

УДК 517.926.4

РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ТЕРМИНАХ ФУНКЦИЙ ТИПА МИТТАГ — ЛЕФФЛЕРА

МЕГУМИ САЙГО, А. А. КИЛБАС

1. Введение. Известны отдельные классы обыкновенных дифференциальных уравнений, интегрируемые в квадратурах (см., например, [1, с. 18; 2, с. 290; 3, с. 13]). При нахождении явных решений таких уравнений применяются различные методы, а сами решения выражаются чаще всего в терминах специальных функций. Естественно, что появление новых специальных функций приводит к новым классам дифференциальных уравнений, интегрируемых в квадратурах.

Настоящая работа выполнена в указанном русле и является продолжением исследований, проведенных в [4] и посвященных решению в замкнутой форме линейных дифференциальных уравнений дробного порядка. В данной работе строятся явные решения обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $n = 1, 2, \dots$ вида

$$y^{(n)}(x) = ax^\beta y(x) + f(x) \quad (0 \leq c < x < d \leq \infty, \quad a \neq 0, \quad \beta \in R) \quad (1)$$

в терминах специальной функции типа Миттаг — Леффлера

$$\begin{aligned} E_{n,m,l}(z) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\prod_{i=0}^{k-1} \frac{\Gamma[n(im+l)+1]}{\Gamma[n(im+l+1)+1]} \right] z^k = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\prod_{i=0}^{k-1} \frac{1}{[n(im+l)+1] \cdots [n(im+l+1)]} \right] z^k \quad (m > 0, \quad l \in R). \end{aligned} \quad (2)$$

Эта целая функция, введенная в работе [5], при $m = 1$ с точностью до множителя совпадает с функцией Миттаг — Леффлера [6, с. 224]

$$E_{n,1,l}(z) = \Gamma(nl+1)E_{n,nl+1}(z), \quad E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k / \Gamma(\alpha k + \beta) \quad (\alpha > 0, \quad \beta > 0).$$

Для нахождения явных решений уравнения (1) используем алгоритм, основанный на полученных в [7] формулах композиции операторов дифференцирования с функцией $E_{n,m,l}(z)$. Эти соотношения приводятся в п. 2. В п. 3 находится полная система линейно независимых решений однородного уравнения (1) ($f(x) \equiv 0$). В п. 4 дается решение неоднородных дифференциальных уравнений (1) с квазиполиномиальным свободным членом $f(x)$. Результаты пп. 3, 4 применяются в п. 5 для решения задачи Коши для однородных и неоднородных дифференциальных уравнений (1). Отметим, что полученные решения имеют различный вид вблизи нуля и бесконечности.

2. Производные от функций типа Миттаг — Леффлера. Имеют место следующие утверждения.

Утверждение 1 [7, следствие 4.1]. Если $n = 1, 2, \dots$, $m > 0$ и l — такие действительные числа, что

$$n(im+l) \neq -1, -2, \dots, -n \quad (i = 0, 1, 2, \dots), \quad (3)$$

то для $a \in R$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n [x^{n(l-m+1)} E_{n,m,l}(ax^{nm})] = \prod_{j=1}^n [n(l-m) + j] x^{n(l-m)} + ax^{nl} E_{n,m,l}(ax^{nm}). \quad (4)$$

В частности, если $n(l-m) = -j$ при некотором $j = 1, 2, \dots, n$, то

$$(d/dx)^n [x^{n(l-m+1)} E_{n,m,l}(ax^{nm})] = ax^{nl} E_{n,m,l}(ax^{nm}).$$

Следствие 1. Для $n=1, 2, \dots$, $\beta > 0$ и $a \in R$ $(d/dx)^n [x^{\beta-1} E_{n,\beta}(ax^n)] = x^{\beta-n-1} / \Gamma(\beta-n) + ax^{\beta-1} E_{n,\beta}(ax^n)$. В частности, при $\beta = 1, 2, \dots, n$

$$(d/dx)^n [x^{\beta-1} E_{n,\beta}(ax^n)] = ax^{\beta-1} E_{n,\beta}(ax^n), \quad (d/dx)^n [E_n(ax^n)] = a E_n(ax^n),$$

где $E_\alpha(z) \equiv E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k / \Gamma(\alpha k + 1)$ ($\alpha > 0$).

Утверждение 2 [7, следствие 5.1]. Если $n = 1, 2, \dots$, $m > 0$ и l — такие действительные числа, что выполняются условия (4), то для $a \in R$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dx}\right)^n [x^{n(m-l)-1} E_{n,m,l}(ax^{-nm})] = \\ & = \prod_{j=1}^n [n(m-l) - j] x^{n(m-l)-1} E_{n,m,l}(ax^{-nm}) + (-1)^n ax^{-n(l+1)-1} E_{n,m,l}(ax^{-nm}). \end{aligned} \quad (5)$$

В частности, если $n(m-l) = j$ для некоторого $j = 1, 2, \dots, n$, то

$$(d/dx)^n [x^{n(m-l)-1} E_{n,m,l}(ax^{-nm})] = (-1)^n ax^{-n(l+1)-1} E_{n,m,l}(ax^{-nm}). \quad (6)$$

Следствие 2. Для $n = 1, 2, \dots$, $\beta > 0$ и $a \in R$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n [x^{n-\beta} E_{n,\beta}(ax^{-n})] = \prod_{j=1}^n (j-\beta) \frac{x^{-\beta}}{\Gamma(\beta)} + (-1)^n ax^{-n-\beta} E_{n,\beta}(ax^{-n}).$$

В частности, при $\beta = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} (d/dx)^n [x^{n-\beta} E_{n,\beta}(ax^{-n})] &= (-1)^n ax^{-n-\beta} E_{n,\beta}(ax^{-n}), \\ (d/dx)^n [x^{n-1} E_n(ax^{-n})] &= (-1)^n ax^{-n-1} E_n(ax^{-n}). \end{aligned}$$

3. Решение однородных дифференциальных уравнений. Рассмотрим сначала однородное дифференциальное уравнение (1) в окрестности нуля

$$y^{(n)}(x) = ax^\beta y(x) \quad (0 < x \leq d < \infty, \quad a \neq 0, \quad \beta \in R), \quad (7)$$

включая точку $x = 0$ в случае $\beta \geq 0$.

Теорема 1. Пусть $n = 1, 2, \dots$, $\beta > -n$ и при $n > 1$ $(n+\beta)(i+1) \neq 1, 2, \dots, n-1$ ($i = 0, 1, 2, \dots$). Тогда уравнение (7) имеет n решений

$$y_j(x) = x^{j-1} E_{n,1+\beta/n,(\beta+j-1)/n}(ax^{\beta+n}) \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (8)$$

При $\beta \geq 0$ эти решения линейно независимы.

Доказательство. Дифференцируя $y_j(x)$ n раз и используя формулу (4) с $m = 1 + \beta/n$, $l = (\beta + j - 1)/n$ ($j = 1, 2, \dots, n$), непосредственно проверяем, что $y_j(x)$ удовлетворяют (7). Докажем их линейную независимость при $\beta \geq 0$. Для этого, согласно известной теореме (см., например, [1, с. 226, теорема 1.3]), достаточно показать, что вронскиан в точке $x = 0$

$W(0) \neq 0$. Из (8) и (2), согласно формуле [8, с. 43], $(D_{0+}^{\alpha} t^{\mu})(x) = (\Gamma(1 + \mu)/\Gamma(1 - \alpha + \mu))x^{\mu - \alpha}$ ($\alpha > 0$, $\mu > -1$) для $j = 1, 2, \dots, n$ и $k = 0, 1, \dots, n - 1$ получаем

$$y_j^{(k)}(x) = \frac{\Gamma(j)x^{j-k-1}}{\Gamma(j-k)} + \sum_{s=1}^{\infty} c_s a^s \frac{\Gamma[(n+\beta)s+j]}{\Gamma[(n+\beta)s+j-k]} x^{(n+\beta)s+j-k-1} \quad (k \leq j-1),$$

$$y_j^{(k)}(x) = \sum_{s=1}^{\infty} c_s a^s \frac{\Gamma[(n+\beta)s+j]}{\Gamma[(n+\beta)s+j-k]} x^{(n+\beta)s+j-k-1} \quad (k \geq j).$$
(9)

В силу условия $\beta \geq 0$ при $s = 1, 2, \dots$ имеют место неравенства $(n+\beta)s+j-k-1 \geq \beta+1 > 0$, тогда $y_j^{(j-1)}(0) = \Gamma(j) = (j-1)!$, $y_j^{(k)}(0) = 0$ ($k \neq j-1$; $j = 1, 2, \dots, n$; $k = 0, 1, \dots, n-1$), и, следовательно, $W(0) = 2!3! \dots n! \neq 0$. Теорема доказана.

Следствие 3. При $n = 1, 2, \dots, n$ уравнение (7) с $\beta \equiv 0$ имеет n линейно независимых решений

$$y_j(x) = x^{j-1} E_{n,j}(ax^n) \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (10)$$

Пример 1. Уравнение (7) с $n = 2$ и $\beta > -2$, $\beta \neq -2 + 1/k$ ($k = 1, 2, \dots$) имеет два решения

$$y_1(x) = E_{2,1+\beta/2,\beta/2}(ax^{\beta+2}), \quad y_2(x) = x E_{2,1+\beta/2,(\beta+1)/2}(ax^{\beta+2}). \quad (11)$$

При $\beta \geq 0$ эти решения линейно независимы.

Пример 2. Уравнение (7) с $n = 3$ и $\beta > -3$, $\beta \neq -3 + 1/k$, $\beta \neq -3 + 2/k$ ($k = 1, 2, \dots$) имеет три решения

$$y_1(x) = E_{3,1+\beta/3,\beta/3}(ax^{\beta+3}), \quad y_2(x) = x E_{3,1+\beta/3,(\beta+1)/3}(ax^{\beta+3}), \quad y_3(x) = x^2 E_{3,1+\beta/3,(\beta+2)/3}(ax^{\beta+3}). \quad (12)$$

При $\beta \geq 0$ эти решения линейно независимы.

Пример 3. При $n = 1, 2, \dots$ уравнение

$$x^n y^{(2n)}(x) = ay(x) \quad (0 < x \leq d < \infty, \quad a \neq 0) \quad (13)$$

имеет $2n$ решений

$$y_j(x) = x^{j-1} E_{2n,1/2,(j-1)/(2n)-1/2}(ax^n) \quad (j = 1, 2, \dots, 2n). \quad (14)$$

Пример 4. При $n = 1, 2, \dots$ уравнение

$$x^{n+1/2} y^{(2n+1)}(x) = ay(x) \quad (0 < x \leq d < \infty, \quad a \neq 0) \quad (15)$$

имеет $2n + 1$ решений

$$y_j(x) = x^{j-1} E_{2n+1,1/2,(j-1)/(2n+1)-1/2}(ax^{n+1/2}) \quad (j = 1, 2, \dots, 2n+1). \quad (16)$$

Замечание 1. Из следствия 3 при $n = 2$ получаем, что дифференциальное уравнение (7) с $\beta \equiv 0$ имеет два линейно независимых решения: $y_1(x) = E_{2,1}(ax^2) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x^{2k}/(2k)!$,

$y_2(x) = x E_{2,2}(ax^2) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x^{2k+1}/(2k+1)!$. При $a = 1$ отсюда вытекают известные решения $y_1(x) = \text{ch}(x)$ и $y_2(x) = \text{sh}(x)$ уравнения $y^{(2)} + y = 0$, а при $a = -1$ — решения $y_1(x) = \cos(x)$ и $y_2(x) = \sin(x)$ уравнения $y^{(2)} - y = 0$.

Замечание 2. Известны другие более громоздкие, чем в (11), (12), (14) и (16) решения уравнения (7) с $n = 2, 3$ и уравнений (13) и (15) (см. [2, с. 367, 2.14; с. 460, 3.3; с. 484, 5.9 и 5.11]).

Рассмотрим теперь однородное дифференциальное уравнение (1) в окрестности бесконечности

$$y^{(n)}(x) = ax^{\beta} y(x) \quad (0 < d \leq x < \infty, \quad a \neq 0, \quad \beta \in R), \quad (17)$$

включая точку $x = \infty$ в случае $\beta \leq -2n$.

Теорема 2. Пусть $n = 1, 2, \dots$, $\beta < -n$ и при $n > 1$ $-(n + \beta)(i + 1) \neq 1, 2, \dots, n - 1$ ($i = 0, 1, 2, \dots$). Тогда уравнение (17) имеет n решений

$$y_j(x) = x^{j-1} E_{n, -1-\beta/n, -1-(\beta+j)/n}(a(-1)^n x^{\beta+n}) \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (18)$$

При $\beta \leq -2n$ эти решения линейно независимы.

Доказательство. Применим утверждение 2 с $l = l_j = -1 - (\beta + j)/n$ и $m = -1 - \beta/n$. Условия (3) принимают вид $-(i+1)(\beta+n) - j \neq -1, -2, \dots, -n$ ($j = 1, 2, \dots, n$; $i = 0, 1, 2, \dots$). Они удовлетворяются при $n = 1$, а при $n = 2$ равносильны условиям $-(i+1)(\beta+n) \neq 1, 2, \dots, n-1$ ($i = 0, 1, 2, \dots$). Дифференцируя $y_j(x)$ в (18) n раз и используя формулу (6) с $a(-1)^n$ вместо a , имеем

$$\begin{aligned} y_j^{(n)}(x) &= (d/dx)^n [x^{n(m-l_j)-1} E_{n, m, l_j}(a(-1)^n x^{\beta+n})] = x^{n(l_j+1)-1} E_{n, m, l_j}(a(-1)^n x^{-mn}) = \\ &= ax^{\beta+j-1} E_{n, 1-\beta/n, 1-(\beta+j)/n}(a(-1)^n x^{-mn}) = ax^{\beta} y_j(x). \end{aligned}$$

Это показывает, что $y_j(x)$ являются решениями уравнения (17). Для доказательства линейной независимости $y_j(x)$ при $\beta \leq -2n$ заметим, что это равносильно линейной независимости функций $y_j^*(x) \equiv y(1/x) = x^{1-j} E_{n, -1-\beta/n, -1-(\beta+j)/n}(a(-1)^n x^{-(\beta+n)})$, которые при $\beta = -\beta^* - 2n$ после замены j на $n+1-j$ принимают вид $x^{j-n} E_{n, 1+\beta^*/n, (\beta^*+j-1)/n}(a(-1)^n x^{\beta^*+n})$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Эти функции линейно независимы одновременно с функциями $x^{j-1} E_{n, 1+\beta^*/n, (\beta^*+j-1)/n}(a(-1)^n x^{\beta^*+n})$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Из теоремы 1 вытекает линейная независимость последних функций при $\beta^* \geq 0$, а отсюда — линейная независимость $y_j(x)$ при $\beta \leq -2n$, что завершает доказательство теоремы.

Пример 5. Дифференциальное уравнение

$$x^{2n} y^{(n)}(x) = ay(x) \quad (0 < d \leq x \leq \infty, \quad a \neq 0) \quad (19)$$

порядка $n = 1, 2, \dots$ имеет n линейно независимых решений

$$y_j(x) = x^{j-1} E_{n, n-j+1}(a(-x)^{-n}) \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (20)$$

Замечание 3. Известна [2, с. 484, 5.10] другая система линейно независимых решений уравнения (19).

Пример 6. Дифференциальное уравнение (17) с $n = 2$ и $\beta < -2$, $\beta \neq -2 - 1/k$ ($k = 1, 2, \dots$) имеет два решения

$$y_1(x) = E_{2, -1-\beta/2, -(\beta+3)/2}(ax^{\beta+2}), \quad y_2(x) = x E_{2, -1-\beta/2, -(\beta+4)/2}(ax^{\beta+2}). \quad (21)$$

При $\beta \leq -4$ эти решения линейно независимы.

Замечание 4. Из теорем 1 и 2 следует, что дифференциальное уравнение (1) имеет различные системы линейно независимых решений (8) и (18) при $\beta \geq 0$ и $\beta \leq -2n$ соответственно. При этом первая система дает решения в окрестности нуля, а вторая — в окрестности бесконечности. При $n = 1$ эти решения совпадают: уравнение

$$y'(x) = ax^{\beta} y(x) \quad (0 \leq c < x < d \leq \infty, \quad a \neq 0, \quad \beta \in R) \quad (22)$$

имеет решение

$$y(x) = \exp\left(\frac{a}{\beta+1} x^{\beta+1}\right), \quad (23)$$

что согласуется с формулами (8) и (18) в силу непосредственно проверяемого равенства $E_{1, \gamma+1, \gamma}(z) = \exp(\gamma/(z+1))$ ($\gamma > -1$).

4. Решение неоднородных дифференциальных уравнений. Как показано в предыдущем пункте, однородные дифференциальные уравнения (7) и (17) имеют n линейно независимых решений $y_1(x), \dots, y_n(x)$, данных в (8) и (18), при условиях $\beta \geq 0$ и $\beta \leq -2n$ соответственно. По этим решениям с помощью хорошо известного метода Лагранжа (см., например,

[1, с. 228]) можно найти частные решения соответствующих неоднородных уравнений (1). Мы ограничимся решением уравнений с квазиполиномиальными свободными членами

$$y^{(n)}(x) = ax^\beta y(x) + \sum_{k=0}^p f_k x^{\mu_k} \quad (0 < x \leq d < \infty, \quad a \neq 0, \quad \beta \in R), \quad (24)$$

$$y^{(n)}(x) = ax^\beta y(x) + \sum_{k=0}^p f_k x^{-\mu_k} \quad (0 < d \leq x < \infty, \quad a \neq 0, \quad \beta \in R) \quad (25)$$

(включающими точки $x = 0$ и $x = \infty$ соответственно в случаях $\beta \geq 0$ и $\beta \leq -2n$) с действительными постоянными f_0, f_1, \dots, f_p и для их решения применим метод, основанный на композициях производных с функцией типа Миттаг — Леффлера, данных в п. 1. Из утверждений 1 и 2 вытекают следующие результаты, которые доказываются аналогично теоремам 1 и 2 с использованием формул (4) и (5).

Теорема 3. Пусть $n = 1, 2, \dots$, $\beta \in R$, $\mu_k \in R$ ($k = 0, 1, \dots, p$), $i(n + \beta) + \mu_k \neq -j$ ($i = 0, 1, 2, \dots$; $k = 0, 1, \dots, p$; $j = 1, 2, \dots, n$). Тогда

i) при $\beta > -n$ уравнение (24) разрешимо и его частное решение $y_0(x)$ имеет вид

$$y_0(x) = \sum_{k=0}^p \left[\prod_{j=1}^n \frac{1}{\mu_k + j} \right] f_k x^{n+\mu_k} E_{n, 1+\beta/n, 1+(\beta+\mu_k)/n}(ax^{n+\beta}); \quad (26)$$

ii) при $\beta \geq 0$ общее решение уравнения (24) дается формулой

$$y(x) = \sum_{j=1}^n c_j x^{j-1} E_{n, 1+\beta/n, (\beta+j-1)/n}(ax^{\beta+n}) + \sum_{k=0}^p \left[\prod_{j=1}^n \frac{1}{\mu_k + j} \right] f_k x^{n+\mu_k} E_{n, 1+\beta/n, 1+(\beta+\mu_k)/n}(ax^{n+\beta}), \quad (27)$$

где c_j ($j = 1, \dots, n$) — произвольные действительные постоянные.

Следствие 4. Если $n = 1, 2, \dots$, $\beta > -n$ и $\mu_k > -1$ ($k = 0, 1, \dots, p$), то справедливо первое утверждение теоремы. Если дополнительно $\beta \geq 0$, то верно второе утверждение теоремы.

Следствие 5. Если $n = 1, 2, \dots$, $\mu_k \in R$, $\mu_k \neq -j$ ($k = 0, 1, \dots, p$; $j = 1, 2, \dots$), то общее решение дифференциального уравнения (24) с $\beta = 0$ дается формулой

$$y(x) = \sum_{k=0}^p \left(\prod_{j=1}^n \frac{1}{\mu_k + j} \right) \Gamma(\mu_k + n + 1) f_k x^{n+\mu_k} E_{n, \mu_k+n+1}(ax^n) + \sum_{j=1}^n c_j x^{j-1} E_{n, j}(ax^n), \quad (28)$$

где c_j ($j = 1, \dots, n$) — произвольные действительные постоянные.

Следствие 6. Если $n = 1, 2, \dots$, $\mu \in R$, $i(n + \beta) + \mu \neq -j$ ($i = 0, 1, 2, \dots$; $j = 1, 2, \dots, n$), то при $\beta > -n$ уравнение

$$y^{(n)}(x) = ax^\beta y(x) + bx^\mu \quad (0 < x \leq d < \infty, \quad a \neq 0, \quad \beta \in R) \quad (29)$$

имеет частное решение

$$y_0(x) = \left(\prod_{j=1}^n \frac{1}{\mu + j} \right) bx^{\mu+n} E_{n, 1+\beta/n, 1+(\beta+\mu)/n}(ax^{\beta+n}), \quad (30)$$

а при $\beta \geq 0$ его общее решение дается формулой

$$y(x) = \sum_{j=1}^n c_j x^{j-1} E_{n, 1+\beta/n, (\beta+j-1)/n}(ax^{\beta+n}) + \left[\prod_{j=1}^n \frac{1}{\mu + j} \right] bx^{\mu+n} E_{n, 1+\beta/n, 1+(\beta+\mu)/n}(ax^{n+\beta}), \quad (31)$$

где c_j ($j = 1, \dots, n$) — произвольные действительные постоянные.

Пример 7. Дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}(x) = axy(x) + bx^\mu \quad (0 \leq x \leq d < \infty, \quad a \neq 0, \quad \mu > -1) \quad (32)$$

порядка $n = 1, 2, \dots$ имеет общее решение

$$y(x) = \sum_{j=1}^n c_j x^{j-1} E_{n,1+1/n,j/n}(ax^{n+1}) + \left[\prod_{j=1}^n \frac{1}{\mu+j} \right] b x^{\mu+n} E_{n,1+1/n,1+(1+\mu)/n}(ax^{n+1}), \quad (33)$$

где c_j ($j = 1, \dots, n$) — произвольные действительные постоянные.

Замечание 5. При $\mu = 0$ частное решение уравнения (32) может быть получено с помощью преобразования Лапласа [2, с. 482, 5.3].

Пример 8. Дифференциальное уравнение (29) с $n = 2$ и $\mu \neq -1$, $\mu \neq -2$, $\mu \neq -1 - (\beta + 2)i$, $\mu \neq -2 - (\beta + 2)i$ ($i = 1, 2, \dots$) при $\beta > -2$ имеет частное решение

$$y_0(x) = \frac{b}{(\mu+1)(\mu+2)} x^{\mu+2} E_{2,1+\beta/2,1+(\beta+\mu)/2}(ax^{\beta+2}), \quad (34)$$

а при $\beta \geq 0$ его общее решение дается формулой

$$y(x) = c_1 E_{2,1+\beta/2,\beta/2}(ax^{\beta+2}) + c_2 x E_{2,1+\beta/2,(\beta+1)/2}(ax^{\beta+2}) + \frac{b}{(\mu+1)(\mu+2)} x^{\mu+2} E_{2,1+\beta/2,1+(\beta+\mu)/2}(ax^{\beta+2}), \quad (35)$$

где c_1 и c_2 — произвольные действительные постоянные.

Следствие 7. Если $n = 1, 2, \dots$, $\mu \in R$, $\mu \neq -j$ ($j = 1, 2, \dots, n$), то общее решение дифференциального уравнения (29) с $\beta = 0$ дается формулой

$$y(x) = \sum_{j=1}^n c_j x^{j-1} E_{n,j}(ax^n) + b \Gamma(\mu+n+1) x^{\mu+n} E_{n,\mu+n+1}(ax^n), \quad (36)$$

где c_j ($j = 1, \dots, n$) — произвольные действительные постоянные.

Теорема 4. Пусть $n = 1, 2, \dots$, $\beta \in R$, $\mu_k \in R$ ($k = 0, 1, \dots, p$), $i(n+\beta) + \mu_k \neq j$ ($i = 0, 1, 2, \dots$, $k = 0, 1, \dots, p$; $j = 1, 2, \dots, n$). Тогда

i) при $\beta < -n$ уравнение (25) разрешимо и его частное решение $y_0(x)$ имеет вид

$$y_0(x) = \sum_{k=0}^p \left[\prod_{j=1}^n \frac{1}{j - \mu_k} \right] f_k x^{n-\mu_k} E_{n,-1-\beta/n,-2+(\mu_k-\beta-1)/n}(a(-1)^n x^{\beta+n}); \quad (37)$$

ii) при $\beta \leq -2n$ общее решение уравнения (25) дается формулой

$$y(x) = \sum_{j=1}^n c_j x^{j-1} E_{n,-1-\beta/n,-1-(\beta+j)/n}(a(-1)^n x^{\beta+n}) + \sum_{k=0}^p \left[\prod_{j=1}^n \frac{1}{j - \mu_k} \right] f_k x^{n-\mu_k} E_{n,-1-\beta/n,-2+(\mu_k-\beta-1)/n}(a(-1)^n x^{\beta+n}), \quad (38)$$

где c_j ($j = 1, \dots, n$) — произвольные действительные постоянные.

Следствие 8. Если $n = 1, 2, \dots$, $\beta < -n$ и $\mu_k > n$ ($k = 0, 1, \dots, p$), то справедливо первое утверждение теоремы. Если дополнительно $\beta \leq -2n$, то верно второе утверждение теоремы.

Следствие 9. Если $n = 1, 2, \dots$, $\mu_k \in R$, $\mu_k \neq j$ ($k = 0, 1, \dots, p$; $j = 1, 2, \dots, n$), то общее решение дифференциального уравнения (25) с $\beta = -2n$ дается формулой

$$y(x) = \sum_{j=1}^n c_j \Gamma(n-j+1) x^{j-1} E_{n,n-j+1}(a(-1)^n x^{-n}) + \sum_{k=0}^p \left[\prod_{j=1}^n \frac{1}{j - \mu_k} \right] f_k x^{n-\mu_k} E_{n,\mu_k}(a(-1)^n x^{-n}), \quad (39)$$

где c_j ($j = 1, \dots, n$) — произвольные действительные постоянные.

Следствие 10. Если $n = 1, 2, \dots$, $\mu \in R$, $i(n+\beta)+\mu \neq j$ ($i = 0, 1, 2, \dots$; $j = 1, 2, \dots, n$), то при $\beta < -n$ уравнение

$$y^{(n)}(x) = ax^\beta y(x) + bx^{-\mu} \quad (0 < d \leq x < \infty, \quad a \neq 0, \quad \beta \in R) \quad (40)$$

имеет частное решение

$$y_0(x) = \left(\prod_{j=1}^n \frac{1}{j-\mu} \right) bx^{n-\mu} E_{n, -1-\beta/n, -2+(\mu-\beta-1)/n}(a(-1)^n x^{\beta+n}), \quad (41)$$

а при $\beta \leq -2n$ его общее решение дается формулой

$$y(x) = \sum_{j=1}^n c_j x^{j-1} E_{n, -1-\beta/n, -1-(\beta+j)/n}(a(-1)^n x^{\beta+n}) + \left[\prod_{j=1}^n \frac{1}{j-\mu} \right] f_k x^{n-\mu} E_{n, -1-\beta/n, -2+(\mu-\beta-1)/n}(a(-1)^n x^{\beta+n}), \quad (42)$$

где c_j ($j = 1, \dots, n$) — произвольные действительные постоянные.

Пример 9. Дифференциальное уравнение (40) с $n = 2$ и $\mu \neq 1$, $\mu \neq 2$, $\mu \neq 1 - (\beta + 2)i$, $\mu \neq 2 - (\beta + 2)i$ ($i = 1, 2, \dots$) при $\beta < -2$ имеет частное решение

$$y_0(x) = \frac{b}{(\mu-1)(\mu-2)} x^{2-\mu} E_{2, -1-\beta/2, -2+(\mu-\beta-1)/2}(ax^{\beta+2}), \quad (43)$$

а при $\beta \leq -4$ его общее решение дается формулой

$$y(x) = c_1 E_{2, -1-\beta/2, -1-(\beta+1)/2}(ax^{\beta+2}) + c_2 x E_{2, -1-\beta/2, -2-\beta/2}(ax^{\beta+2}) + \frac{b}{(\mu-1)(\mu-2)} x^{2-\mu} E_{2, -1-\beta/2, -2+(\mu-\beta-1)/2}(ax^{\beta+2}), \quad (44)$$

где c_1 и c_2 — произвольные действительные постоянные.

Пример 10. Уравнение

$$y^{(2)}(x) = ax^{-4}y(x) + bx^{-\mu} \quad (0 < d \leq x \leq \infty, \quad a \neq 0) \quad (\mu \neq 1 + 2i, \quad \mu \neq 2 + 2i \quad (i = 1, 2, \dots)) \quad (45)$$

имеет общее решение

$$y(x) = c_1 E_{2,2}(ax^{-2}) + c_2 x E_{2,1}(ax^{-2}) + \frac{b\Gamma(\mu)}{(\mu-1)(\mu-2)} x^{2-\mu} E_{2,\mu}(ax^{-2}), \quad (46)$$

где c_1 и c_2 — произвольные действительные постоянные.

Замечание 6. Явные формы (8), (10), (11), (12), (14), (16), (18), (20), (21), (23), (26) — (28), (30), (31), (33) — (39), (41) — (44) и (46) решений уравнений (7), (13), (14), (17), (19), (22), (24), (29), (32), (25), (40) и (45) могут быть применены для нахождения решений различных краевых задач для указанных уравнений. В следующем пункте применим найденные формулы для получения явных решений задачи Коши для таких уравнений.

5. Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Применим результаты пп. 3, 4 для решения задачи Коши для уравнений (7) и (24):

$$y^{(n)}(x) = ax^\beta y(x) \quad (0 \leq x \leq d < \infty, \quad a \neq 0, \quad \beta \in R),$$

$$y^{(k-1)}(0) = b_k, \quad b_k \in R \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (47)$$

и

$$y^{(n)}(x) = ax^\beta y(x) + \sum_{i=0}^p f_i x^{\mu_i} \quad (0 \leq x \leq d < \infty, \quad a \neq 0, \quad \beta \in R),$$

$$y^{(k-1)}(0) = b_k, \quad b_k \in R \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (48)$$

Теорема 5. Пусть $n = 1, 2, \dots$ и $\beta \geq 0$. Тогда решение задачи Коши (47) существует в пространстве $B[0, d]$ ограниченных функций на отрезке $[a, b]$, единственно и представимо в виде

$$y(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{(j-1)!} x^{j-1} E_{n, 1+\beta/n, (\beta+j-1)/n}(ax^{\beta+n}). \quad (49)$$

Доказательство. На основании теоремы 1 функция $y(x)$ в (49) является решением уравнения $y^{(n)}(x) = ax^\beta y(x)$. Из (49) находим, что $y(0) = b_0$. Согласно (9) для $k = 2, \dots, n$ имеем

$$y^{(k-1)}(x) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{b_j}{(j-1)!} \sum_{s=1}^{\infty} c_s a^s \frac{\Gamma[(\beta+n)s+j]}{\Gamma[(\beta+n)s+j-k+1]} x^{(\beta+n)s+j-k} + \\ + \sum_{j=k}^n \frac{b_j}{(j-1)!} \left[\frac{\Gamma(j)x^{j-k}}{\Gamma(j-k+1)} + \sum_{s=1}^{\infty} c_s a^s \frac{\Gamma[(\beta+n)s+j]}{\Gamma[(\beta+n)s+j-k+1]} x^{(\beta+n)s+j-k} \right],$$

где c_s даются в (2). Так как $(\beta+n)s+j-k \geq \beta+1 > 0$ при любом $s = 1, 2, \dots, n$, то $y^{(k-1)}(0) = b_k$ ($k = 2, \dots, n$) и, значит, $y(x)$ удовлетворяет условиям в (47). Единственность решения следует из (49). Теорема доказана.

Следствие 11. При $n = 1, 2, \dots$ и $a \neq 0$ решение задачи Коши (47) с $\beta = 0$ дается формулой $y(x) = \sum_{j=1}^n b_j x^{j-1} E_{n, j}(ax^n)$.

Теорема 6. Пусть $n = 1, 2, \dots$, $\beta \geq 0$ и $\mu_i > -1$ ($i = 0, 1, \dots, p$). Тогда решение задачи Коши (48) существует в $B[0, d]$, единственно и имеет вид

$$y(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{(j-1)!} x^{j-1} E_{n, 1+\beta/n, (\beta+j-1)/n}(ax^{\beta+n}) + \sum_{i=0}^p \left[\prod_{j=1}^n \frac{1}{\mu_i + j} \right] f_i x^{n+\mu_i} E_{n, 1+\beta/n, 1+(\beta+\mu_i)/n}(ax^{\beta+n}). \quad (50)$$

Доказательство. На основании следствия 1 функция $y(x)$ является решением дифференциального уравнения в (48). Согласно доказательству теоремы 5,

$$\left(\frac{d}{dx} \right)^{k-1} \left[\sum_{j=1}^n \frac{b_j}{(j-1)!} x^{j-1} E_{n, 1+\beta/n, (\beta+j-1)/n}(ax^{\beta+n}) \right] = b_k \quad (k = 1, \dots, n).$$

Далее, так как $(\beta+n)s+n+\mu_i-k+1 \geq \mu_i+1 > 0$ при $s = 0, 1, 2, \dots$, то

$$y_0^{(k-i)}(0) \equiv \left(\frac{d}{dx} \right)^{k-1} [x^{n+\mu_i} E_{n, 1+\beta/n, (\beta+\mu_i)/n}(ax^{\beta+n})] \Big|_{x=0} = \\ = \sum_{s=0}^{\infty} c_s a^s \frac{\Gamma[(\beta+n)s+n+\mu_i+1]}{\Gamma[(\beta+n)s+n+\mu_i-k+2]} x^{(\beta+n)s+n+\mu_i-k+1} \Big|_{x=0} = 0,$$

где c_s даются (2). Поэтому $y(x)$ удовлетворяет начальным условиям в (48), а единственность решения вытекает из (50), что и завершает доказательство теоремы.

Следствие 12. При $n = 1, 2, \dots$, $a \neq 0$ и $\mu_i > -1$ ($i = 0, 1, \dots, p$) решение задачи Коши (48) с $\beta = 0$ и $b_k \in \mathbb{R}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) дается формулой

$$y(x) = \sum_{j=1}^n b_j x^{j-1} E_{n, j}(ax^n) + \sum_{i=0}^p f_i \Gamma(\mu_i + n + 1) x^{n+\mu_i} E_{n, \mu_i+n+1}(ax^n).$$

Следствие 13. При $n = 1, 2, \dots$, $\beta \geq 0$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ и $\mu > -1$ решение задачи Коши

$$y^{(n)}(x) = ax^\beta y(x) + bx^\mu \quad (0 \leq x \leq d < \infty), \quad y^{(k-1)}(0) = b_k,$$

с $b_k \in \mathbb{R}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) имеет вид

$$y(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{(j-1)!} x^{j-1} E_{n, 1+\beta/n, (\beta+j-1)/n}(ax^{\beta+n}) + \left[\prod_{j=1}^n \frac{1}{\mu + j} \right] b x^{n+\mu} E_{n, 1+\beta/n, 1+(\beta+\mu)/n}(ax^{\beta+n}).$$

Следствие 14. При $n = 1, 2, \dots$, $a \neq 0$, $b \in R$ и $\mu > -1$ решение задачи Коши

$$y^{(n)}(x) = ay(x) + bx^\mu \quad (0 \leq x \leq d < \infty), \quad y^{(k-1)}(0) = b_k,$$

с $b_k \in R$ ($k = 1, 2, \dots, n$) дается формулой

$$y(x) = \sum_{j=1}^n b_j x^{j-1} E_{n,j}(ax^n) + b\Gamma(\mu+1)x^{n+\mu} E_{n,\mu+n+1}(ax^n).$$

Пример 11. При $n = 1, 2, \dots$, $a \neq 0$, $b \in R$ и $\mu > -1$ решение задачи Коши

$$y^{(n)}(x) = axy(x) + bx^\mu \quad (0 \leq x \leq d < \infty), \quad y^{(k-1)}(0) = b_k,$$

с $b_k \in R$ ($k = 1, 2, \dots, n$) имеет вид

$$y(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{(j-1)!} x^{j-1} E_{n,1+1/n,j/n}(ax^{n+1}) + \left[\prod_{j=1}^n \frac{1}{\mu+j} \right] bx^{n+\mu} E_{n,1+1/n,1+(\mu+1)/n}(ax^{n+1}).$$

Пример 12. Решение задачи Коши

$$y''(x) = ax^\beta y(x) + bx^\mu \quad (0 \leq x \leq d < \infty), \quad y(0) = c, \quad y'(0) = d,$$

с $\beta \geq 0$, $a \neq 0$, $c \in R$, $d \in R$ и $\mu > -1$ имеет вид

$$y(x) = cE_{2,1+\beta/2,\beta/2}(ax^{\beta+2}) + dx E_{2,1+\beta/2,(\beta+1)/2}(ax^{\beta+2}) + \frac{b}{\mu(\mu+1)} x^{\mu+2} E_{2,1+\beta/2,1+(\beta+\mu)/2}(ax^{\beta+2}).$$

Замечание 7. Так как найденные решения дифференциальных уравнений (7), (17), (24), (25) и краевых задач (47), (48) выражаются в терминах целых функций типа Миттаг — Леффлера (2), то полученные выше результаты могут быть распространены с действительной области в комплексную.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь.

Литература

1. Еругин Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Мн., 1970.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1976.
3. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1967.
4. Килбас А. А., Сайго М. // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 2. С. 195 — 204.
5. Kilbas A. A., Saigo M. // Differential and Integral equations. An International Journal for Theory and Applications. 1995. Vol. 8, N 5. P. 993 — 1011.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 3: Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М., 1967.
7. Килбас А. А., Сайго М. // Докл. АН Беларуси. 1995. Т. 39, № 4. С. 22 — 26.
8. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Мн., 1987.

Фукуокский университет,
Белорусский государственный университет

Поступила в редакцию
15 ноября 1998 г.