

## ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ. УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ

УДК 519.63

### ОБ ОДНОМ КЛАССЕ АДДИТИВНЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ

© 2001 г. В. Н. Абрашин, А. А. Егоров, Н. Г. Жадаева

**Введение.** При решении сложных задач математической физики численными методами большое внимание уделяется конструированию и исследованию экономичных алгоритмов их реализации [1–4]. В основе этих методов лежит аддитивное представление пространственного оператора в виде суммы более простых, что позволяет перейти от сложной задачи к цепочке элементарных, которые решаются последовательно или параллельно. Такими методами являются классические схемы переменных направлений, локально-одномерные разностные схемы и др. К аддитивным методам также можно отнести схемы расщепления по отдельным направлениям в многомерных задачах, расщепления по подобластям [4, 5], расщепления по физическим процессам. По своим свойствам аддитивные методы занимают промежуточное место между явными и неявными разностными схемами: по объему вычислительных затрат они близки к явным схемам, а с точки зрения устойчивости – к абсолютно устойчивым неявным методам.

Следует отметить, что экономичные методы достаточно хорошо изучены и область их применимости весьма широка. Вместе с тем при исследовании аддитивных алгоритмов возникают новые понятия, не свойственные обычным неявным разностным схемам. К таким понятиям прежде всего относится понятие суммарной (слабой) аппроксимации, введенное в работе [2, с. 410]. Методы расщепления не обладают полной аппроксимацией, а имеют аппроксимацию лишь в суммарном смысле, которая вносит дополнительную погрешность в алгоритм и значительно ухудшает асимптотические свойства неявных разностных схем [6]. Серьезным недостатком метода переменных направлений является тот факт, что при разбиении на три и более компонент алгоритм становится условно устойчивым. Классические факторизованные схемы [2, 7] требуют для устойчивости попарной коммутруемости пространственных операторов, что также является существенным ограничением возможностей применения этого класса аддитивных разностных схем.

Аддитивные методы широко используются для решения многомерных стационарных задач. В качестве метода установления для соответствующих нестационарных уравнений наиболее оптимальными являются схемы переменных направлений и факторизованные методы. С точки зрения двухслойных разностных схем эффективный выход на стационарный режим во многих случаях гарантирует выполнение не только законов сохранения решения, связанных с консервативностью алгоритма, но и законов изменения решения по времени, что связано с асимптотическими характеристиками разностных методов [8, с. 207].

Предложенные в работах [9, 10] многокомпонентные методы переменных направлений (ММПН) рассматривались как с последовательной, так и с параллельной организацией вычислений. Эти методы относятся к схемам полной аппроксимации, являются абсолютно устойчивыми при многокомпонентном аддитивном разбиении исходного оператора при отсутствии требования попарной коммутруемости операторов разбиения. Отметим также, что ММПН обладают хорошими асимптотическими свойствами, что позволяет эффективно их использовать для построения итерационных методов решения стационарных задач [11–14]. В настоящей работе изучаются итерационные ММПН последовательного типа при различных способах многокомпонентного расщепления.

**1. Постановка задачи и построение алгоритмов ММПН.** Рассмотрим операторное уравнение первого рода

$$Ay = f \tag{1.1}$$

с линейным оператором  $A : H \rightarrow H$  (необязательно дискретным), действующим в вещественном гильбертовом пространстве  $H$  со скалярным произведением  $(u, v)$  и нормой  $\|u\| =$

$= \sqrt{(u, u)}$ . Пусть  $A$  – положительно-определенный оператор:  $A \geq cE$ ,  $c > 0$ ,  $H_A$  – пространство  $H$ , снабженное скалярным произведением  $(u, v)_A = (Au, v)$  и нормой  $\|u\|_A = \sqrt{(Au, u)}$ .

Многие итерационные методы решения задачи (1.1) опираются на стабилизирующие свойства эволюционной задачи  $dv/dt + Av = f$ ,  $t > 0$ ,  $v(0) = v_0$ , решение которой при  $t \rightarrow \infty$  сходится к решению уравнения (1.1), при этом имеет место оценка  $\|v(t) - y\| \leq e^{-ct}\|v_0 - y\|$ . Эта оценка позволяет конструировать эффективные итерационные алгоритмы, в том числе и на основе аддитивных методов.

Аддитивные методы базируются на представлении оператора  $A$  в виде  $\sum_{\alpha=1}^p A_\alpha$ , где каждый из операторов  $A_\alpha$  является стационарным (возможно, вырожденным) оператором. Уравнение (1.1) можно записать в виде  $\sum_{\alpha=1}^p A_\alpha y_\alpha = f$  (если  $y = y_\alpha$ ,  $\alpha = \overline{1, p}$ , то это равенство переходит в равенство (1.1)). Вместо скалярной эволюционной задачи рассмотрим задачу Коши для системы уравнений

$$\frac{dy_\alpha}{dt} + \sum_{\beta=1}^p A_\beta y_\beta = f, \quad t > 0, \quad y_\alpha(0) = y_0, \quad \alpha = \overline{1, p}. \tag{1.2}$$

При решении задачи (1.2) применяются различные разностные схемы, и если эти схемы асимптотически устойчивы, то их можно эффективно использовать в качестве итерационных методов решения уравнения (1.1). Для алгоритмов параллельного вычисления это показано в работах [11–15].

В развитие метода переменных направлений в работе [9] для приближенного решения задачи (1.2) была предложена разностная схема

$$\frac{\hat{y}_\alpha - y_\alpha}{\tau} + \sum_{\beta=1}^{\alpha} A_\beta \hat{y}_\beta + \sum_{\beta=\alpha+1}^p A_\beta y_\beta = f, \quad \alpha = \overline{1, p}. \tag{1.3}$$

Показано, что метод (1.3) сохраняет все положительные черты, присущие чисто неявным разностным схемам, т.е. является абсолютно устойчивым при  $A_\alpha \geq 0$ . Если в (1.3)  $\hat{y}_\alpha$ ,  $y_\alpha$  заменить  $y_\alpha^{s+1}$ ,  $y_\alpha^s$  соответственно, то данная разностная схема становится итерационным методом.

На базе алгоритмов, предложенных в [9, 10], были разработаны итерационные методы кластерного агрегирования [16–18]. Переход от одного уравнения (1.1) к системе из  $p$  уравнений ( $p$  кластеров) основан на введении операторов агрегирования  $G^{(\alpha)}$ ,  $\alpha = \overline{1, p}$ , удовлетворяющих условиям

$$G^{(\alpha)} = (G^{(\alpha)})^* \geq 0, \quad \alpha = \overline{1, p}, \quad \tilde{G} = \sum_{\alpha=1}^p G^{(\alpha)} > 0. \tag{1.4}$$

Умножив исходное уравнение (1.1) на  $G^{(\alpha)}$ ,  $\alpha = \overline{1, p}$ , получим систему  $G^{(\alpha)}Ay = G^{(\alpha)}f$ ,  $\alpha = \overline{1, p}$ . Полагая  $A^{(\alpha)} = G^{(\alpha)}A$ ,  $f^{(\alpha)} = G^{(\alpha)}f$  и суммируя по  $\alpha = \overline{1, p}$ , приходим к уравнению  $\tilde{G}Ay = \tilde{G}f$ , и так как  $\tilde{G} > 0$ , то это уравнение эквивалентно исходному уравнению (1.1). Разностная схема последовательного типа (1.3), построенная на основе представления (1.4), принимает вид

$$(E + \tau AG^{(\alpha)}) \frac{y_\alpha^{s+1} - y_\alpha^s}{\tau} + \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} AG^{(\beta)} y_\beta^{s+1} + \sum_{\beta=\alpha+1}^p AG^{(\beta)} y_\beta^s = f, \quad \alpha = \overline{1, p}. \tag{1.5}$$

Как видно, итерационные схемы (1.3) и (1.5) имеют схожую конструкцию. Для обоих алгоритмов при одинаковых условиях доказан факт сходимости без указания порядка скорости сходимости. Это является существенным недостатком указанных методов.

Рассмотрим последовательные итерационные методы решения уравнения (1.1), имеющие аналогичную (1.3) структуру зейделевского типа:

$$\frac{y_\alpha^{s+1} - y_\alpha^s}{\tau} + \sum_{\beta=1}^{\alpha} A_\beta y_\beta^{s+1} + \sum_{\beta=\alpha+1}^p A_\beta y_\beta^s = f, \quad \alpha = \overline{1, p}, \tag{1.6}$$

$\hat{y}_1^* = \hat{y}_1$ ,  $\hat{y}_\alpha^* = 0.5(\hat{y}_\alpha + \hat{y}_{\alpha-1})$ ,  $\alpha = \overline{2, p}$ . Основное внимание в данной работе уделено вопросам изучения скорости сходимости алгоритма (1.6). Как будет показано, этот метод обладает существенно лучшими свойствами по сравнению с итерационными разностными схемами (1.3), (1.5).

Наряду с классическими методами расщепления по пространственным переменным будем рассматривать алгоритмы, связанные с декомпозицией расчетной области. Применение подобных методов позволяет решать отдельные задачи в подобластях, при этом важно на границах подобласти задавать естественные обменные граничные условия, которые порождались бы различными вариантами декомпозиции исходного уравнения. Методы декомпозиции области обычно используют для приближенного решения стационарных и нестационарных многомерных задач математической физики в нерегулярных подобластях и для построения эффективных численных алгоритмов, ориентированных на современные вычислительные системы с параллельной обработкой информации. Более подробно остановимся на использовании последовательных итерационных методов (1.6), а также рассмотрим некоторые варианты распараллеленных (асинхронных) методов и изучим их свойства.

Для задачи (1.1) на основе представления (1.2) при  $y_\alpha = y_\alpha(x, t)$ ,  $y_\alpha(0) = y_0$ ,  $\alpha = \overline{1, p}$ ,  $x \in \Omega$ , рассмотрим последовательный метод декомпозиции в подобластях, аналогичный (1.6). Пусть область  $\Omega$  состоит из отдельных подобластей  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_p$ , которые могут налегать друг на друга. Тогда в области  $\Omega_1$  полагаем  $\hat{y}_1^* = \hat{y}_1$ , в области налегания  $\Omega_1$  на  $\Omega_2$   $\hat{y}_2^* = 0.5(\hat{y}_1 + \hat{y}_2)$ , а в остальной области  $\Omega_2$   $\hat{y}_2^* = \hat{y}_2$  и т.д. Ниже будут приведены конкретные алгоритмы декомпозиции области на примере двумерной эллиптической краевой задачи, а также методы декомпозиции по физическим процессам для классической стационарной задачи Навье–Стокса.

**2. Сходимость итерационных методов.** Итерационные методы (1.6) принципиально отличаются от экономичных разностных схем с высоким уровнем распараллеливания [12, 13]

$$\frac{y_\alpha^{s+1} - \hat{y}}{\tau} + \sigma A_\alpha (y_\alpha^{s+1} - \hat{y}_\alpha) + \sum_{\beta=1}^p A_\beta \hat{y}_\beta = f, \quad \alpha = \overline{1, p}, \quad \hat{y} = \frac{1}{p} \sum_{\alpha=1}^p \hat{y}_\alpha. \quad (2.1)$$

Эту схему можно отнести к регуляризованным разностным схемам аддитивного типа. Введение в явную схему регуляризатора  $A_\alpha (y_\alpha^{s+1} - \hat{y}_\alpha)$  обеспечивает сходимость за счет выбора параметра  $\sigma$ :  $\sigma \geq p/2$  [13]. Метод (2.1) близок к неявной разностной схеме  $(\hat{y} - y)/\tau + \sigma^* A \hat{y} + (1 - \sigma^*) A y = f$  и, как показано в [6], в большой степени сохраняет ее асимптотические свойства.

Подробно остановимся на исследовании сходимости двухслойного итерационного метода (1.6) для  $\hat{y}_1^* = \hat{y}_1$ ,  $\hat{y}_\alpha^* = 0.5(\hat{y}_\alpha + \hat{y}_{\alpha-1})$ ,  $\alpha = \overline{2, p}$ . Будем предполагать, что операторы  $A_\alpha$ ,  $\alpha = \overline{2, p}$ , неотрицательны, а оператор  $A_1$  обладает свойством положительной определенности:  $(A_1 y, y) \geq c_0 \|y\|^2$ ,  $c_0 = \text{const} > 0$ ,  $A_\alpha \geq 0$ ,  $\alpha = \overline{2, p}$ . Заметим, что именно этот случай особенно важен для применения схемы (1.6) в подобластях.

Умножая уравнение (1.6) скалярно на  $\tau A_\alpha y_{\alpha t}^{s+1}$  и суммируя по  $\alpha = \overline{1, p}$ , получим [6]

$$\sum_{\alpha=1}^p (y_\alpha^{s+1} - \hat{y}_\alpha^*, A_\alpha y_{\alpha t}^{s+1}) + 0.5\tau^2 \sum_{\alpha=1}^p \|A_\alpha y_{\alpha t}^{s+1}\|^2 + 0.5\|r(s+1)\|^2 = 0.5\|r(s)\|^2, \quad (2.2)$$

где  $r(s) = \sum_{\alpha=1}^p A_\alpha \hat{y}_\alpha^s - f$ ,  $y_{\alpha t}^{s+1} = (y_\alpha^{s+1} - \hat{y}_\alpha^s)/\tau$ . Обозначая  $\hat{v}^{s(\alpha, \alpha-1)} = \hat{y}_\alpha^s - \hat{y}_{\alpha-1}^s$ , запишем первое слагаемое в левой части (2.2) в виде

$$\sum_{\alpha=1}^p (y_\alpha^{s+1} - \hat{y}_\alpha^s, A_\alpha y_{\alpha t}^{s+1}) = \tau \sum_{\alpha=1}^p (A_\alpha y_{\alpha t}^{s+1}, y_{\alpha t}^{s+1}) - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=2}^p (\hat{v}^{s(\alpha, \alpha-1)}, A_\alpha y_{\alpha t}^{s+1}). \quad (2.3)$$

Вычитая уравнения (1.6) с номерами  $\alpha$  и  $\alpha - 1$  друг из друга, получим равенство  $\tau^{-2} w^{s+1(\alpha)} = A_\alpha y_{\alpha t}^{s+1}$ , где  $w^{s+1(2)} = v^{s+1(2,1)} - 0.5 v^s(2,1)$ ,  $w^{s+1(\alpha)} = v^{s+1(\alpha, \alpha-1)} - 0.5(v^s(\alpha, \alpha-1) + v^s(\alpha-1, \alpha-2))$ ,  $\alpha = \overline{3, p}$ . Кроме того, справедливо очевидное тождество  $v^{s+1(\alpha, \alpha-1)} = 0.5((v^{s+1(\alpha, \alpha-1)} + v^{s+1(\alpha-1, \alpha-2)}) + (v^{s+1(\alpha, \alpha-1)} - v^{s+1(\alpha-1, \alpha-2)}))$ ,  $\alpha = \overline{3, p}$ . Используя эти соотношения, представим второе слагаемое из правой части (2.3) в виде двух слагаемых:

$$-0.5(v^s(2,1), A_2 y_{2t}^{s+1}) = 0.5\tau^{-2}(v^s(2,1), v^{s+1(2,1)}) - 0.25\tau^{-2}\|v^s(2,1)\|^2,$$

$$-0.5 \sum_{\alpha=2}^p (v^s(\alpha, \alpha-1), A_\alpha y_{\alpha t}^{s+1}) = S_1 + S_2, \tag{2.4}$$

где  $S_1 = 0.25\tau^{-2} \sum_{\alpha=3}^p (w^{s+1(\alpha)}, v^s(\alpha, \alpha-1) + v^s(\alpha-1, \alpha-2))$ ,  $S_2 = 0.25\tau^{-2} \sum_{\alpha=3}^p (w^{s+1(\alpha)}, v^s(\alpha, \alpha-1) - v^s(\alpha-1, \alpha-2))$ . Выражение  $S_1$  преобразуем следующим образом:

$$S_1 = 0.25\tau^{-2} \sum_{\alpha=3}^p (v^{s+1(\alpha, \alpha-1)}, v^s(\alpha, \alpha-1) + v^s(\alpha-1, \alpha-2)) - (0.5)^3 \tau^{-2} \sum_{\alpha=3}^p \|v^s(\alpha, \alpha-1) + v^s(\alpha-1, \alpha-2)\|^2.$$

Для  $S_2$  справедлива оценка

$$|S_2| \leq 0.25\tau^{-2} \sum_{\alpha=3}^p (w^{s+1(\alpha)}, w^{s+1(\alpha)}) + (0.25)^2 \tau^{-2} \sum_{\alpha=3}^p \|v^s(\alpha, \alpha-1) - v^s(\alpha-1, \alpha-2)\|^2.$$

Представим второе слагаемое в левой части (2.2) в виде

$$\tau^2 \sum_{\alpha=1}^p \|A_\alpha y_{\alpha t}^{s+1}\|^2 = \tau^2 \|A_1 y_{1t}^{s+1}\|^2 + \tau^{-2} (w^{s+1(2)}, w^{s+1(2)}) + \tau^{-2} \sum_{\alpha=3}^p (w^{s+1(\alpha)}, w^{s+1(\alpha)}). \tag{2.5}$$

Для оценки скалярных произведений в (2.5) воспользуемся равенствами  $\tau^{-2} (w^{s+1(2)}, w^{s+1(2)}) = \tau^{-2} (\|v^{s+1(2,1)}\|^2 - (v^{s+1(2,1)}, v^s(2,1)) + 0.25\|v^s(2,1)\|^2)$ ,  $\tau^{-2} (w^{s+1(\alpha)}, w^{s+1(\alpha)}) = 0.5\tau^{-2} (\|w^{s+1(\alpha)}\|^2 + \|v^{s+1(\alpha, \alpha-1)}\|^2 + 0.25\|v^s(\alpha, \alpha-1)\|^2 - (v^{s+1(\alpha, \alpha-1)}, v^s(\alpha, \alpha-1) + v^s(\alpha-1, \alpha-2)))$ ,  $\alpha = \overline{3, p}$ . С учетом проведенных выше преобразований из (2.2) приходим к неравенству

$$\tau \sum_{\alpha=1}^p (A_\alpha y_{\alpha t}^{s+1}, y_{\alpha t}^{s+1}) + 0.5\tau^2 \|A_1 y_{1t}^{s+1}\|^2 + 0.5\tau^{-2} \|v^{s+1(2,1)}\|^2 + (1/8)\tau^{-2} \|v^{s+1}\|^2 + 0.5\|r(s+1)\|^2 \leq$$

$$\leq (1/8)\tau^{-2} \|v^s(2,1)\|^2 + (1/16)\tau^{-2} \|v^s\|^2 + 0.5\|r(s)\|^2, \tag{2.6}$$

где  $\|v^s\|^2 = \sum_{\alpha=3}^p (v^s(\alpha, \alpha-1), v^s(\alpha, \alpha-1))$ .

Далее, из уравнения (1.6) вытекает равенство  $y_{1t}^{s+1} = -(\tau A_1 y_{1t}^s + r(s))$ , из которого с учетом свойства оператора  $A_1$ :  $(A_1 y_{1t}^s, y_{1t}^s) \geq c_0 \|y_{1t}^s\|^2$ , следует соотношение

$$c_0 \tau \|y_{1t}^{s+1}\|^2 = c_0 \tau (\tau^2 \|A_1 y_{1t}^{s+1}\|^2 + 2\tau (A_1 y_{1t}^s, r(s)) + \|r(s)\|^2).$$

Используя для оценки второго слагаемого в правой части последнего равенства  $\varepsilon$ -неравенство с  $\varepsilon = 1/4$ :  $2\tau (A_1 y_{1t}^s, r(s)) \leq 0.5(\|r(s)\|^2 + 2\tau^2 \|A_1 y_{1t}^s\|^2)$ , из (2.6) при  $0.5 - c_0 \tau \geq 0$  окончательно получим соотношение

$$\tau^{-2} (\|v^{s+1(2,1)}\|^2 + 0.25\|v^{s+1}\|^2) + \|r(s+1)\|^2 \leq 0.5\tau^{-2} (\|v^s(2,1)\|^2 + 0.25\|v^s\|^2) + (1 - c_0 \tau) \|r(s)\|^2.$$

Из последнего неравенства следует

**Лемма 2.1.** Пусть  $0.5 - c_0\tau \geq 0$ ,  $A_1$  - положительно-определенный оператор:  $A_1 \geq c_0E$ ,  $A_\alpha$ ,  $\alpha = \overline{2, p}$ , - неотрицательные операторы. Тогда для итерационного процесса (1.6) справедлива оценка

$$\overset{s}{Q} \leq q^s \overset{\circ}{Q}, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (2.7)$$

где  $\overset{s}{Q} = \|r(s)\|^2 + \tau^{-2}(\|\overset{s}{v}^{(2,1)}\|^2 + 0.25\|\overset{s}{v}\|^2)$ ,  $q = \max\{1/2, 1 - c_0\tau\}$ .

Из неравенства (2.7) следует, что норма  $\overset{s}{Q} \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow \infty$ . Оптимальная скорость ее стремления к нулю достигается при  $c_0\tau = 0.5$ .

Как и в случае параллельных алгоритмов, исследованных в работах [12, 13], из леммы 2.1 еще не следует сходимость итерационного метода (1.6) в силу того, что его невязка  $r(s) = \sum_{\alpha=1}^p A_\alpha \overset{s}{y}_\alpha - f$  не согласована с обычной невязкой  $A\overset{s}{y} - f$  итерационных методов для решения уравнения (1.1). Для получения оценки сходимости в естественных нормах введем функцию погрешности  $\overset{s}{\rho} = \overset{s}{y}_1 - y$ . Отметим, что вместо  $\overset{s}{y}_1$  здесь можно брать, вообще говоря, любое  $\overset{s}{y}_\alpha$  ( $\alpha = \overline{1, p}$ ) или их среднее значение  $\overset{s}{\bar{y}} = p^{-1} \sum_{\alpha=1}^p \overset{s}{y}_\alpha$ . Используя тождество  $\overset{s}{y}_\alpha = \overset{s}{y}_1 + \sum_{\beta=2}^p (\overset{s}{y}_\beta - \overset{s}{y}_{\beta-1}) = \overset{s}{y}_1 + \sum_{\beta=2}^p \overset{s}{v}^{(\beta, \beta-1)}$ , для невязки метода нетрудно получить соотношение

$$\overset{s}{\rho} = - \sum_{\alpha=2}^p B_\alpha \sum_{\beta=2}^{\alpha} \overset{s}{v}^{(\beta, \beta-1)} + A^{-1}r(s), \quad (2.8)$$

где  $B_\alpha = A^{-1}A_\alpha = (E + \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^p A_\alpha^{-1}A_\beta)^{-1}$ . Если операторы  $A_\alpha$ ,  $\alpha = \overline{1, p}$ , попарно коммутируемы, то норма  $\|B_\alpha\| < 1$  и из неравенства (2.8) вытекает оценка

$$\|\overset{s}{\rho}\| \leq c^{-1}\|r(s)\| + p\|\overset{s}{v}\|, \quad cE \leq A. \quad (2.9)$$

Из (2.7) следуют неравенства  $\|\overset{s}{v}\| \leq 4\tau(q^s \overset{\circ}{Q})^{1/2}$ ,  $c^{-1}\|r(s)\| \leq c^{-1}(q^s \overset{\circ}{Q})^{1/2}$ , с учетом которых в (2.9) приходим к оценке  $\|\overset{s}{\rho}\| \leq (4p\tau + c^{-1})(q^s \overset{\circ}{Q})^{1/2}$ . Таким образом, доказана

**Теорема 2.1.** Пусть выполняются условия леммы 2.1 и операторы  $A_\alpha$ ,  $\alpha = \overline{1, p}$ , попарно коммутируемы. Тогда итерационный метод (1.6) сходится к решению исходного уравнения (1.1) и для его скорости сходимости справедлива оценка

$$\|\overset{s}{\rho}\| \leq (4p\tau + c^{-1})q^{s/2}\|r(0)\|. \quad (2.10)$$

Из теоремы 2.1 вытекает очевидное преимущество последовательного метода (1.6) перед обычным методом переменных направлений, так как его скорость сходимости не зависит от верхней границы спектра операторов  $A$ ,  $A_\alpha$ .

Из (2.10) следует оценка числа итераций, необходимых для достижения заданной точности  $\varepsilon$ :

$$s \geq s_0 = 2 \ln((4p\tau + c^{-1})/\varepsilon) / \ln q^{-1}. \quad (2.11)$$

Если условие попарной коммутируемости операторов  $A_\alpha$  не выполняется, то, используя равенство (2.8), нетрудно показать, что имеет место

**Теорема 2.2.** Пусть выполняются условия леммы 2.1. Тогда итерационный процесс (1.6) сходится и для его погрешности справедлива оценка

$$\|\overset{s}{\rho}\|_A \leq (c^{-1/2} + 4p\Delta^{1/2}\tau)q^{s/2}\|r(0)\|^{1/2}, \quad (2.12)$$

$$s \geq s_0 = 2 \ln((c^{-1/2} + 4p\Delta^{1/2}\tau)/\varepsilon) / \ln q^{-1}, \quad \Delta E \geq A.$$

Из неравенств (2.10), (2.11) следует, что в коммутируемом случае скорость сходимости метода (1.6) зависит только от итерационного параметра  $\tau$  и нижней границы спектра операторов  $A$ ,  $A_\alpha$ , что позволяет применять данный метод для задач как с непрерывными, так и с

дискретными операторами  $A_\alpha$ . Вопрос о выборе оптимального параметра  $\tau$  будет обсужден при анализе результатов вычислительного эксперимента.

Из равенства (2.2) можно также получить оценку  $2\tau \sum_{\alpha=1}^p \|A_\alpha^{s+1} y_{\alpha t}\|^2 + \overset{s+1}{Q} \leq \overset{s}{Q}$  или с учетом положительности первого слагаемого  $\overset{s+1}{Q} \leq \overset{s}{Q}$ . Следуя [13], можно показать, что справедлива

**Теорема 2.3.** *Если хотя бы один из операторов  $A_\alpha$ ,  $\alpha = \overline{1, p}$ , положительно определен, а остальные неотрицательны, то итерационный метод (1.6) сходится.*

Теорема 2.3 позволяет утверждать, что алгоритм (1.6) дает возможность получить решение уравнения (1.1) при любых  $\tau$ . Последовательный метод менее требователен к свойствам операторов разбиения  $A_\alpha$ , чем параллельный алгоритм [13].

**3. Некоторые примеры применения последовательного ММПН.** Рассмотрим многомерное эллиптическое уравнение с граничными условиями первого рода

$$Lu = - \sum_{\alpha, \beta=1}^p \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right) = f(x), \quad x \in G, \quad u(x) = 0, \quad x \in \partial G, \quad (3.1)$$

где  $G = (x_1, \dots, x_p)$  – односвязная область с достаточно гладкой границей  $\partial G$ ,  $L$  – эллиптический оператор, для которого выполняются условия

$$c_1 \sum_{\alpha=1}^p \xi_\alpha^2 \leq \sum_{\alpha, \beta=1}^p k_{\alpha\beta}(x) \xi_\alpha \xi_\beta \leq c_2 \sum_{\alpha=1}^p \xi_\alpha^2, \quad 0 \neq \xi = (\xi_1, \dots, \xi_p) \in G, \quad c_1, c_2 > 0.$$

Предполагается также, что известные функции  $f(x)$ ,  $k_{\alpha\beta}(x)$  таковы, что решение задачи (3.1) существует, единственно и обладает гладкостью, необходимой для корректности рассматриваемых ниже методов.

В качестве примера уравнения с вырожденным оператором в области  $\Omega^{(2)} = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$  с границей  $\Gamma$  рассмотрим краевую задачу для уравнения Навье–Стокса

$$-\nu \nabla u_k + \sum_{\alpha=1}^2 u_\alpha \partial u_k / \partial x_\alpha = -\partial P / \partial x_k + f_k(x), \quad x \in \Omega^{(2)}, \quad \nu > 0, \quad k = 1, 2, \quad (3.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = \partial u_1 / \partial x_1 + \partial u_2 / \partial x_2 = 0, \quad x \in \Omega^{(2)}, \quad (3.3)$$

с однородными граничными условиями

$$u_k|_\Gamma = 0, \quad k = 1, 2, \quad (3.4)$$

где  $\nabla = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2$ . Вопросы существования и единственности решения данной задачи изучались в работах [19–21].

Если  $Lu = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u$ ,  $L_\alpha u = -(\partial / \partial x_\alpha)(k_\alpha(x) \partial u / \partial x_\alpha)$ , то в случае разделяющихся переменных (метод Фурье) [22] итерационный алгоритм (1.6) можно использовать непосредственно для решения задачи (3.1), т.е. не переходить к разностной схеме по пространству. Согласно теореме 2.1, скорость сходимости метода не зависит от шага по пространству, а зависит лишь от требуемой точности. В некоммутируемом случае переход к дискретному аналогу (3.1) необходим, так как в оценке (2.12) присутствует верхняя граница спектра исходного оператора.

Рассмотрим теперь уравнение (3.1) с эллиптическим дифференциальным оператором  $L$ , содержащим смешанные производные. Преобразуем оператор  $L$ , представив его в виде суммы симметричного и кососимметричного операторов  $L = A + B$ , где

$$Au = \sum_{\alpha, \beta=1}^p A_{\alpha\beta} u, \quad A_{\alpha\beta} u = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( a_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right),$$

$$a_{\alpha\alpha} = k_{\alpha\alpha}, \quad a_{\alpha\beta} = 0.5(k_{\alpha\beta} + k_{\beta\alpha}) = a_{\beta\alpha}, \quad \beta \neq \alpha \quad (\alpha = \overline{1, p}, \quad \beta = \overline{1, p}),$$

$$Bu = \sum_{\alpha=1}^p B_{\alpha}u, \quad B_{\alpha}u = -0.5 \left( \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (b_{\alpha}(x)u) + b_{\alpha}(x) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right),$$

$$b_{\alpha}(x) = 0.5 \sum_{\beta=1, \alpha \neq \beta}^p \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (k_{\beta\alpha} - k_{\alpha\beta}), \quad \vec{b}(x) = (b_1, \dots, b_p), \quad \operatorname{div} \vec{b}(x) = 0 \quad \forall x \in G^{(p)}.$$

При этом в пространстве  $H$  операторы  $A, B$  обладают следующими свойствами:  $A$  – самосопряженный положительно-определенный оператор, т.е.  $A = A^* > 0$ ;  $B = -B^*$ ,  $B_{\alpha} = -B_{\alpha}^*$  ( $\alpha = \overline{1, p}$ ) и  $(B_{\alpha}u, u) = 0$  для всех  $u \in H$ .

Далее оператор  $A$  разобьем на сумму двух операторов  $A = A^+ + A^-$  так, что  $A^{\pm} = \sum_{\alpha=1}^p A_{\alpha}^{\pm}$ ,  $A_{\alpha}^{-}u = \sum_{i=1}^{\alpha} A_{\alpha i}^{-}u$ ,  $A_{\alpha}^{+}u = \sum_{i=\alpha}^p A_{\alpha i}^{+}u$ , где

$$A_{\alpha i} = \begin{cases} A_{\alpha i}^{+}, & i \geq \alpha, \\ A_{\alpha i}^{-}, & i \leq \alpha, \end{cases} \quad A_{\alpha i}^{\pm}u = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( a_{\alpha i}^{\pm} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right), \quad a_{\alpha\alpha}^{-} = a_{\alpha\alpha}^{+} = 0.5a_{\alpha\alpha}, \quad a_{\alpha i} = \begin{cases} a_{\alpha i}^{+}, & i > \alpha, \\ a_{\alpha i}^{-}, & i < \alpha. \end{cases}$$

Пусть  $H^{2p}$  – гильбертово пространство вектор-функций  $U = (u_1^{\rightarrow}, \dots, u_p^{\rightarrow}, u_p^{\leftarrow}, \dots, u_1^{\leftarrow})$ ,  $u_{\alpha}^{\rightarrow}, u_{\alpha}^{\leftarrow} \in H$  ( $\alpha = \overline{1, p}$ ), обращающихся в нуль на границе  $\partial G^{(p)}$ , со скалярным произведением  $(U, V) = \sum_{\alpha=1}^{2p} (u_{\alpha}^*, v_{\alpha}^*)$  и нормой  $\|U\| = \sqrt{(U, V)}$ , где  $u_{\alpha}^* = \begin{cases} u_{\alpha}^{\rightarrow}, & \alpha = \overline{1, p}, \\ u_{2p+1-\alpha}^{\leftarrow}, & \alpha = \overline{p+1, 2p}. \end{cases}$

После преобразований оператора  $L$  вместо задачи (3.1) рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial y_{\alpha}}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^{2p} (A_{\beta}^* y_{(\beta)} + B_{\beta} y_{\beta}) = f(x), \quad x \in G^{(p)},$$

$$y_{\alpha}(0) = y_0, \quad y_{\alpha}(x) = 0, \quad x \in \partial G^{(p)}, \quad \alpha = \overline{1, 2p}. \tag{3.5}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$A_{\beta}^* y_{(\beta)} = \begin{cases} A_{\beta}^{-} y_{(\beta)}^{\rightarrow}, & \beta = \overline{1, p}, \\ A_{2p+1-\beta}^{+} y_{(2p+1-\beta)}^{\leftarrow}, & \beta = \overline{p+1, 2p}, \end{cases} \quad B_{\beta} y_{(\beta)} = \begin{cases} B_{\beta} y_{(\beta)}^{\rightarrow}, & \beta = \overline{1, p}, \\ B_{2p+1-\beta} y_{(2p+1-\beta)}^{\leftarrow}, & \beta = \overline{p+1, 2p}, \end{cases}$$

где  $A_{\beta}^{-} y_{(\beta)}^{\rightarrow} = A_{\beta\beta}^{-} y_{\beta}^{\rightarrow} + \sum_{i=1}^{\beta-1} A_{\beta i}^{-} y_i^{\rightarrow}$ ,  $A_{\beta}^{+} y_{(\beta)}^{\leftarrow} = A_{\beta\beta}^{+} y_{\beta}^{\leftarrow} + \sum_{i=\beta+1}^p A_{\beta i}^{+} y_i^{\leftarrow}$ . Можно показать [23], что для компонент произвольной вектор-функции в пространстве  $H^{2p}$  справедливо неравенство

$$\sum_{\beta=1}^{2p} (A_{\beta}^* y_{(\beta)}, y_{\beta}) \geq 0.5c_1 \sum_{\beta=1}^{2p} \left\| \frac{\partial y_{\beta}}{\partial x_{\beta}} \right\|^2. \tag{3.6}$$

Используя обоснованность перехода от (1.1) к (1.2) и учитывая оценку (3.6), приходим к выводу о корректности перехода от (3.1) к системе (3.5), при этом очевидно, что  $z_{\alpha} = y_{\alpha} - u = 0$ .

Аналогичное представление имеет место и для дискретного аналога уравнения (3.1). Оператор  $A$  в этом случае принимает вид

$$A = \sum_{\alpha=1}^p (A_{h,\alpha}^{-} + B_{h,\alpha}) + \sum_{\alpha=p+1}^{2p} (A_{h,2p+1-\alpha}^{+} + B_{h,2p+1-\alpha}),$$

где  $A_{h,\alpha}^{\pm}$  – дискретные аналоги соответствующих непрерывных операторов.

С учетом (3.5) перепишем итерационный процесс (1.6) в виде

$$\frac{y_\alpha^{s+1} - y_\alpha^s}{\tau} + \sum_{\beta=1}^{\alpha} (A_{h,\beta}^* + B_{h,\beta}) y_\beta^{s+1} + \sum_{\beta=\alpha+1}^{2p} (A_{h,\beta}^* + B_{h,\beta}) y_\beta^s = f, \quad \alpha = \overline{1, 2p}, \quad (3.7)$$

где  $y_1^s = y_1$ ,  $y_\alpha^s = 0.5(y_\alpha + y_{\alpha-1})$ ,  $\alpha = \overline{2, 2p}$ . Число компонент разбиения для уравнения со смешанными производными по сравнению с (1.6) здесь удваивается [23, 24].

Для сходимости итерационного метода (3.7) справедливы лемма 2.1 и теорема 2.2, причем следует положить  $r(s) = \sum_{\alpha=1}^p (A_{h,\alpha}^- + B_{h,\alpha}) y_\alpha^s + \sum_{\alpha=p+1}^{2p} (A_{h,2p+1-\alpha}^+ + B_{h,2p+1-\alpha}) y_{2p+1-\alpha}^s - f$ , а  $\|\dot{v}^s\|$  изменить с учетом удвоения компонент разбиения. Оптимальная скорость сходимости достигается при  $\tau \sim h$ , т.е. как и для классического метода переменных направлений в некоммутируемом случае.

Рассмотрим разностную схему для линеаризованной системы уравнений Навье–Стокса (3.2), (3.3)

$$-\nu \sum_{\alpha=1}^2 y_{k\bar{\alpha}x_\alpha} = -P_{\hat{x}_k} + f_k, \quad x \in \omega_h, \quad y_{1\hat{x}_1} + y_{2\hat{x}_2} = 0, \quad x \in \Omega_h, \quad k = 1, 2. \quad (3.8)$$

Экономичный последовательный итерационный метод для задачи (3.8) принимает вид

$$\frac{y_{\alpha k}^{s+1} - y_{\alpha k}^s}{\tau} + \sum_{\beta=1}^{\alpha} A_{\beta k} y_{\beta k}^{s+1} + \sum_{\beta=\alpha+1}^3 A_{\beta k} y_{\beta k}^s = f_k, \quad x \in \omega_h, \quad (3.9)$$

где  $k = 1, 2$ ,  $\alpha = \overline{1, 3}$ ;  $y_{11}^s = y_{11}$ ,  $y_{\alpha k}^s = 0.5(y_{\alpha k} + y_{\alpha-1,k})$ ,  $k = 1, 2$ ,  $\alpha = 2, 3$ ;  $A_{1k} y_{1k}^s = \hat{P}_{\hat{x}_k}$ ,  $A_{\alpha k} y_{\alpha k}^s = -\nu y_{\alpha k \bar{\alpha} x_\alpha}$ ,  $k = 1, 2$ ,  $\alpha = 2, 3$ . Для решения уравнения неразрывности используется итерационный процесс

$$y_{11\hat{x}_1}^{s+1} + y_{12\hat{x}_2}^{s+1} = 0, \quad x \in \Omega_h \quad (3.10)$$

(здесь приняты обозначения из [25, 26]).

Обозначим  $\hat{z}_{\alpha k} = y_k - y_{\alpha k}$ ,  $k = 1, 2$ ,  $\alpha = 2, 3$ ,  $\hat{z}_{1k} = y_k - y_{1k}$ ,  $\hat{\gamma} = P - \hat{P}$ . Тогда для сходимости итерационного метода (3.9), (3.10) справедлива лемма 2.1, в которой необходимо взять  $\|r^*(s)\|^2 = \|r_1(s)\|^2 + \|r_2(s)\|^2$ ,  $r_k(s) = -\nu \sum_{\alpha=2}^3 \hat{z}_{\alpha k \bar{\alpha} x_\alpha} + \hat{\gamma}_{\hat{x}_k}$ ,  $k = 1, 2$ ,  $\|\dot{v}^s\|^2 = \|\dot{v}_1^s\|^2 + \|\dot{v}_2^s\|^2$ , где  $\|\dot{v}_k^s\|^2$  имеют такой же вид, что и  $\|\dot{v}^s\|^2$  в лемме 2.1 и состоят из компонент  $y_{\alpha k}^s$ ,  $k = 1, 2$ ,  $\alpha = \overline{1, 3}$ . Для погрешности метода (3.9), (3.10), согласно теореме 2.2, получим оценку

$$\sum_{\alpha,k=1}^2 \|\hat{z}_{\alpha k \bar{\alpha} x_\alpha}\|^2 + \sum_{\alpha=1}^2 \|\hat{\gamma}_{\hat{x}_\alpha}\|^2 \leq (c^{-1/2} + 4\Delta^{1/2}\tau)q^{s/2}\|r^*(0)\|,$$

где  $cE \leq \nabla \leq \Delta E$ .

Для решения нелинейной задачи (3.2)–(3.4) можно использовать следующий итерационный метод:

$$\frac{y_{\alpha k}^{s+1} - y_{\alpha k}^s}{\tau} + \sum_{\beta=1}^{\alpha} F_{\beta k}^{s+1} + \sum_{\beta=\alpha+1}^3 F_{\beta k}^s = f_k, \quad k = 1, 2, \quad \alpha = \overline{1, 3}, \quad y_{3\hat{x}_1}^{s+1} + y_{3\hat{x}_2}^{s+1} = 0, \quad (3.11)$$

где  $F_{\beta k}^{s+1} = -\nu y_{\beta k}^{s+1} + K_{\beta k}(y^s, y^s)$ ,  $F_{\beta k}^s = -\nu y_{\beta k}^s + K_{\beta k}(y^s, y^s)$ ,  $k = 1, 2$ ,  $\beta = 1, 2$ ,  $F_{3k}^s = \hat{P}_{\hat{x}_k}$ ,  $k = 1, 2$  (см. обозначения в [26]). Граничные и начальные условия для (3.11) определяются так

же, как и в линейном случае. Условия сходимости метода (3.11) аналогичны итерационному алгоритму для линейной задачи (3.9), однако за счет особенностей, связанных с нелинейностью, число итераций несколько возрастает. В связи с этим здесь представляется разумным использовать метод декомпозиции по подобластям с выделением подобластей с особенностями поведения решения.

**4. Методы декомпозиции области.** Алгоритмы (1.6), (2.1) могут быть использованы как классические блочные итерационные методы, методы кластерного агрегирования, многоцветного упорядочения неизвестных [17, 18]. Для решения многомерных краевых задач эллиптического типа их можно рассматривать как методы декомпозиции области с налеганием или без налегания подобластей (эти методы схожи с альтернирующим методом Шварца). Однако их многокомпонентность как в последовательном, так и в параллельном вариантах имеет определенные преимущества. Методы (1.6), (2.1) можно рассматривать как решение проблемы многокомпонентного раскрашивания и улучшения скорости сходимости алгоритма при минимальных требованиях к свойствам операторов разбиения.

Пусть уравнение (1.1), являющееся, например, аппроксимацией многомерной эллиптической задачи, задано в сеточной области  $\omega$ . Представим область  $\omega$  в виде объединения  $p$  отдельных подобластей:  $\omega = \bigcup_{\alpha=1}^p \omega_\alpha$ ,  $\alpha = \overline{1, p}$ . Рассмотрим класс методов декомпозиции, когда оператор  $A$  имеет аддитивное представление  $A = \sum_{\alpha=1}^p A_\alpha$ . Отметим, что возможно налегание подобластей  $\omega_\alpha$ . Для эллиптического уравнения второго порядка проще всего выбирать в качестве линии налегания одну прямую или совокупность точек. В подобластях используется алгоритм (1.6), причем в области, где нет налегания, применяется (1.6) с  $\tilde{y}_1^s = y_1^s$ , в области налегания двух последовательных подобластей  $\tilde{y}_2^s = 0.5(y_\alpha^s + y_{\alpha-1}^s)$ ,  $\alpha = \overline{2, p}$ . При этом остаются справедливыми лемма 2.1 и теоремы 2.1, 2.2 при условии, что хотя бы один из операторов  $A_\alpha$  положительно определен (остальные могут быть неотрицательными). Кластерность алгоритма здесь достигается минимальными усилиями и в отличие от [17] порядок сходимости метода определен и не зависит от верхней границы спектра операторов  $A$ ,  $A_\alpha$ ,  $\alpha = \overline{1, p}$ . Все указанные свойства для операторов разбиения в этом случае сохраняются. Наличие хотя бы одного положительно-определенного оператора  $A_\alpha$  соответствует корректности исходной задачи (1.1).

Параллельный алгоритм (2.1) также применим в качестве метода декомпозиции области, причем внутри области  $\omega_\alpha$  в качестве  $\tilde{y}$  берется  $y_\alpha^s$ , а в области налегания  $\tilde{y} = m^{-1} \sum_{\alpha=1}^m y_\alpha^s$ , где  $m$  – число областей налегания. Скорость его сходимости выше скорости сходимости методов, предложенных в работах [7, 17, 18]. Этот метод можно использовать и в случае, когда хотя бы один из операторов  $A_\alpha$  положительно определен, при этом можно указать порядок скорости сходимости [13].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, 1967.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. М., 1989.
3. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М., 1989.
4. Марчук Г.И. Методы расщепления. М., 1988.
5. Лебедев В.И. Метод композиции. М., 1986.
6. Абрашин В.Н. // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 7. С. 909–918.
7. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Аддитивные схемы для задач математической физики. М., 1999.
8. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. М., 1973.
9. Абрашин В.Н. // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 2. С. 314–323.
10. Абрашин В.Н., Муха В.А. // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 10. С. 1786–1799.
11. Абрашин В.Н., Жадаева Н.Г. // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 9. С. 1220–1229.
12. Самарский А.А., Абрашин В.Н., Жадаева Н.Г. // Докл. РАН. 2000. Т. 373. № 6. С. 734–736.
13. Абрашин В.Н., Егоров А.А., Жадаева Н.Г. // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 7. С. 867–879.

14. *Абрашин В.Н., Жадаева Н.Г.* // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 9. С. 1212–1221.
15. *Жадаева Н.Г.* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 7. С. 998–1000.
16. *Vabishchevich P.N.* // Iterative Methods in Linear Algebra. II. Blagoevgrad, 1996. P. 281–291.
17. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* // Докл. РАН. 1996. Т. 349. № 1. С. 22–25.
18. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* // Докл. РАН. 1997. Т. 354. № 3. С. 310–312.
19. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., 1970.
20. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1972.
21. *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса. М., 1981.
22. *Андреев В.В.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1967. Т. 7. № 2. С. 312–321.
23. *Абрашин В.Н., Дзюба И.А., Лапко С.Л.* // Изв. вузов. Математика. 1995. № 4. С. 3–11.
24. *Абрашин В.Н.* // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 2. С. 212–224.
25. *Абрашин В.Н., Лапко С.Л.* // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 7. С. 1154–1167.
26. *Абрашин В.Н., Лапко С.Л.* // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 4. С. 673–688.

Институт математики НАН Беларуси, г. Минск,  
Белорусский государственный университет, г. Минск

Поступила в редакцию  
28.05.2001 г.