

УДК 517.956.3

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ПОЛНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Ф. Е. ЛОМОВЦЕВ

Полные гиперболические дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными областями определения операторных коэффициентов изучались в [1, 2]. В случае переменных областей определения операторных коэффициентов гиперболические дифференциальные уравнения второго порядка с двухчленной главной частью изучались в [3 — 5]. В настоящей работе исследуются гиперболические дифференциальные уравнения второго порядка с трехчленной главной частью в случае переменных областей определения операторных коэффициентов.

1. Постановка задачи. Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением (\cdot, \cdot) и нормой $|\cdot|$. На ограниченном интервале $]0, T[$ вещественной прямой рассматривается задача Коши для дифференциального уравнения

$$Lu \equiv d^2u/dt^2 + B(t) du/dt + A(t)u = f, \quad t \in]0, T[, \quad (1)$$

с однородными начальными условиями

$$u|_{t=0} = 0, \quad du/dt|_{t=0} = 0, \quad (2)$$

где u и f — функции переменной t со значениями в H ; $A(t)$ и $B(t)$, $t \in \Theta$, — линейные неограниченные операторы в H с зависящими от t областями определения $D(A(t))$ и $D(B(t))$ соответственно; Θ — некоторое множество полной меры из $[0, T]$.

Предполагается, что операторы $A(t)$, $t \in \Theta$, удовлетворяют следующим условиям.

Условие А1. Операторы $A(t)$, $t \in \Theta$, самосопряжены в H и удовлетворяют неравенствам

$$(A(t)u, u) \geq c_1(t)|u|^2 \quad \forall u \in D(A(t)), \quad (3)$$

в которых постоянные $c_1(t) > 0$ не зависят от u .

Условие А2. Их обратные операторы $A^{-1}(t)$, $t \in \Theta$, имеют на $]0, T[$ сильную регулярную производную $dA^{-1}(t)/dt \in L_\infty(]0, T[, \mathcal{L}(H))$, для которой выполняются неравенства

$$-\left(\frac{dA^{-1}(t)}{dt}g, g\right) \leq c_2(A^{-1}(t)g, g) \quad \forall g \in H, \quad (4)$$

где постоянная $c_2 \geq 0$ не зависит от g и t .

Для операторов, заданных почти всюду, введено понятие сильной регулярной производной в [6].

Предполагается, что операторы $B(t)$, $t \in \Theta$, удовлетворяют следующим условиям.

Условие В1. Области определения $D(A(t)) \subset D(B(t))$, $t \in \Theta$, операторы $B(t)A^{-1/2}(t) \in L_\infty(]0, T[, \mathcal{L}(H))$, где $A^{-1/2}(t)$ — обратные операторы к квадратным корням $A^{1/2}(t)$ операторов $A(t)$, $t \in \Theta$, и выполняются неравенства

$$-\operatorname{Re}(B(t)u, u) \leq c_3|u|^2 \quad \forall u \in D(A(t)), \quad (5)$$

где постоянная $c_3 > 0$ не зависит от u и t .

Условие В2. Операторы $A^{1/2}(t)B(t)(dA^{-1}(t)/dt) \in L_\infty(]0, T[, \mathcal{L}(H))$ и выполняются неравенства

$$-\operatorname{Re}(B(t)u, A(t)u) \leq c_4 |A^{1/2}(t)u|^2 \quad \forall u \in D(A(t)), \quad (6)$$

где постоянная $c_4 \geq 0$ не зависит от u и t .

Докажем корректную сильную разрешимость задачи Коши (1), (2). Приведем пример смешанной задачи для полного гиперболического дифференциального уравнения в частных производных второго порядка, коэффициенты которого содержат неинтегрируемые особенности по переменной t .

2. Теорема единственности сильных решений. Сначала введем пространства и дадим определение сильных решений задачи Коши (1), (2). За пространство сильных решений возьмем гильбертово пространство E — дополнение множества $D(L) = \{u \in L_2(]0, T[, H) : u(t) \in D(A(t)), t \in \Theta; d^2u/dt^2, A^{1/2}(t)du/dt, A(t)u \in L_2(]0, T[, H); (A(t)u, u)|_{t=0} = 0, |(A(t)u, u)|_{t=T} < +\infty; u(0) = du(0)/dt = 0$ по норме

$$\|u\|_E = \left(\int_0^T \left| \frac{du}{dt} \right|^2 dt + \int_0^T |A^{1/2}(t)u|^2 dt \right)^{1/2}.$$

За пространство правых частей f уравнения (1) возьмем банахово пространство F — дополнение $L_2(]0, T[, H)$ по норме

$$\|f\|_F = \sup_{v \in E_0} \left\{ \left| \int_0^T (f, \mathfrak{S}(t)v) dt \right| / \|v\|_0 \right\}.$$

Здесь E_0 — множество всех функций $v \in L_2(]0, T[, H)$, таких, что $\sqrt{c_1(t)}v \in L_2(]0, T[, H)$, существует производная $dv/dt \in L_2(]0, T[, H)$ и v удовлетворяет условию $v(0) = 0$, наделенное эрмитовой нормой

$$\|v\|_0 = \left(\int_0^T \left| \frac{dv}{dt} \right|^2 dt + \int_0^T c_1(t)|v|^2 dt \right)^{1/2},$$

и $\mathfrak{S}(t)v = (T-t)dv/dt$. Заметим, что F является так называемым негативным пространством к позитивному пространству $E_{\mathfrak{S}}$, наделенному нормой $\|w\|_{\mathfrak{S}} = \|\mathfrak{S}^{-1}(t)w\|_0$, где $\mathfrak{S}^{-1}(t)$ — обратный оператор к оператору $\mathfrak{S}(t)$.

Задаче Коши (1), (2) соответствует линейный неограниченный оператор $L : E \supset D(L) \rightarrow F$ с областью определения $D(L)$. Пусть этот оператор L удовлетворяет критерию замыкаемости линейных операторов в банаховых пространствах, т.е. из того, что $u_n \rightarrow 0$ в E и $Lu_n \rightarrow f$ в F при $n \rightarrow \infty$, следует, что $f = 0$. Обозначим через \bar{L} замыкание оператора L и через $D(\bar{L})$ его область определения. Решения операторного уравнения $\bar{L}u = f$, $f \in F$, называются сильными решениями задачи Коши (1), (2).

Теперь выведем априорную оценку сильных решений задачи Коши (1), (2).

Теорема 1. Пусть множество $D(L)$ плотно в $L_2(]0, T[, H)$ и оператор L допускает замыкание \bar{L} . Если выполняются условия А1, А2 и В1, то существует такая постоянная $c_0 > 0$, не зависящая от u , что $\|u\|_E \leq c_0 \|\bar{L}u\|_F \quad \forall u \in D(\bar{L})$.

Доказательство. Рассмотрим в H абстрактные операторы сглаживания $A_\varepsilon^{-1}(t) = [I + \varepsilon A(t)]^{-1}$, $\varepsilon > 0$, со значениями в $D(A(t))$, обладающие следующими свойствами.

А1. При $\varepsilon \rightarrow 0$ квадрат нормы $\int_0^T |A_\varepsilon^{-1}(t)v - v|^2 dt \rightarrow 0 \quad \forall v \in L_2(]0, T[, H)$.

А2. Операторы $A_\varepsilon^{-1}(t)$ сильно и регулярно дифференцируемы по t в H и их производные $dA_\varepsilon^{-1}(t)/dt \in L_\infty(]0, T[, \mathcal{L}(H))$.

Доказательство этих свойств имеется в [3].

Интегрируя один раз по частям, получаем тождество

$$\begin{aligned}
 & 2\operatorname{Re} \int_0^T e^{c(T-t)} \left(\frac{d^2 u}{dt^2}, A_\varepsilon^{-1}(t) \mathfrak{S}(t) u \right) dt + \int_0^T e^{c(T-t)} \left(A(t) u, A_\varepsilon^{-1}(t) u \right) dt = \\
 & = 2\operatorname{Re} \int_0^T e^{c(T-t)} \left(Lu, A_\varepsilon^{-1}(t) \mathfrak{S}(t) u \right) dt - 2\operatorname{Re} \int_0^T e^{c(T-t)} (T-t) \left(B(t) \frac{du}{dt}, A_\varepsilon^{-1}(t) \frac{du}{dt} \right) dt + \\
 & \quad + \int_0^T e^{c(T-t)} (T-t) \Phi_\varepsilon(u, u) dt, \tag{7}
 \end{aligned}$$

где $\Phi_\varepsilon(u, u) = ((d(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t))/dt)u, u) - c(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)u, u)$. Используя в дифференциально-операторной форме $\Phi_\varepsilon(u, u)$ формулу $d(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t))/dt = -A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)(dA^{-1}(t)/dt)A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)$ из [3], неравенства (4) и $|A_\varepsilon^{-1/2}(t)v| \leq |v|$, найдем, что

$$\Phi_\varepsilon(u, u) \leq (c_2 - c) |A^{1/2}(t)A_\varepsilon^{-1/2}(t)u|^2. \tag{8}$$

Если в (7) воспользоваться оценкой (8) и в полученном неравенстве, учитывая свойство A1, устремить ε к нулю, то при $c \geq c_2$ придем к неравенству

$$\begin{aligned}
 & 2\operatorname{Re} \int_0^T e^{c(T-t)} \left(\frac{d^2 u}{dt^2}, \mathfrak{S}(t) u \right) dt + \int_0^T e^{c(T-t)} (A(t) u, u) dt \leq \\
 & \leq 2\operatorname{Re} \int_0^T e^{c(T-t)} (Lu, \mathfrak{S}(t) u) dt - 2\operatorname{Re} \int_0^T e^{c(T-t)} (T-t) \left(B(t) \frac{du}{dt}, \frac{du}{dt} \right) dt \equiv S_1 + S_2.
 \end{aligned}$$

Проинтегрировав один раз по частям, получим неравенство

$$\int_0^T e^{c(T-t)} \left| \frac{du}{dt} \right|^2 dt + \int_0^T e^{c(T-t)} (A(t) u, u) dt \leq S_1 + S_2 - c \int_0^T e^{c(T-t)} (T-t) \left| \frac{du}{dt} \right|^2 dt,$$

правая часть которого с учетом неравенств (5) при $c \geq \max\{c_2, 2c_3\}$ не превосходит S_1 . Отсюда с помощью элементарных оценок получаем $\|u\|_E \leq c_0 \|Lu\|_F \quad \forall u \in D(L)$. Последнее неравенство предельным переходом распространяется на все сильные решения задачи Коши (1), (2).

Из теоремы 1 следует, что если сильное решение задачи Коши (1), (2) существует, то оно единственно и непрерывно зависит от f .

3. Теорема существования сильных решений. Сильную разрешимость задачи Коши (1), (2) дает следующая

Теорема 2. Пусть множество $D(L)$ плотно в $L_2(]0, T[, H)$ и оператор L допускает замыкание \bar{L} . Если выполняются условия A1, A2, B1 и B2 и оператор $dA^{-1}(t)/dt$ имеет сильную регулярную производную $d^2 A^{-1}(t)/dt^2$ такую, что $A^{1/2}(t)(d^i A^{-1}(t)/dt^i) \in L_\infty(]0, T[, \mathcal{L}(H))$, $i = 1, 2$, то для каждого $f \in F$ сильное решение $u \in E$ задачи Коши (1), (2) существует, единственно и $\|u\|_E \leq c_0 \|f\|_F$.

Доказательство. В силу одного следствия из теоремы Хана — Банаха о продолжении линейных непрерывных функционалов для доказательства сильной разрешимости задачи Коши (1), (2) достаточно доказать плотность множества значений $R(L)$ оператора L в F , т.е. достаточно показать, что если для некоторой $v \in E_0$

$$\int_0^T (Lu, \mathfrak{S}(t)v) dt = 0 \quad \forall u \in D(L), \tag{9}$$

то $v = 0$.

В равенстве (9) полагаем $u = A^{-1}(t)h$, где функции $h \in L_2(]0, T[, H)$ такие, что $dh/dt, d^2h/dt^2 \in L_2(]0, T[, H)$ и h удовлетворяет условиям (2), и получаем равенство

$$\int_0^T \left(\frac{d^2h}{dt^2}, A^{-1}(t)e^{c(T-t)}\mathfrak{S}(t)w \right) dt = - \int_0^T (h, e^{c(T-t)}\mathfrak{S}(t)w) dt - \int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\Phi(h, w) dt - \\ - \int_0^T \left(B(t)\frac{dA^{-1}(t)}{dt}h + B(t)A^{-1}(t)\frac{dh}{dt}, e^{c(T-t)}\mathfrak{S}(t)w \right) dt, \quad (10)$$

где

$$\Phi(h, w) = \left(\frac{d^2A^{-1}(t)}{dt^2}h + 2\frac{dA^{-1}(t)}{dt}\frac{dh}{dt}, \frac{dw}{dt} \right)$$

и w — решение следующей задачи Коши: $\mathfrak{S}(t)w = e^{c(t-T)}\mathfrak{S}(t)v$, $w(0) = 0$. Легко доказать, что $w \in E_0$.

Из равенства (10) заключаем, что функция $A^{-1}(t)\mathfrak{S}(t)w$ имеет производную из $L_2(]0, T[, H)$ и обращается в нуль при $t = T$. В (10) проинтегрируем один раз по частям, распространим предельным переходом полученное равенство на все функции $h \in L_2(]0, T[, H)$, для которых $dh/dt \in L_2(]0, T[, H)$, $h(0) = 0$, положим $h = w$, возьмем удвоенную вещественную часть и найдем

$$-2\text{Re} \int_0^T \left(\frac{dw}{dt}, \frac{d}{dt} \left[A^{-1}(t)e^{c(T-t)}(T-t)\frac{dw}{dt} \right] \right) dt + 2\text{Re} \int_0^T e^{c(T-t)}(T-t) \left(w, \frac{dw}{dt} \right) dt = \\ = -2\text{Re} \int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\Phi(w, w) dt - 2\text{Re} \int_0^T e^{c(T-t)}(T-t) \left(B(t)\frac{dA^{-1}(t)}{dt}w + B(t)A^{-1}(t)\frac{dw}{dt}, \frac{dw}{dt} \right) dt. \quad (11)$$

Для интегрирования по частям в первом интеграле левой части равенства (11) используется следующая

Лемма [3]. Пусть E_1, F_1 и G_1 — банаховы пространства, $T_1 : E_1 \rightarrow F_1$ — линейный ограниченный оператор и $S_1 : F_1 \rightarrow G_1$ — линейный замкнутый оператор с плотной областью определения. Если область определения произведения $S_1 \circ T_1$ операторов T_1 и S_1 плотна в E_1 , то его сопряженный оператор $(S_1 \circ T_1)^*$ равен слабому замыканию произведения $T_1^* \circ S_1^*$ их сопряженных операторов T_1^* и S_1^* соответственно.

Применив эту лемму в $E_1 = F_1 = L_2(]0, T[, H)$ и $G_1 = L_2(]0, T[, H) \times H$ к $T_1 = A^{-1}(t)e^{c(T-t)}(T-t)$ и $S_1g = \{dg/dt, g(0)\}$ с областью определения $D(S_1) = \{g \in L_2(]0, T[, H) : dg/dt \in L_2(]0, T[, H), g(T) = 0\}$ в первых двух членах выражения

$$- \int_0^T \left(\frac{dw}{dt}, \frac{d}{dt} \left[A^{-1}(t)e^{c(T-t)}(T-t)\frac{dw}{dt} \right] \right) dt - T e^{cT} \left(\frac{dw}{dt}, A^{-1}(t)\frac{dw}{dt} \right) \Big|_{t=0} + T e^{cT} \left| A^{-1/2}(t)\frac{dw}{dt} \right|^2 \Big|_{t=0}, \quad (12)$$

убеждаемся, что оно равно

$$\int_0^T \left(\frac{d}{dt} \left[A^{-1}(t)e^{c(T-t)}(T-t)\frac{dw}{dt} \right], \frac{dw}{dt} \right) dt - \int_0^T \left(\left(\frac{d}{dt} \left[A^{-1}(t)e^{c(T-t)}(T-t) \right] \right) \frac{dw}{dt}, \frac{dw}{dt} \right) dt + \\ + T e^{cT} \left| A^{-1/2}(t)\frac{dw}{dt} \right|^2 \Big|_{t=0}. \quad (13)$$

Заметим, что $T_1^* = T_1$, $S_1^*(\{p, p(0)\}) = -dp/dt$, $D(S_1^*) = \{\{p, p(0)\} \in G_1 : dp/dt \in L_2(]0, T[, H)\}$ и $\overline{T_1^* \circ S_1^*} dw/dt = -d[A^{-1}(t)e^{c(T-t)}(T-t)dw/dt]/dt + (d[A^{-1}(t)e^{c(T-t)} \times (T-t)]/dt)dw/dt$.

Тот факт, что $dw/dt \in D((S_1 \circ T_1)^*)$, следует из равенства (10), поскольку его можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\frac{d}{dt} [A^{-1}(t)e^{c(T-t)}(T-t)] \frac{dh}{dt}, \frac{dw}{dt} \right) dt &= \int_0^T \left(\left(\frac{d}{dt} [A^{-1}(t)e^{c(T-t)}(T-t)] \right) \frac{dh}{dt}, \frac{dw}{dt} \right) dt - \\ &- \int_0^T (h, e^{c(T-t)} \mathfrak{S}(t)w) dt - \int_0^T e^{c(T-t)}(T-t) \Phi(h, w) dt - \\ &- \int_0^T \left(B(t) \frac{dA^{-1}(t)}{dt} h + B(t)A^{-1}(t) \frac{dh}{dt}, e^{c(T-t)} \mathfrak{S}(t)w \right) dt. \end{aligned}$$

Таким образом, интегрируя по частям члены левой части равенства (11) с помощью (12), (13), имеем равенство

$$\int_0^T e^{c(T-t)} \left| A^{-1/2}(t) \frac{dw}{dt} \right|^2 dt + T e^{cT} \left| A^{-1/2}(t) \frac{dw}{dt} \right|^2 \Big|_{t=0} + \int_0^T e^{c(T-t)} |w|^2 dt = \int_0^T e^{c(T-t)}(T-t) \Phi_1(w, w) dt, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1(w, w) &= -c \left| A^{-1/2}(t) \frac{dw}{dt} \right|^2 - c|w|^2 - 2\operatorname{Re} \left(\frac{d^2 A^{-1}(t)}{dt^2} w, \frac{dw}{dt} \right) - 3 \left(\frac{dA^{-1}(t)}{dt} \frac{dw}{dt}, \frac{dw}{dt} \right) - \\ &- 2\operatorname{Re} \left(B(t) \frac{dA^{-1}(t)}{dt} w, \frac{dw}{dt} \right) - 2\operatorname{Re} \left(B(t)A^{-1}(t) \frac{dw}{dt}, \frac{dw}{dt} \right). \end{aligned}$$

В дифференциально-операторной форме $\Phi_1(w, w)$ применим неравенства (4), (6) и элементарные неравенства и найдем, что $\Phi_1(w, w)$ не превосходит величины

$$-(c - 3c_2 - 2c_4 - 2) |A^{-1/2}(t) dw/dt|^2 - (c - c_5 - c_6) |w|^2, \quad (15)$$

где $c_5 = \|A^{1/2}(t) d^2 A^{-1}(t)/dt^2\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^2$ и $c_6 = \|A^{1/2}(t) B(t) dA^{-1}(t)/dt\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^2$.

Величина (15) при $c \geq c_7 = \max\{3c_2 + 2c_4 + 2, c_5 + c_6\}$ становится неположительной. Поэтому если левую часть равенства (14), взятого при $c \geq c_7$, оценим снизу величиной $\int_0^T |w|^2 dt$, а правую часть — сверху нулем, то будем иметь $w = 0$ и, значит, $v = 0$. Теорема 2 доказана.

Замечание. Тем же способом утверждение теоремы 1 (возможно с большей постоянной c_0) и методом продолжения по параметру Шаудера — Ладженской утверждение теоремы 2 распространяются на уравнения с младшей частью: $d^2 u/dt^2 + B(t) du/dt + A(t)u + \tilde{B}(t) du/dt + \tilde{A}(t)u = f$, где $\tilde{B}(t), \tilde{A}(t)A^{-1/2}(t) \in L_\infty(]0, T[, \mathcal{L}(H))$.

4. Пример. В ограниченной области $G =]0, T[\times]0, l[$ переменных t и x рассматривается уравнение

$$\partial^2 u(t, x)/\partial t^2 - t^{-\beta} \partial^2 u(t, x)/\partial x \partial t - t^{-\alpha} \partial^2 u(t, x)/\partial x^2 = f(t, x), \quad (16)$$

где $\alpha \geq 4$ и $\beta \leq \alpha/2 - 1$, с граничными условиями

$$\partial u(t, 0)/\partial x = u(t, l) = 0 \quad (17)$$

и с однородными начальными условиями

$$u(0, x) = 0, \quad \partial u(0, x)/\partial t = 0. \quad (18)$$

В этом примере за гильбертово пространство \mathcal{E} сильных решений задачи (16) — (18) возьмем пополнение множества $D(L) = \left\{ u \in L_2(G) : u(t, x) \in W_2^2(0, l), \partial u(t, 0)/\partial x = \right.$

$= u(t, l) = 0 \quad \forall t \in]0, T[; \quad \partial^2 u(t, x)/\partial t^2, \quad t^{-\alpha/2} \partial^2 u(t, x)/\partial x \partial t, \quad t^{-\alpha} \partial^2 u(t, x)/\partial x^2 \in L_2(G);$
 $t^{-\alpha} \int_0^l |\partial u(t, x)/\partial x|^2 dx|_{t=0} = 0, \quad t^{-\alpha} \int_0^l |\partial u(t, x)/\partial x|^2 dx|_{t=T} < +\infty; \quad u(0, x) = \partial u(0, x)/\partial t = 0$ }
 по эрмитовой норме

$$\|u(t, x)\|_{\mathcal{E}} = \left(\int_0^T \int_0^l |\partial u(t, x)/\partial t|^2 dx dt + \int_0^T t^{-\alpha} \int_0^l |\partial u(t, x)/\partial x|^2 dx dt \right)^{1/2}.$$

За банахово пространство Φ правых частей $f(t, x)$ уравнения (16) возьмем пополнение $L_2(G)$ по норме

$$\|f(t, x)\|_{\Phi} = \sup_{v \in \mathcal{E}_0} \left\{ \left| \int_0^T \int_0^l f(t, x)(T-t) (\partial v(t, x)/\partial t) dx dt \right| / \|v(t, x)\|_0 \right\},$$

где \mathcal{E}_0 — множество всех функций $v \in L_2(G)$, таких, что $t^{-\alpha/2} v \in L_2(G)$, существует производная $\partial v/\partial t \in L_2(G)$ и $v(0, x) = 0$, наделенное эрмитовой нормой

$$\|v(t, x)\|_0 = \left(\int_0^T \int_0^l |\partial v(t, x)/\partial t|^2 dx dt + \int_0^T t^{-\alpha} \int_0^l |v(t, x)|^2 dx dt \right)^{1/2}.$$

Справедлива следующая теорема о корректной сильной разрешимости смешанной задачи (16) — (18).

Теорема 3. *Для каждой $f \in \Phi$ смешанная задача (16) — (18) имеет единственное сильное решение $u \in \mathcal{E}$, удовлетворяющее неравенству $\|u\|_{\mathcal{E}} \leq c_0 \|f\|_{\Phi}$.*

Доказательство. Достаточно показать, что здесь выполняются все предположения абстрактной теоремы 2. Во-первых, убедимся в том, что в гильбертовом пространстве $H = L_2(0, l)$ операторы $A(t)$, $t \in]0, T[$, порожденные дифференциальным выражением $A(t)u(t, x) = -t^{-\alpha} \partial^2 u(t, x)/\partial x^2$, $t \in]0, T[$, и граничными условиями (17), удовлетворяют всем предположениям абстрактной теоремы 2. Операторы $A(t)$, $t \in]0, T[$, с областями определения $D(A(t)) = \{u \in L_2(G) : u(t, x) \in W_2^2(0, l) \quad \forall t \in]0, T[; \quad t^{-\alpha} \partial^2 u(t, x)/\partial x^2 \in L_2(G); \quad \partial u(t, 0)/\partial x = u(t, l) = 0\}$ самосопряжены в $L_2(0, l)$, так как они очевидно симметричны в $L_2(0, l)$ и на $L_2(0, l)$ имеют ограниченные обратные операторы

$$A^{-1}(t)g = t^{\alpha} \int_x^l \left(\int_0^s g(t, \tau) d\tau \right) ds.$$

Их ограниченность следует из неравенств $\|A^{-1}(t)g\|_{0, \Omega}^2 \leq (1/3)l^4 T^{2\alpha} \|g\|_{0, \Omega}^2 \quad \forall g \in L_2(0, l)$, где $\|\cdot\|_{0, \Omega}$ — норма в гильбертовом пространстве $L_2(0, l)$. Операторы $A(t)$ удовлетворяют неравенствам (3) при $c_1(t) = 2l^{-2} t^{-\alpha}$.

Операторы $A^{-1}(t)$ имеют первую сильную производную

$$\frac{dA^{-1}(t)}{dt} g = \alpha t^{\alpha-1} \int_x^l \left(\int_0^s g(t, \tau) d\tau \right) ds,$$

которая является ограниченным оператором в $L_2(0, l)$ $\|(dA^{-1}(t)/dt)g\|_{0, \Omega}^2 \leq (1/3)\alpha^2 l^4 T^{2\alpha-2} \|g\|_{0, \Omega}^2$ $\forall g \in L_2(0, l)$ и удовлетворяет неравенствам (4), потому что

$$-\left(\frac{dA^{-1}(t)}{dt} g, g \right)_{0, \Omega} = -\alpha t^{\alpha-1} \int_0^l \left(\int_0^x g(t, \tau) d\tau \right)^2 dx \leq 0,$$

где $(\cdot, \cdot)_{0, \Omega}$ — скалярное произведение в $L_2(0, l)$. Операторы $dA^{-1}(t)/dt$ имеют сильную производную

$$\frac{d^2 A^{-1}(t)}{dt^2} g = \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2} \int_x^l \left(\int_0^s g(t, \tau) d\tau \right) ds$$

такую, что $A^{1/2}(t)(d^i A^{-1}(t)/dt^i) \in L_\infty(]0, T[, \mathcal{L}(L_2(0, l)))$, $i = 1, 2$, поскольку

$$\|A^{1/2}(t)(dA^{-1}(t)/dt)g\|_{0,\Omega}^2 \leq (1/2)\alpha^2 l^2 T^{\alpha-2} \|g\|_{0,\Omega}^2 \quad \forall g \in L_2(0, l),$$

$$\|A^{1/2}(t)(d^2 A^{-1}(t)/dt^2)g\|_{0,\Omega}^2 \leq (1/2)\alpha^2 (\alpha - 1)^2 l^2 T^{\alpha-4} \|g\|_{0,\Omega}^2 \quad \forall g \in L_2(0, l).$$

Во-вторых, убедимся в том, что в гильбертовом пространстве $H = L_2(0, l)$ операторы $B(t)$, $t \in]0, T[$, порожденные дифференциальным выражением $B(t)u(t, x) = -t^{-\beta} \partial u(t, x)/\partial x$, $t \in]0, T[$, также удовлетворяют всем предположениям абстрактной теоремы 2. Операторы $B(t)$ подчинены операторам $A^{1/2}(t)$: $\|B(t)u\|_{0,\Omega}^2 \leq T^{\alpha-2\beta} \|A^{1/2}(t)u\|_{0,\Omega}^2 \quad \forall u \in D(A^{1/2}(t))$, где $D(A^{1/2}(t))$ — области определения операторов $A^{1/2}(t)$, и удовлетворяют неравенствам (5): $-2\operatorname{Re}(B(t)u, u)_{0,\Omega} = -t^{-\beta} |u(t, 0)|^2 \leq 0 \quad \forall u(t, x) \in D(A(t))$. Из неравенств

$$\|A^{1/2}(t)B(t)(dA^{-1}(t)/dt)g\|_{0,\Omega}^2 \leq \alpha^2 T^{\alpha-2\beta-2} \|g\|_{0,\Omega}^2 \quad \forall g \in L_2(0, l)$$

закключаем, что $A^{1/2}(t)B(t)dA^{-1}(t)/dt \in L_\infty(]0, T[, \mathcal{L}(L_2(0, l)))$, а из неравенств

$$-2\operatorname{Re}(B(t)u, A(t)u)_{0,\Omega} = -t^{-\alpha-\beta} |\partial u(t, l)/\partial x|^2 \leq 0 \quad \forall u(t, x) \in D(A(t))$$

— что выполняются неравенства (6).

Наконец, множество $D(L)$ очевидно плотно в $L_2(G)$ и стандартным образом доказывается, что линейный оператор $L : \mathcal{E} \supset D(L) \rightarrow \Phi$ допускает замыкание. Теорема 3 доказана.

Литература

1. Якубов С. Я. // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196, № 3. С. 545 — 548.
2. Ломовцев Ф. Е., Юрчук Н. И. // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 12. С. 2242 — 2250.
3. Ломовцев Ф. Е. // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 5. С. 873 — 886.
4. Ломовцев Ф. Е. // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 8. С. 1412 — 1425.
5. Ломовцев Ф. Е. // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 10. С. 1394 — 1403.
6. Ломовцев Ф. Е. // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 7. С. 1132 — 1141.

Белорусский государственный университет

Поступила в редакцию
10 февраля 1998 г.