравнению $Lu = 0$). Определим на R_α, $\alpha = \overline{1,N}$, оператор конормальной производной на γ_α:

$$B_\alpha u = (\partial u/\partial\nu_\alpha)|_{\gamma_\alpha}. \tag{6}$$

В силу сделанных ограничений на коэффициенты уравнения (1) оператор (6) является самосопряженным и положительно-определенным. В самом деле, используя формулу Грина, получим равенство

$$(Lu,v)_{L_2(G_\alpha)} = [u,v]_\alpha - (B_\alpha u, v)_{L_2(\gamma_\alpha)} = 0, \quad [u,v]_\alpha = \int\limits_{G_\alpha}\Big(\sum_{i,j=1}^n k_{ij}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial v}{\partial x_j} + c(x)uv\Big)dx.$$

Следовательно, $(B_\alpha u,v)_{L_2(\gamma_\alpha)} = [u,v]_\alpha = (u, B_\alpha v)_{L_2(\gamma_\alpha)}$. Кроме того, $(B_\alpha u,u)_{L_2(\gamma_\alpha)} = [u,u]_\alpha \geq$ $\geq \mu_0\|\nabla u\|^2_{L_2(G_\alpha)} \geq c_0\|u\|^2_{L_2(\gamma_\alpha)}$, c_0 — положительная постоянная. Указанные свойства оператора B_α позволяют ввести на R_α скалярное произведение и норму: $(u,v)_\alpha = (B_\alpha u, v)_{L_2(\gamma_\alpha)}$, $\|u\|_\alpha = \sqrt{(u,u)_\alpha}$.

Для доказательства сходимости итерационного процесса (4), (5) достаточно рассмотреть уравнения лишь на внутренних границах γ_α. Если сложить уравнения (5), записанные для двух соседних подобластей, то получим равенство

$$(\overset{s+1}{\tilde{u}} - \overset{s}{\tilde{u}})/\tau + \sigma^*(\partial\overset{s+1}{u}_\alpha/\partial\nu_\alpha + \partial\overset{s+1}{u}_\beta/\partial\nu_\beta) + (1-\sigma^*)(\partial\overset{s}{u}_\alpha/\partial\nu_\alpha + \partial\overset{s}{u}_\beta/\partial\nu_\beta) = 0, \quad x \in \gamma_\beta^{(\alpha)}, \tag{7}$$

где $\sigma^* = \sigma/2$, $\beta = k_1^{(\alpha)},\ldots,k_p^{(\alpha)}$, $\alpha = \overline{1,N}$. Исследуем случай $\sigma = 2$, что соответствует чисто неявной итерационной схеме метода установления.

Обозначим $\overset{s+1}{u}_{\alpha t} = (\overset{s+1}{u}_\alpha - \overset{s}{u}_\alpha)/\tau$ и заметим, что $\overset{s+1}{u}_{\alpha t} \in R_\alpha$, $\alpha = \overline{1,N}$. Умножим каждое из уравнений (5) скалярно на $\tau B_\alpha \overset{s+1}{u}_{\alpha t}$ и просуммируем полученные равенства по $\alpha = \overline{1,N}$:

$$\sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=k_1^{(\alpha)}}^{k_p^{(\alpha)}} \Big(\overset{s+1}{u}_\alpha - \overset{s}{\tilde{u}}, B_\alpha \overset{s+1}{u}_{\alpha t}\Big)_{L_2(\gamma_\beta^{(\alpha)})} + F(\overset{s+1}{u}_t\ ) + 0{,}5\,\|\rho(s+1)\|_{\mathrm{I}}^2 = 0{,}5\,\|\rho(s)\|_{\mathrm{I}}^2, \tag{8}$$

$$F(\overset{s+1}{u}_t\ ) = 2\tau^2\sum_{\alpha=1}^N\Big\|B_\alpha \overset{s+1}{u}_{\alpha t}\Big\|^2_{L_2(\gamma_\alpha)} - 0{,}5\tau^2\sum_{\alpha=1}^N\sum_{\beta=k_1^{(\alpha)},\,\beta>\alpha}^{k_p^{(\alpha)}}\Big\|B_\alpha\overset{s+1}{u}_{\alpha t} + B_\beta\overset{s+1}{u}_{\beta t}\Big\|^2_{L_2(\gamma_\beta^{(\alpha)})},$$

$$\|\rho(s+1)\|_{\mathrm{I}}^2 = \sum_{\alpha=1}^N\sum_{\beta=k_1^{(\alpha)},\,\beta>\alpha}^{k_p^{(\alpha)}}\left\|\frac{\partial\overset{s+1}{u}_\alpha}{\partial\nu_\alpha} + \frac{\partial\overset{s+1}{u}_\beta}{\partial\nu_\beta}\right\|^2_{L_2(\gamma_\beta^{(\alpha)})}.$$

Преобразуем некоторые слагаемые левой части равенства (8), для чего представим первое слагаемое в виде

$$\tau\sum_{\alpha=1}^N\Big\|\overset{s+1}{u}_{\alpha t}\Big\|^2_\alpha + 0{,}5\sum_{\alpha=1}^N\sum_{\beta=k_1^{(\alpha)},\,\beta>\alpha}^{k_p^{(\alpha)}}\Big(\overset{s}{v}^{(\alpha,\beta)}, B_\alpha\overset{s+1}{u}_{\alpha t} - B_\beta\overset{s+1}{u}_{\beta t}\Big)_{L_2(\gamma_\beta^{(\alpha)})} \equiv \tau\sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2,$$

где $\overset{s}{v}^{(\alpha,\beta)} = \overset{s}{u}_\alpha - \overset{s}{u}_\beta$. Учитывая, что $B_\alpha\overset{s+1}{u}_{\alpha t} - B_\beta\overset{s+1}{u}_{\beta t} = -0{,}5\tau^{-2}\overset{s+1}{v}^{(\alpha,\beta)}$, получим тождество

$$\sum\nolimits_2 = -\frac{1}{4}\tau^{-2}\sum_{\alpha=1}^N\sum_{\beta=k_1^{(\alpha)},\,\beta>\alpha}^{k_p^{(\alpha)}}\Big(\overset{s}{v}^{(\alpha,\beta)}, \overset{s+1}{v}^{(\alpha,\beta)}\Big)_{L_2(\gamma_\beta^{(\alpha)})} = (1/8)\tau^{-2}\Big(\tau^2\|\overset{s+1}{v}_t\|^2_{\mathrm{III}} - \|\overset{s+1}{v}\|^2_{\mathrm{III}} - \|\overset{s}{v}\|^2_{\mathrm{III}}\Big),$$

где $\|\overset{s+1}{v}\|^2_{\mathrm{III}} = \sum\limits_{\alpha=1}^{N} \sum\limits_{\beta=k_1^{(\alpha)},\,\beta>\alpha}^{k_p^{(\alpha)}} \left(\overset{s+1}{v}{}^{(\alpha,\beta)}, \overset{s+1}{v}{}^{(\alpha,\beta)}\right)_{L_2(\gamma_\beta^{(\alpha)})}$. Из свойств оператора конормальной производной и уравнения (7) при $\sigma^* = 1$ вытекает неравенство

$$\sum\nolimits_1 \geq c_0 \sum_{\alpha=1}^{N} \left\|\overset{s+1}{u}_{\alpha t}\right\|^2_{L_2(\gamma_\alpha)} \equiv c_0 \sum\nolimits_1' = c_0\Bigl(2\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{\beta=k_1^{(\alpha)},\,\beta>\alpha}^{k_p^{(\alpha)}} \left\|\overset{s+1}{\tilde{u}}_t\right\|^2_{L_2(\gamma_\beta^{(\alpha)})} + 0{,}5\|\overset{s+1}{v}_t\|^2_{\mathrm{III}}\Bigr) =$$

$$= c_0\Bigl(2\|\rho(s+1)\|^2_{\mathrm{I}} + 0{,}5\|\overset{s+1}{v}_t\|^2_{\mathrm{III}}\Bigr).$$

Пусть $c_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — положительные постоянные. Тогда с учетом предыдущих преобразований из равенства (8) приходим к выражению

$$0{,}5(1+4\varepsilon_1\tau)\|\rho(s+1)\|^2_{\mathrm{I}} + (1/8)\Bigl(\|\overset{s+1}{v}_t\|^2_{\mathrm{III}} - \tau^{-2}\|\overset{s+1}{v}\|^2_{\mathrm{III}} - \tau^{-2}\|\overset{s}{v}\|^2_{\mathrm{III}}\Bigr) + \varepsilon_2\tau\sum\nolimits_1' +$$

$$+ 0{,}5\varepsilon_1\tau\|\overset{s+1}{v}_t\|^2_{\mathrm{III}} + F(\overset{s+1}{u}_t) \leq 0{,}5\|\rho(s)\|^2_{\mathrm{I}}. \tag{9}$$

Используя для оценки $F(\overset{s+1}{u}_t)$ тождество $\tau^{-2}F(\overset{s+1}{u}_t) = 0{,}5\sum\limits_{\alpha=1}^{N} \sum\limits_{\beta=k_1^{(\alpha)},\,\beta>\alpha}^{k_p^{(\alpha)}} \left\|B_\alpha \overset{s+1}{u}_{\alpha t} - B_\beta \overset{s+1}{u}_{\beta t}\right\|^2_{L_2(\gamma_\beta^{(\alpha)})} = (1/8)\tau^{-4}\|\overset{s+1}{v}\|^2_{\mathrm{III}}$, получим неравенство

$$F(\overset{s+1}{u}_t) \geq 0{,}25\tau^{-2}\|\overset{s+1}{v}\|^2_{\mathrm{III}}. \tag{10}$$

Далее, оценим величину $\sum_1'$. Из уравнения (5) находим, что $\overset{s+1}{u}_{\alpha t} = -(0{,}5\tau^{-1}(\overset{s}{u}_\alpha - \overset{s}{u}_\beta) + 2\tau B_\alpha \overset{s+1}{u}_{\alpha t} + \partial\overset{s}{u}_\alpha/\partial\nu_\alpha + \partial\overset{s}{u}_\beta/\partial\nu_\beta)$. Возведем последнее выражение скалярно в квадрат и просуммируем по $\alpha = \overline{1,N}$:

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \left\|\overset{s+1}{u}_{\alpha t}\right\|^2_{L_2(\gamma_\alpha)} = \frac{1}{4}\tau^{-2}\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{\beta=k_1^{(\alpha)}}^{k_p^{(\alpha)}} \left\|\overset{s}{u}_\alpha - \overset{s}{u}_\beta\right\|^2_{L_2(\gamma_\beta^{(\alpha)})} + 4\tau^2\sum_{\alpha=1}^{N} \left\|B_\alpha \overset{s+1}{u}_{\alpha t}\right\|^2_{L_2(\gamma_\alpha)} + 2\,\|\rho(s)\|^2_{\mathrm{I}} +$$

$$+ 4\tau\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{\beta=k_1^{(\alpha)}}^{k_p^{(\alpha)}} \left(B_\alpha \overset{s+1}{u}_{\alpha t}, \frac{\partial \overset{s}{u}_\alpha}{\partial\nu_\alpha} + \frac{\partial\overset{s}{u}_\beta}{\partial\nu_\beta}\right)_{L_2(\gamma_\beta^{(\alpha)})} - 2\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{\beta=k_1^{(\alpha)},\,\beta>\alpha}^{k_p^{(\alpha)}} \left(\overset{s}{v}{}^{(\alpha,\beta)}, B_\alpha \overset{s+1}{u}_{\alpha t} - B_\beta \overset{s+1}{u}_{\beta t}\right)_{L_2(\gamma_\beta^{(\alpha)})} +$$

$$+ \tau^{-1}\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{\beta=k_1^{(\alpha)}}^{k_p^{(\alpha)}} \left(\overset{s}{v}{}^{(\alpha,\beta)}, \frac{\partial\overset{s}{u}_\alpha}{\partial\nu_\alpha} + \frac{\partial\overset{s}{u}_\beta}{\partial\nu_\beta}\right)_{L_2(\gamma_\beta^{(\alpha)})} \equiv \sum_{i=1}^{6} S_i. \tag{11}$$

Используя очевидные тождества

$$S_2 + S_3 + S_4 = 4\tau^2\sum_{\alpha=1}^{N} \left\|B_\alpha \overset{s+1}{u}_{\alpha t}\right\|^2_{L_2(\gamma_\alpha)} - 2\tau^2\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{\beta=k_1^{(\alpha)},\,\beta>\alpha}^{k_p^{(\alpha)}} \left\|B_\alpha \overset{s+1}{u}_{\alpha t} + B_\beta \overset{s+1}{u}_{\beta t}\right\|^2_{L_2(\gamma_\beta^{(\alpha)})} + 2\|\rho(s+1)\|^2_{\mathrm{I}} =$$

$$= 0{,}5\tau^{-2}\|\overset{s+1}{v}\|^2_{\mathrm{III}} + 2\|\rho(s+1)\|^2_{\mathrm{I}}, \quad S_5 = 0{,}5\tau^{-2}\Bigl(\|\overset{s+1}{v}\|^2_{\mathrm{III}} + \|\overset{s}{v}\|^2_{\mathrm{III}} - \tau^2\|\overset{s+1}{v}_t\|^2_{\mathrm{III}}\Bigr), \quad S_6 = 0,$$

преобразуем равенство (11) к виду $\sum_1 = \tau^{-2}\|\overset{s+1}{v}\|^2_{\mathrm{III}} + \tau^{-2}\|\overset{s}{v}\|^2_{\mathrm{III}} - 0{,}5\|\overset{s+1}{v}_t\|^2_{\mathrm{III}} + 2\|\rho(s+1)\|^2_{\mathrm{I}}$. Окончательно из неравенства (9) с учетом (10) и последнего равенства имеем оценку $(1+4c_0\tau)\|\rho(s+1)\|^2_{\mathrm{I}} + 0{,}25\tau^{-2}(1+8\varepsilon_2\tau)\|\overset{s+1}{v}\|^2_{\mathrm{III}} + 0{,}25(1+4(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\tau)\|\overset{s+1}{v}_t\|^2_{\mathrm{III}} \leq \|\rho(s)\|^2_{\mathrm{I}} + 0{,}25\tau^{-2}\|\overset{s}{v}\|^2_{\mathrm{III}}$.

Следовательно, справедлива

Теорема. *Пусть выполнены условия* $\sigma = 2$, $1 + 4(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\tau \geq 0$, $c_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — *положительные постоянные. Тогда итерационный метод (4), (5) сходится со скоростью геометрической прогрессии, при этом справедлива оценка*

$$\overset{s}{Q}{}^2 \leq q^s \overset{0}{Q}{}^2, \tag{12}$$

где $\overset{s}{Q}{}^2 = \|\rho(s)\|_{\mathrm{I}}^2 + 0{,}25\tau^{-2}\|\overset{s}{v}\|_{\mathrm{III}}^2$, $q = \max\{1/(1+4c_0\tau), 1/(1+8\varepsilon_2\tau)\}$.

Таким образом, неравенство (12) гарантирует при $s \to \infty$ стремление величины $\partial\overset{s}{u}_\alpha/\partial\nu_\alpha + \partial\overset{s}{u}_\beta/\partial\nu_\beta$ к нулю и компонент $\overset{s}{u}_\alpha, \overset{s}{u}_\beta$ друг к другу, что обеспечивает выполнение условий сопряжения (3). Из теоремы следует, что скорость сходимости метода (4), (5) возрастает с увеличением итерационного параметра τ, причем на рост τ практически не накладывается ограничений. Для выполнения неравенства $1 + 4(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\tau \geq 0$ достаточно, например, положить $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. При $\sigma > 2$ рассматриваемый итерационный процесс также сходится и для его скорости сходимости справедлива оценка (12) с незначительной корректировкой константы q.

Отметим, что при получении оценки (12) нами использовалась только нижняя граница спектра операторов B_α. Поэтому итерационную схему (4), (5) можно применять непосредственно для задачи с дифференциальными операторами, не проводя их предварительную дискретизацию.

Наряду с параллельным алгоритмом (4), (5) для решения исходной задачи можно предложить также последовательный (синхронный) итерационный метод декомпозиции, основанный на ММПН:

$$L\overset{s+1}{u}_\alpha = f(x), \quad x \in G_\alpha, \quad \overset{s+1}{u}_\alpha = 0, \quad x \in \partial G_\alpha, \quad \alpha = \overline{1,N}, \tag{13}$$

$$(\overset{s+1}{u}_\alpha - \overset{s}{\tilde{u}})/\tau + \partial\overset{s+1}{u}_\alpha/\partial\nu_\alpha + \partial\overset{r}{u}_\beta/\partial\nu_\beta = 0, \quad x \in \gamma_\beta^{(\alpha)}, \quad \beta = k_1^{(\alpha)}, \ldots, k_p^{(\alpha)}, \quad \alpha = \overline{1,N},$$

где $r = s$, если $\beta > \alpha$, $r = s+1$, если $\beta < \alpha$, сходимость которого исследуется аналогичным образом с использованием описанной выше методики.

4. Обобщения. Среди возможных обобщений рассмотрим применение предложенного в работе метода к решению стационарной задачи конвекции-диффузии

$$Lu \equiv -\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right) + \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + c(x)u = f(x), \quad x \in G, \quad u(x) = 0, \quad x \in \partial G, \tag{14}$$

где коэффициенты $k_{\alpha\beta}(x), c(x)$ удовлетворяют тем же условиям, а функции $a_\alpha(x)$ определяют конвективный перенос. Используя условие несжимаемости среды $\sum\limits_{\alpha=1}^{n} \partial a_\alpha(x)/\partial x_\alpha = 0$, запишем уравнение (14) в дивергентной форме

$$-\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right) + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(a_\alpha(x)u) + c(x)u = f(x).$$

В этом случае конормальная производная на γ_α задается выражением

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial \nu_\alpha} = \sum_{i,j=1}^{n} k_{ij}(x)\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j}\cos(n_\alpha, x_i) - \sum_{i=1}^{n} a_i(x) u_\alpha \cos(n_\alpha, x_i),$$

а для соответствующего итерационного метода декомпозиции области (4), (5) остается в силе утверждение теоремы. Отметим также принципиальную возможность построения методов декомпозиции подобного типа для задач с налегающими подобластями [2].

Автор выражает благодарность В. Н. Абрашину за внимание к работе.

Литература

1. *Абрашин В. Н.* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 7. С. 899 — 908.
2. *Абрашин В. Н., Егоров А. А.* // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 2. С. 266 — 271.
3. *Лебедев В. И.* Методы композиции. М., 1986.
4. *Лебедев В. И., Бахвалов Н. С., Агошков В. И. и др.* Параллельные алгоритмы решения некоторых стационарных задач математической физики. М., 1984.
5. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. М., 1989.
6. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.; Л., 1962.
7. *Бенсусан А., Лионс Ж.-Л., Темам Р.* Методы вычислительной математики. Новосибирск, 1975.
8. *Вабищевич П. Н.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1989. Т. 29, № 12. С. 1822 — 1829.
9. *Laevsky Yu. M.* // Sov. J. of Numer. Anal. and Math. Model. 1990. Vol. 5, N 2. P. 244 — 249.
10. *Dryja M.* // Proc. IV Intern. Simp. on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. Philadelphia, 1990. P. 264 — 271.
11. *Лаевский Ю. М.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1992. Т. 32, № 11. С. 1744 — 1755.
12. *Вабищевич П. Н.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1994. Т. 34, № 12. С. 1832 — 1842.
13. *Badea L.* // Numer. Math. 1989. Vol. 55, N 1. P. 61 — 81.
14. *Рачков А. В.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1995. Т. 35, № 2. С. 260 — 270.
15. *Меллер Н. А., Пальцев Б. В., Чечель И. И.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1996. Т. 36, № 10. С. 26 — 45.
16. *Астраханцев Г. П.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1996. Т. 36, № 10. С. 87 — 96.
17. *Яненко Н. Н., Карначук В. И., Коновалов А. Н.* // Численные методы механики сплошной среды. 1977. Т. 8, № 3. С. 129 — 157.
18. *Dryja M.* // Domain Decomposition Methods. Phyladelphia, 1989. P. 168 — 172.
19. *Вабищевич П. Н.* // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 7. С. 1197 — 1207.
20. *Абрашин В. Н.* // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 5. С. 840 — 848.
21. *Абрашин В. Н.* // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 9. С. 1525 — 1535.
22. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н.* // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 9. С. 1563 — 1569.
23. *Абрашин В. Н.* // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 5. С. 652 — 660.
24. *Абрашин В. Н., Жадаева Н. Г.* // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 7. С. 948 — 957.
25. *Абрашин В. Н., Егоров А. А., Жадаева Н. Г., Самарская Е. А.* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 1999. Т. 3. С. 99 — 105.
26. *Абрашин В. Н., Жадаева Н. Г.* // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 11. С. 1543 — 1552.
27. *Абрашин В. Н.* // Мат. моделирование. 2000. Т. 12, № 2. С. 45 — 58.

Белорусский государственный университет

Поступила в редакцию
10 ноября 1999 г.