2000. Т.36, №1. С. 47 — 53

УДК 517.936

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

А. А. Леваков

В работе доказываются теоремы существования слабых и сильных решений стохастического дифференциального уравнения

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dW(t) \tag{1}$$

с разрывной функцией $f: R_+ \times R^d \to R^d$ и непрерывной ограниченной функцией $g: R_+ \times \times R^d \to R^{d\times d}$. Известно [1, 2], что слабые решения уравнения (1) существуют, если отображения f и g ограничены, измеримы и замыкание пересечения множества вырожденности $\{(t,x) | \int\limits_{U(t,x)} (\det a(\tau, y))^{-1} d\tau dy = \infty$ для каждой открытой окрестности $U(t,x)$ точки $(t,x)\}$ отображения g и множества точек разрыва функции f или g содержится во множестве нулей отображений f и g (здесь $a(t,x) = g(t,x)g^{\mathrm{T}}(t,x)$, т — знак транспонирования). В первой части статьи показано, что слабые решения уравнения (1) существуют без каких-либо условий на множество вырожденности отображения g лишь при условиях, что f — измеримая по Борелю ограниченная функция, а g — непрерывное ограниченное отображение. Но под слабыми решениями уравнения (1) в этом случае понимаем слабые решения стохастического дифференциального включения, соответствующего уравнению (1) и построенного по тем же принципам, что и обыкновенное дифференциальное включение по обыкновенной дифференциальной системе с разрывной правой частью [3, с. 39 — 45]. Во второй части приведены теорема существования и единственности сильных решений и некоторые ее следствия.

В дальнейшем используются следующие обозначения: $R^{d\times r}$ — пространство действительных $(d \times r)$-матриц с евклидовой нормой $\|\cdot\|$; $R^{d\times 1} = R^d$; $R_+ = [0, +\infty[$; $\mathcal{B}(R^d)$ — топологическое σ-поле на R^d; 2^{R^d} — множество всех подмножеств из R^d; $\operatorname{conv}(R^d)$ — метрическое пространство непустых выпуклых компактных подмножеств из R^d с метрикой Хаусдорфа $\chi(A,B) = \max\{\beta(A,B), \beta(B,A)\}$, где $\beta(A,B) = \sup\limits_{a\in A} \inf\limits_{b\in B} \|a-b\|$; μ — мера Лебега на R_+; $C(R_+, R^d)$ — пространство непрерывных функций $a: R_+ \to R^d$ с метрикой $d(a_1, a_2) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k} (\max\limits_{0\le t\le k} \|a_1(t) - a_2(t)\| \wedge 1)$, $b_1 \wedge b_2 = \min\{b_1, b_2\}$; $\mathcal{B}(C(R_+, R^d))$ — топологическое σ-поле на $C(R_+, R^d)$; $B(x_0, r) = \{x \in R^d | \ \|x - x_0\| < r\}$; если $(\mathcal{A}, \Sigma, \theta)$ — измеримое пространство с σ-аддитивной конечной мерой θ, то $\mathcal{L}_l(\mathcal{A}, R^d)$ — пространство классов эквивалентности интегрируемых отображений $z: \mathcal{A} \to R^d$ с нормой $\int\limits_{\mathcal{A}} (\|z(t)\|^l d\theta)^{1/l}$.

I. Слабые решения. Рассмотрим стохастическое дифференциальное включение

$$dx(t) \in B(t, x(t))dt + g(t, x(t))dW(t) \tag{2}$$

с тем же отображением g, что и в уравнении (1) и с многозначным ограниченным отображением $B: R_+ \times R^d \to 2^{R^d}$.

Определение 1. Под слабым решением x включения (2) понимаем d-мерный непрерывный случайный процесс $x(t)$, $t \in R_+$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ с потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, $t \in R_+$, такой, что: 1) существует $\mathcal{F}_t$-броуновское движение $W(t)$ с $W(0) = 0$ почти наверное (п. н.); 2) при каждом t случайный вектор $x(t)$

является $\mathcal{F}_t$-измеримым; 3) существует измеримый $\mathcal{F}_t$-согласованный процесс G такой, что $G(t,w) \in B(t,x(t,w))$ для $(\mu \times \mathcal{P})$-почти всех $(t,w) \in R_+ \times \Omega$; 4) для каждого $t \in R_+$ с вероятностью 1

$$x(t) = x(0) + \int_0^t G(\tau)d\tau + \int_0^t g(\tau, x(\tau))dW(\tau),$$

где интеграл по $dW(\tau)$ является интегралом Ито.

Пусть $a(t,x) = g(t,x)g^{\mathsf{T}}(t,x)$; $A = \{(t,x) \in R_+ \times R^d | \ \det a(t,x) = 0\}$; $A^c = (R_+ \times R^d) \backslash A$;

$$F_n(t,x) = \begin{cases} f_n(t,x), & (t,x) \in A^c, \\ V_n(t,x), & (t,x) \in A, \end{cases} \qquad n \in N,$$

где $f_n : A^c \to R^d$, $V_n : A \to \operatorname{conv}(R^d)$ — такие отображения и многозначные отображения, что $f_n(t,x) \underset{n\to\infty}{\to} f(t,x)$ для почти всех $(t,x) \in A^c$ и для каждого n F_n — полунепрерывное сверху ограниченное отображение. Многозначная функция $B : R_+ \times R^d \to \operatorname{conv}(R^d)$ называется полунепрерывной сверху в точке (t,x), если $\beta(B(t',x'), B(t,x)) \to 0$ при $(t',x') \to (t,x)$.

По теореме 1 [4] включение (2) с $B = F_n$ при каждом n для любой заданной вероятности ν на $(R^d, \mathcal{B}(R^d))$ имеет слабое решение $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathcal{P}_n, \mathcal{F}_{tn}, x_n, G_n, W_n)$ с начальным распределением ν, т.е. для каждого $t \in R_+$

$$x_n(t) = x_n(0) + \int_0^t G_n(\tau)d\tau + \int_0^t g(\tau, x_n(\tau))dW_n(\tau) \quad \text{п. н.,} \tag{3}$$

$$G_n(t,w) \in F_n(t, x_n(t,w))$$

для $(\mu \times \mathcal{P}_n)$-почти всех $(t,w) \in R_+ \times \Omega_n$.

Для каждой точки $(t,x) \in A$ построим множество $V(t,x)$, которое является объединением всех множеств вида $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \overline{\operatorname{co}} \bigcup\limits_{i=m}^{\infty} F_i(t,x_i)$ по всем последовательностям $x_i \to x$ при $i \to \infty$, и пусть

$$F(t,x) = \begin{cases} f(t,x), & (t,x) \in A^c, \\ V(t,x), & (t,x) \in A \end{cases}$$

($\overline{\operatorname{co}}\, L$ — замыкание выпуклой оболочки множества L).

Теорема 1. *Включение (2) с $B = F$ имеет слабое решение x такое, что $P^{x_{n_k}} \overset{\text{сл}}{\to} P^x$, где P^{x_n}, P^x — законы распределения случайных процессов x_n и x на $(C(R_+, R^d), \mathcal{B}(C(R_+, R^d)))$, n_k — некоторая подпоследовательность последовательности (n).*

Доказательство. Возьмем произвольную дважды непрерывно дифференцируемую функцию $h : R^d \to R$, ограниченную вместе с частными производными до второго порядка включительно, и произвольную непрерывную ограниченную $\mathcal{B}_s(C(R_+, R^d))$-измеримую функцию $z : C(R_+, R^d) \to R$, где $\mathcal{B}_s(C(R_+, R^d))$ — под-σ-алгебра для $\mathcal{B}(C(R_+, R^d))$, порожденная $a(\tau)$, $0 \le \tau \le s < \infty$ [5, с. 150]. Из равенства (3), используя формулу Ито, для любых t, s, $0 \le t \le s < \infty$, $\forall n \ge 1$, имеем [4, с. 159]

$$E_n\Bigg(\bigg(h(x_n(t)) - h(x_n(s)) - \int_s^t \bigg(\frac{1}{2} \sum_{\varepsilon,\delta=1}^{d} a^{(\varepsilon)(\delta)}(\tau, x_n(\tau)) \frac{\partial^2 h}{\partial x^{(\varepsilon)} \partial x^{(\delta)}}(x_n(\tau)) +$$

$$+ \sum_{\varepsilon=1}^{d} G_n^{(\varepsilon)}(\tau) \frac{\partial h}{\partial x^{(\varepsilon)}}(x_n(\tau))\bigg)d\tau\bigg) z(x_n)\Bigg) = 0, \tag{4}$$

где E_n обозначает математическое ожидание, а $x_n^{(\varepsilon)}$, $G_n^{(\varepsilon)}$, $a^{(\varepsilon)(\delta)}$ — компоненты x_n, G_n, a. Так как для каждого $T > 0$ $\sup\limits_n \sup\limits_{t\in[0,T]} E_n(\|x_n(t)\|^2) \le C$, $\sup\limits_n E_n(\|x_n(t) - x_n(s)\|^4) \le C|t-s|^2$, C — const, для любых $t, s \in [0,T]$, то из доказательства теоремы I.4.2 [5, с. 27] следует, что $P^{x_n} \overset{\text{сл}}{\to} \theta$, где P^{x_n} — вероятностный закон для x_n, а θ — некоторая вероятность на $(C(R_+, R^d), \mathcal{B}(C(R_+, R^d)))$. (Считаем для удобства, что сама последовательность P^{x_n} сходящаяся.)

Построим систему множеств $S(i_1,\dots,i_k)$ следующим образом: возьмем для каждого k шары $\sigma_m^{(k)}$, $m=1,2,\dots$, радиуса $\le 2^{-(k+1)}$, покрывающие $C(R_+,R^d)$ и удовлетворяющие условиям $P^{x_n}(\partial\sigma_m^{(k)})=0$, $\theta(\partial\sigma_m^{(k)})=0$ (∂B — граница множества B) для каждых n, k, m, и положим для каждого k $\mathcal{D}_1^{(k)}=\sigma_1^{(k)}$, $\mathcal{D}_2^{(k)}=\sigma_2^{(k)}\setminus\sigma_1^{(k)},\dots$, $\mathcal{D}_n^{(k)}=\sigma_n^{(k)}\setminus(\sigma_1^{(k)}\bigcup\dots\bigcup\sigma_{n-1}^{(k)}),\dots$ и $S(i_1,\dots,i_k)=\mathcal{D}_{i_1}^{(1)}\bigcap\mathcal{D}_{i_2}^{(2)}\bigcap\dots\bigcap\mathcal{D}_{i_k}^{(k)}$. Пусть $H_n(i_1,\dots,i_k)=\{\omega\in\Omega_n|\ x_n(\cdot,w)\in S(i_1,\dots,i_k)\}$. Для каждого множества $S(i_1,\dots,i_k)$, такого, что $\overset{\circ}{S}(i_1,\dots,i_k)\ne\varnothing$, выберем точку $q(i_1,\dots,i_k)\in\overset{\circ}{S}(i_1,\dots,i_k)$, если же $\overset{\circ}{S}(i_1,\dots,i_k)=\varnothing$, то в качестве $q(i_1,\dots,i_k)$ берем любую точку из $S(i_1,\dots,i_k)$ ($\overset{\circ}{B}$ — внутренность множества B). Положим $x_n^k(\omega)=q(i_1,\dots,i_k)$, если $\omega\in H_n(i_1,\dots,i_k)$. Так как $d(x_n^k,x_n)\le 2^{-k}$, то $x_n^k\to x_n$ при $k\to\infty$ равномерно на каждом компактном отрезке из R_+ п.н. Пусть $\int\limits_{H_n(i_1,\dots,i_k)} G_n(t,w)dw=M_{n,i_1,\dots,i_k}(t)$ и пусть $G_n^k(t,w)=M_{n,i_1,\dots,i_k}(t)/\mathcal{P}_n(H_n(i_1,\dots,i_k))$, если $\omega\in H_n(i_1,\dots,i_k)$, и $\mathcal{P}_n(H_n(i_1,\dots,i_k))>0$, если же $\omega\in H_n(i_1,\dots,i_k)$, $\mathcal{P}_n(H_n(i_1,\dots,i_k))=0$, тогда $G_n^k(t,w)=0$. Для каждой точки $(t,x)\in R_+\times R^d$ и для каждых $n\in N$, $\delta\in]0,+\infty[$ определим множество $F_{n\delta}(t,x)$, являющееся замыканием выпуклой оболочки множеств $F_n(t_1,x_1)$ для всех t_1, x_1, таких, что $|t-t_1|\le\delta$, $\|x-x_1\|\le\delta$. Согласно лемме 12 [3, с. 51], имеем $G_n^k(t,w)\in F_{n\delta_k}(t,x_n^k(t,w))$ для $(\mu\times\mathcal{P}_n)$-почти всех $(t,w)\in R_+\times\Omega_n$; здесь $\delta_k=1/k$.

Возьмем $\Omega=[0,1[$, $\mathcal{F}=\mathcal{B}([0,1[)$, P-меру Лебега на $[0,1[$. Для фиксированного k упорядочим все $(i_1,\dots,i_k)$ лексикографически. Определим интервалы $\Delta(i_1,\dots,i_k)$, $\Delta_n(i_1,\dots,i_k)$ вида $[a,b[$ в $[0,1[$ следующим образом: а) $|\Delta(i_1,\dots,i_k)|=\theta(S(i_1,\dots,i_k))$, $|\Delta_n(i_1,\dots,i_k)|=P^{x_n}(S(i_1,\dots,i_k))$ ($|\Delta|$ — длина интервала); б) если $(i_1,\dots,i_k)<(j_1,\dots,j_k)$, то интервал $\Delta(i_1,\dots,i_k)$ ($\Delta_n(i_1,\dots,i_k)$) расположен левее, чем $\Delta(j_1,\dots,j_k)$ (соответственно левее, чем $\Delta_n(j_1,\dots,j_k)$); в) $\bigcup\limits_{i_1,\dots,i_k}\Delta(i_1,\dots,i_k)=[0,1[$, $\bigcup\limits_{i_1,\dots,i_k}\Delta_n(i_1,\dots,i_k)=[0,1[$. Положим $\hat{x}_n^k(\cdot,w)=q(i_1,\dots,i_k)$, если $w\in\Delta_n(i_1,\dots,i_k)$, $\hat{x}^k(\cdot,w)=q(i_1,\dots,i_k)$, если $w\in\Delta(i_1,\dots,i_k)$. Тогда из доказательства теоремы I.2.7 [5] следует, что существуют пределы $\hat{x}_n(t,w)=\lim\limits_{k\to\infty}\hat{x}_n^k(t,w)$, $\hat{x}(t,w)=\lim\limits_{k\to\infty}\hat{x}^k(t,w)$, $\hat{x}(t,w)=\lim\limits_{n\to\infty}\hat{x}_n(t,w)$, равномерные на компактных отрезках из R_+, п.н. Кроме того, $P^{x_n}=P^{\hat{x}_n}$, $P^{\hat{x}}=\theta$. Построим отображение $(t,w)\to\hat{G}_n^k(t,w)$ следующим образом: $\hat{G}_n^k(t,w)=M_{n,i_1,\dots,i_k}(t)/|\Delta_n(i_1,\dots,i_k)|$, если $|\Delta_n(i_1,\dots,i_k)|>0$ и $w\in\Delta_n(i_1,\dots,i_k)$, $\hat{G}_n(t,w)=0$, если $|\Delta_n(i_1,\dots,i_k)|=0$ и $w\in\Delta_n(i_1,\dots,i_k)$. Из построения $\hat{x}_n^k(t,w)$ и $\hat{G}_n^k(t,w)$ вытекает, что для $(\mu\times P)$-почти всех $(t,w)\in R_+\times\Omega$ $\hat{G}_n^k(t,w)\in F_{n\delta_k}(t,\hat{x}_n^k(t,w))$. Для каждого $n\ge 1$ последовательность $\hat{G}_n^k(t,w)$, $k\ge 1$, $t\in[0,1]$, согласно теореме Данфорда — Петтиса, относительно слабо компактна в $\mathcal{L}_1([0,1]\times\Omega,R^d)$. Пусть $\hat{G}_n^{k_1}(t,w)$ — ее подпоследовательность, слабо сходящаяся в $\mathcal{L}_1([0,1]\times\Omega,R^d)$ к $\hat{G}_n(t,w)$, $t\in[0,1]$, причем для удобства считаем, что сама последовательность $\hat{G}_n^k(t,w)$ является сходящейся. Далее, пусть $\hat{G}_n^{k_2}(t,w)$ — подпоследовательность последовательности $\hat{G}_n^{k_1}(t,w)$, слабо сходящаяся в $\mathcal{L}_1([1,2]\times\Omega,R^d)$ к $\hat{G}_n(t,w)$, причем опять считаем, что сама последовательность $\hat{G}_n^k(t,w)$ является сходящейся и т. д. В результате построим функцию $\hat{G}_n(t,w)$, определенную на $R_+\times\Omega$. Из включения $\hat{G}_n(t,w)\subset\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\overline{\mathrm{co}}\bigcup\limits_{k=m}^{\infty}\hat{G}_n^k(t,w)$ и полунепрерывности сверху отображения F_n следует, что для $(\mu\times P)$-почти всех $(t,w)\in R_+\times\Omega$ $\hat{G}_n(t,w)\in F_n(t,\hat{x}_n(t,w))$ [4, с. 213 — 214] и, следовательно, для $(\mu\times P)$-почти всех $(t,w)\in\{(t,w)\in R_+\times\Omega|\ (t,\hat{x}_n(t,w))\in A\}$ $\hat{G}_n(t,w)\in V_n(t,\hat{x}_n(t,w))$ и для $(\mu\times P)$-почти всех $(t,w)\in\{(t,w)\in R_+\times\Omega|\ (t,\hat{x}_n(t,w))\in A^c\}$ $\hat{G}_n(t,w)=f_n(t,\hat{x}_n(t,w))$.

Последовательность $\hat{G}_n(t,w)$ относительно слабо компактна в $\mathcal{L}_1([0,1]\times\Omega,R^d)$. Пусть $\hat{G}(t,w)$, $t\in[0,1]$, — слабый предел для $\hat{G}_{n_1}(t,w)$ в $\mathcal{L}_1([0,1]\times\Omega,R^d)$, $\hat{G}(t,w)$, $t\in[1,2]$, — слабый предел для $\hat{G}_{n_2}(t,w)$ в $\mathcal{L}_1([1,2]\times\Omega,R^d)$ и т. д., в результате получаем функцию $\hat{G}(t,w)$, определенную на $R_+\times\Omega$, причем для удобства считаем, что для $\forall T>0$ сама последовательность $\hat{G}_n$ является сходящейся в $\mathcal{L}_1([0,T]\times\Omega,R^d)$.

Покажем, что для $(\mu\times P)$-почти всех $(t,w)\in B=\{(t,w)\in R_+\times\Omega|\ (t,\hat{x}(t,w))\in A\}$ $\hat{G}(t,w)\in F(t,x_n(t,w))$. Возьмем $T>0$ и рассмотрим множество $\Gamma_m(t,w)=\overline{\mathrm{co}}\bigcup\limits_{j=m}^{\infty}\hat{G}_j(t,w)$, $t\in[0,T]$. Обозначим через Σ_m множество всех суммируемых селекторов для $\Gamma_m(t,w)$. Если последовательность $y_l \in \Sigma_m$, $l \geq 1$, сходится к элементу y в $\mathcal{L}_1([0,T]\times\Omega, R^d)$, то можно выбрать подпоследовательность y_{l_i}, $i \geq 1$, сходящуюся почти всюду к y. Отсюда вытекает, что Σ_m является замкнутым подмножеством пространства $\mathcal{L}_1([0,T]\times\Omega, R^d)$, кроме того, очевидно, что Σ_m — непустое и выпуклое. Следовательно, множество Σ_m будет слабо замкнутым подмножеством пространства $\mathcal{L}_1([0,T]\times\Omega, R^d)$. Поэтому $\hat{G}(t,w) \in \Sigma_m$ для любого $m \geq 1$, т.е. $\hat{G}(t,w) \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \overline{\text{co}} \bigcup\limits_{j=m}^{\infty} \hat{G}_j(t,w)$ для $(\mu\times P)$-почти всех $(t,w)\in[0,T]\times\Omega$. Отсюда следует, что $\hat{G}(t,w) \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \overline{\text{co}} \bigcup\limits_{j=m}^{\infty} F_j(t,\hat{x}_j(t,w)) \subset F(t,\hat{x}(t,w))$ для $(\mu\times P)$-почти всех $(t,w)\in B$.

Пусть $\hat{\mathfrak{F}}_t = \bigcap\limits_{\varepsilon>0} \sigma(\hat{x}(s)|\ \ 0\leq s\leq t+\varepsilon)$, $\sigma(\hat{x}(s)|\ \ 0\leq s\leq t+\varepsilon)$ — наименьшая σ-алгебра, относительно которой измеримы все случайные векторы $\hat{x}(s)$, $0\leq s\leq t+\varepsilon$; $\tilde{G}(t,w) = E(\hat{G}|\hat{\mathfrak{F}}_t)$ — условное математическое ожидание для $\hat{G}$, причем условные математические ожидания выбраны таким образом, что процесс $\tilde{G}$ измерим. Рассуждая так же, как в [4, с. 215], убеждаемся, что $\tilde{G}(t,w)\in F(t,\hat{x}(t,w))$ для $(\mu\times P)$-почти всех $(t,w)\in B$. Пусть

$$\approx{G}(t,w) = \begin{cases} f(t,\hat{x}(t,w)), & (t,w)\in(R_+\times\Omega)\setminus B,\\ \tilde{G}(t,w), & (t,w)\in B.\end{cases}$$

Возьмем произвольным образом: s, $t\in R_+$, $s<t$; функции $h:\ R^d\to R$, $z:\ C(R_+,R^d)\to R$ — такие же, как в равенстве (4). Используя неравенство $E_n\left(\int\limits_0^{t\wedge\tau_{n,r}} K(\tau,x_n(\tau))d\tau\right) \leq$ $\leq c\|(\det a)^{-1/(d+1)}K\|_{L_{d+1}([0,t]\times B(0,r),R)}$, где $\tau_{n,r}=\inf\{t|\ \ \|x_n(t)\|>r\}$, $c=c(d,t,r)$, справедливое для всех неотрицательных измеримых функций $K:\ R_+\times R^d\to R$ и всех слабых решений x_n включения (2) [2, с. 300 — 301], а также сходимость f_n к f почти всюду на A^c, равенство $P^{x_n}=P^{\hat{x}_n}$ и применяя те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 2.2 [2, с. 293 — 294], убеждаемся, что для каждого $\varepsilon=1,2,\ldots,d$

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\left(\int_s^t 1_{A^c}(\tau,\hat{x}_n(\tau))f_n^{(\varepsilon)}(\tau,\hat{x}_n(\tau))\frac{\partial h}{\partial x^{(\varepsilon)}}(\hat{x}_n(\tau))d\tau\right)z(\hat{x}_n)\right) =$$

$$= E\left(\left(\int_s^t 1_{A^c}(\tau,\hat{x}_n(\tau))f^{(\varepsilon)}(\tau,\hat{x}(\tau))\frac{\partial h}{\partial x^{(\varepsilon)}}(\hat{x}(\tau))d\tau\right)z(\hat{x})\right). \tag{5}$$

Из свойств условных математических ожиданий и определения $\approx{G}$ следует

$$E\left(\left(\int_s^t \approx{G}^{(\varepsilon)}(\tau)\frac{\partial h}{\partial x^{(\varepsilon)}}(\hat{x}(\tau))d\tau\right)z(\hat{x})\right) = E\left(\left(\int_s^t 1_A(\tau,\hat{x}(\tau))\hat{G}^{(\varepsilon)}(\tau)\frac{\partial h}{\partial x^{(\varepsilon)}}(\hat{x}(\tau))d\tau\right)z(\hat{x})\right)+$$

$$+E\left(\left(\int_s^t 1_{A^c}(\tau,\hat{x}(\tau))f^{(\varepsilon)}(\tau,\hat{x}(\tau))\frac{\partial h}{\partial x^{(\varepsilon)}}(\hat{x}(\tau))d\tau\right)z(\hat{x})\right). \tag{6}$$

Из слабой сходимости $\hat{G}_n(t,w)$ к $\hat{G}(t,w)$ вытекает

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\left(\int_s^t 1_A(\tau,\hat{x}_n(\tau))\hat{G}_n^{(\varepsilon)}(\tau)\frac{\partial h}{\partial x^{(\varepsilon)}}(\hat{x}_n(\tau))d\tau\right)z(\hat{x}_n)\right) =$$

$$= E\left(\left(\int_s^t 1_A(\tau,\hat{x}(\tau))\hat{G}^{(\varepsilon)}(\tau)\frac{\partial h}{\partial x^{(\varepsilon)}}(\hat{x}(\tau))d\tau\right)z(\hat{x})\right). \tag{7}$$

Далее, из определения $\hat{G}_n$, $\hat{x}_n$, $\hat{G}_n^k$, G_n^k, $\hat{x}_n^k$, x_n^k, x_n следует равенство

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\left(\int_s^t \hat{G}_n^{(\varepsilon)}(\tau)\frac{\partial h}{\partial x^{(\varepsilon)}}(\hat{x}_n(\tau))d\tau\right)z(\hat{x}_n)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\int_s^t\Big(\sum_{i_1,\dots,i_k}\ \int_{\Delta(i_1,\dots,i_k)}\hat G_n^{(\varepsilon)k}\frac{\partial h}{\partial x^{(\varepsilon)}}(\hat x_n^k)z(\hat x_n^k)dw\Big)d\tau =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\int_s^t\sum_{i_1,\dots,i_k}\frac{\partial h}{\partial x^{(\varepsilon)}}(q(i_1,\dots,i_k))z(q(i_1,\dots,i_k))M^{(\varepsilon)}_{n,i_1,\dots,i_k}(\tau)d\tau =$$

$$= \lim_{n\to\infty}E_n\Big(\Big(\int_s^t G_n^{(\varepsilon)}(\tau)\frac{\partial h}{\partial x^{(\varepsilon)}}(x_n(\tau))d\tau\Big)z(x_n)\Big). \tag{8}$$

Используя соотношения (4) — (8), легко видеть, что

$$E\Big(\Big(h(\hat x(t)) - h(\hat x(s)) - \int_s^t\Big(\frac{1}{2}\sum_{\varepsilon,\delta=1}^d a^{(\varepsilon)(\delta)}(\tau,\hat x(\tau))\frac{\partial^2 h}{\partial x^{(\varepsilon)}\partial x^{(\delta)}}(\hat x(\tau))+$$

$$+\sum_{\varepsilon=1}^d \tilde{\tilde G}^{(\varepsilon)}(\tau)\frac{\partial h}{\partial x^{(\varepsilon)}}(\hat x(\tau))\Big)d\tau\Big)z(\hat x)\Big) = \lim_{n\to\infty}E_n\Big(\Big(h(x_n(t)) - h(x_n(s)) -$$

$$-\int_s^t\Big(\frac{1}{2}\sum_{\varepsilon,\delta=1}^d a^{(\varepsilon)(\delta)}(\tau,x_n(\tau))\frac{\partial^2 h}{\partial x^{(\varepsilon)}\partial x^{(\delta)}}(x_n(\tau)) + \sum_{\varepsilon=1}^d\frac{\partial h}{\partial x^{(\varepsilon)}}(x_n(\tau))G_n^{(\varepsilon)}(\tau)\Big)d\tau\Big)z(x_n)\Big) = 0.$$

Отсюда следует, что для каждой функции h указанного выше вида процесс

$$h(\hat x(t)) - h(\hat x(0)) - \int_0^t\Big(\frac{1}{2}\sum_{\varepsilon,\delta=1}^d a^{(\varepsilon)(\delta)}(\tau,\hat x(\tau))\frac{\partial^2 h}{\partial x^{(\varepsilon)}\partial x^{(\delta)}}(\hat x(\tau)) + \sum_{\varepsilon=1}^d\tilde{\tilde G}^{(\varepsilon)}(\tau)\frac{\partial h}{\partial x^{(\varepsilon)}}(\hat x(\tau))\Big)d\tau$$

является $\hat{\mathfrak{F}}_t$-мартингалом. Далее, повторяя соответствующую часть доказательства теоремы IV.2.2 [5, с. 161 — 162], убеждаемся, что $\hat x(t)$ является слабым решением включения (2) с $B = F$ таким, что $P^{x_n} \overset{\text{сл.}}{\to} P^x$.

Пусть $\mathfrak{I}^1(t)$, $\mathfrak{I}^2(x)$ — неотрицательные бесконечно дифференцируемые функции аргументов $t\in R$, $x\in R^d$, равные нулю при $|t|>1$, $\|x\|>1$ и такие, что $\int_{R^d}\mathfrak{I}^2(x)dx = 1$, $\int_R\mathfrak{I}^1(t)dt = 1$, $\mathfrak{I}(t,x) = \mathfrak{I}^1(t)\mathfrak{I}^2(x)$, $y_n(t,x) = n^{d+1}\mathfrak{I}(nt,nx) * f(t,x)$, $*$ — означает свертку функций. Функции $y_n(t,x)$ бесконечно дифференцируемы и $y_n(t,x)\to f(t,x)$ при $n\to\infty$ в каждой точке Лебега отображения f и, следовательно, почти всюду [6, с. 238 — 243]. Для каждой точки $(t,x)\in A$ построим множество $\mathcal{D}(t,x)$, которое является объединением всех множеств вида $\bigcap_{m=1}^{\infty}\overline{\mathrm{co}}\bigcup_{i=m}^{\infty}y_i(t,x_i)$ по всем последовательностям $x_i\to x$ при $i\to\infty$, и пусть

$$B(t,x) = \begin{cases} f(t,x), & (t,x)\in A^c,\\ \mathcal{D}(t,x), & (t,x)\in A.\end{cases}$$

Слабыми решениями уравнения (1) называем слабые решения включения (2) с построенным выше отображением B. При $g\equiv 0$ введенное определение слабого решения уравнения (1) соответствует понятию решения обыкновенного дифференциального уравнения с разрывными правыми частями [3]. Если же для всех $(t,x)\in A$ множество $\mathcal{D}(t,x)$ состоит из одной точки, то такое определение слабого решения для уравнения (1) совпадает с определением слабого решения стохастического дифференциального уравнения [5]. Легко видеть, что в случае непрерывности функции $f(t,x)$ в точке $(t,x)\in A$ множество $\mathcal{D}(t,x)$ состоит из одной точки $f(t,x)$.

Теорема 2. *Если $f: R_+\times R^d\to R^d$ — измеримая по Борелю ограниченная функция, $g: R_+\times R^d\to R^{d\times d}$ — ограниченная непрерывная функция, то для любой заданной вероятности ν на $(R^d,\mathcal{B}(R^d))$ существует слабое решение уравнения (1) такое, что распределение $x(0)$ совпадает с ν.*

Сформулированное утверждение вытекает из теоремы 1, если в качестве последовательности $F_n(t,x)$ использовать последовательность функций $y_n(t,x)$.

II. Сильные решения. Пусть заданы вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком $\mathcal{F}_t$, $t \geq 0$, и $\mathcal{F}_t$ — броуновское движение $W(t)$, $W(0) = 0$ п. н. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx(t) = (f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t)))dt + g(t, x(t))dW(t), \tag{9}$$

где $f_1 : R_+ \times R^d \to R^d$ — измеримая по Борелю ограниченная функция, а $f_2 : R_+ \times R^d \to R^d$, $g : R_+ \times R^d \to R^{d\times d}$ — ограниченные непрерывные отображения, удовлетворяющие локальному условию Липшица, т.е. $\forall N > 0$ существует $K_N > 0$ такое, что $\|f_2(t,x) - f_2(t,y)\| + \|g(t,x) - g(t,y)\| \leq K_N\|x - y\|$ $\forall (t,x)$, $(t,y) \in R_+ \times B(0,N)$.

Так же как по функции f из уравнения (1) было построено многозначное отображение B, по функции f_1 построим многозначное отображение B_1 и стохастическое дифференциальное включение

$$dx(t) \in (B_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t)))dt + g(t, x(t))dW(t). \tag{10}$$

Определение 2. Сильным решением x включения (10) с начальным условием η называем непрерывный процесс $x(t)$, $t \geq 0$, такой, что при каждом $t \geq 0$ случайный вектор $x(t)$ является $\mathcal{F}_t$-измеримым; существует измеримый $\mathcal{F}_t$-согласованный процесс G, удовлетворяющий условию $G(t,w) \in B_1(t, x(t,w))$ для $(\mu \times P)$-почти всех $(t,w) \in R_+ \times \Omega$; для каждого $t \in R_+$ с вероятностью 1

$$x(t) = \eta + \int_0^t G(\tau)d\tau + \int_0^t f_2(\tau, x(\tau))d\tau + \int_0^t g(\tau, x(\tau))dW(\tau).$$

Будем говорить, что включение (10) имеет единственное сильное решение, если для любых двух решений $x(t)$, $x_1(t)$ из равенства $x(0) = x_1(0)$ п. н. следует, что $x(t) = x_1(t)$ для всех $t \geq 0$ п. н. Сильными решениями уравнения (9) называем сильные решения включения (10).

Отображение B_1 называем монотонным, если $(x_1 - x_2)^{\mathrm{T}}(u_1 - u_2) \leq 0$ $\forall (t, x_i) \in R_+ \times R^d$, $\forall u_i \in B_1(t, x_i)$, $i = 1, 2$.

Так же как теорема 2 [7] вытекала из теорем IV.1.1 [5] и 1 [4], из теорем 1 и IV.1.1 [5] следует

Теорема 3. *Если f_1 — измеримая по Борелю ограниченная функция, f_2, g — ограниченные непрерывные отображения, удовлетворяющие локальному условию Липшица, и отображение B_1 является монотонным, то для любого $\mathcal{F}_0$-измеримого случайного вектора η уравнение (9) имеет единственное сильное решение с начальным условием η.*

Рассмотрим теперь случай, когда f_1 является кусочно-непрерывной функцией. Отображение $f_1 : R_+ \times R^d \to R^d$ называется кусочно-непрерывным, если множество $R_+ \times R^d$ можно разбить на ограниченные области L_i, $i = 1, 2, \ldots$, и на множество M меры нуль, состоящее из точек границ этих областей, таким образом, что пересечение любой ограниченной области $L \subset R_+ \times R^d$ имеет пересечение лишь с конечным числом областей L_i и в каждой из областей L_i функция f_1 непрерывна вплоть до границы. Функция непрерывна в области вплоть до границы, если при приближении к каждой точке границы она стремится к конечному пределу. В качестве отображения B_1 для кусочно-непрерывной функции f_1 можно использовать отображение, у которого в каждой точке $(t,x) \in A$ множество $\mathcal{D}_1(t,x)$ является наименьшим выпуклым замкнутым множеством, содержащим все предельные значения функции $f_1(t^*, x^*)$ при $(t^*, x^*) \to (t, x)$ [3, с. 40—43]. Аналогично можно поступать и в следующем случае. Пусть $f_1(t, x, u_i, \ldots, u_l)$, $(t, x, u_i, \ldots, u_l) \in R_+ \times R^d \times R^{k_1} \times \ldots \times R^{k_l}$ — непрерывная функция и $u_1(t,x), \ldots, u_l(t,x)$, $(t,x) \in R_+ \times R^d$, — кусочно-непрерывные функции, разрывные соответственно на множествах M_i, $i = 1, \ldots, l$. Предположим, что при $i \neq j$ u_i и u_j пробегают независимо друг от друга соответственно множества $U_i(t,x)$, $U_j(t,x)$. В точках, где функции $u_i(t,x)$ непрерывны, множество $U_i(t,x)$ состоит из одной точки $u_i(t,x)$. В точках из множества M_i множество $U_i(t,x)$ состоит из предельных точек всевозможных последовательностей

$G_k \in U_i(t_k, x_k)$, где $t_k \to t$, $x_k \to x$, $k = 1, 2, \dots$. В этом случае в качестве отображения B_1 можно взять $B_1(t,x) = \overline{\mathrm{co}} f_1(t, x, U_1(t,x), \dots, U_l(t,x))$ [3, с. 43 — 44].

Рассмотрим теперь случай, когда пространство R^d разделено гладкой поверхностью S на области G^-, G^+ и отображения $f_1(t,x)$, $(f_1(t,x))'_x$ непрерывны вплоть до границы на множествах $R_+ \times G^-$, $R_+ \times G^+$. Обозначим через $f_1^-(t,x)$, $f_1^+(t,x)$ предельные значения функции f_1 при приближении к точке (t,x), $x \in S$, из областей G^- и G^+ соответственно, а через h_N проекцию вектора $h = f_1^+ - f_1^-$ на нормаль к S в точке x, направленную от G^- к G^+. Из теоремы 3 и леммы 3 [3, с. 83] получаем

Следствие 1. *Пусть вектор $h = f_1^+ - f_1^-$ направлен по нормали к поверхности S (или равен нулю), $h_N \le 0$, f_2, g — непрерывные отображения, удовлетворяющие локальному условию Липшица, и пусть f_1, f_2, g — ограниченные функции. Тогда уравнение (9) имеет единственное сильное решение.*

В случае $d = 1$ из теоремы 3 и следствия 1 вытекает

Следствие 2. *Пусть отображения $f_1 : R \to R$, f_1' кусочно-непрерывны и для всех $x \in R$ $\lim\limits_{x^* \to x-0} f_1(x^*) \ge \lim\limits_{x^* \to x+0} f_1(x^*)$, f_2, g — непрерывные отображения, удовлетворяющие локальному условию Липшица, и пусть f_1, f_2, g — ограниченные функции. Тогда уравнение (9) имеет единственное сильное решение.*

Замечания. 1. Теорема 2 является обобщением теорем существования слабых решений из работ [1, 2, 4, 5], а теорема 3 — усилением теорем существования и единственности сильных решений из статей [7 — 11].

2. В теоремах 1 — 3 не исключается случай $g(t,x) \equiv 0$. В этом случае условия теоремы 2 аналогичны условиям теоремы существования для обыкновенных дифференциальных включений [3, с. 60 — 61].

Пример.

$$dx(t) = y(t)dt, \quad dy(t) = (-\operatorname{sign} y(x) + f_2(t, x(t), y(t)))\, dt + g(t, x(t), y(t))dW(t), \tag{11}$$

где f_2, g : $R_+ \times R \times R \to R$ — ограниченные непрерывные функции, удовлетворяющие локальному условию Липшица. Существование и единственность сильного решения системы (11) следует из теоремы 3, что не обеспечивается другими известными теоремами существования [7 — 13].

Литература

1. *Крылов Н. В.* Управляемые процессы диффузионного типа. М., 1977.
2. *Rozkosz A., Slominski L.* // Stochastic Processes and their Applications. 1997. Vol. 68. P. 285 — 302.
3. *Филиппов А. Д.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985.
4. *Леваков А. А.* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 2. С. 212 — 220.
5. *Ватанбэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М., 1986.
6. *Данфорд Н., Шварц Д. Т.* Линейные операторы. Общая теория. М., 1962.
7. *Леваков А. А.* // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 1. С. 84 — 89.
8. *Крылов Н. В., Розовский Б. Л.* // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. М., 1979. Т. 14.
9. *Petterson R.* // Probability and Mathematical Statistics. 1997. Vol. 17, N 1. P. 29 — 45.
10. *Мельников А. В.* // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, вып. 5. С. 63 — 69.
11. *Веретенников Ю. А.* // Мат. сб. 1980. Т. 111, № 3. С. 434 — 452.
12. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев, 1982.
13. *Kisielewicz M.* Geometry in nonlinear control and differential inclusions. Banach center publications. Warszawa, 1995. Vol. 32. P. 277 — 286.

Белорусский государственный университет

*Поступила в редакцию
21 декабря 1998 г.*