ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2001, том 37, № 8, с. 1125–1127

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.926.4

О ВЗАИМОСВЯЗИ МЕЖДУ РАЗЛИЧНЫМИ ВИДАМИ ДИХОТОМИЙ

© 2001 г. Р. А. Прохорова

Рассмотрим линейные системы

$$dx/dt = A(t)x \tag{1}$$

с кусочно-непрерывными коэффициентами $A(\cdot) : [0, +\infty) \to \mathrm{Hom}(R^n, R^n)$ и с фундаментальной матрицей $X(t)$, $X(0) = E$. В дальнейшем систему (1) будем отождествлять с ее матрицей коэффициентов $A(\cdot)$ и называть системой A.

Цель работы – изучить связь между множествами ED, $L^\infty D$ и L^pD линейных систем (1), обладающих соответственно экспоненциальной, обыкновенной и L^p-дихотомиями.

Мы будем использовать следующие известные определения указанных дихотомий.

Определение 1 [1, с. 236]. Система (1) называется экспоненциально дихотомичной на R_+, что обозначается включением $A \in ED$, если существуют пара взаимно дополнительных проекторов P_1 и P_2 и положительные постоянные N_1, N_2 и ν_1, ν_2 такие, что выполнены неравенства

$$\|X(t)P_1X^{-1}(\tau)\| \le N_1 e^{-\nu_1(t-\tau)}, \quad t \ge \tau \ge 0, \tag{2}$$

$$\|X(t)P_2X^{-1}(\tau)\| \le N_2 e^{-\nu_2(\tau-t)}, \quad \tau \ge t \ge 0. \tag{3}$$

Определение 2 [2, с. 131, $p = 1$, $p = \infty$; 3, $1 < p < \infty$]. Будем говорить, что система (1) L^p-дихотомична на R_+, $0 < p \le +\infty$, и обозначать это включением $A \in L^pD$, если существуют пара взаимно дополнительных проекторов P_1 и P_2 и постоянная $K > 0$ такие, что при $0 < p < +\infty$ имеет место неравенство

$$\int\limits_0^t \|X(t)P_1X^{-1}(\tau)\|^p\, d\tau + \int\limits_t^{+\infty} \|X(t)P_2X^{-1}(\tau)\|^p\, d\tau \le K, \quad t \ge 0,$$

а при $p = \infty$ выполнены условия обыкновенной дихотомии

$$\|X(t)P_1X^{-1}(\tau)\| \le K, \quad t \ge \tau \ge 0, \tag{4}$$

$$\|X(t)P_2X^{-1}(\tau)\| \le K, \quad \tau \ge t \ge 0. \tag{5}$$

Если $P_1 = E$ или $P_1 = 0$, то мы получаем при $0 < p < +\infty$ соответственно множества Коппеля–Конти [3] L^pS асимптотически устойчивых и M^pS неустойчивых линейных систем.

В этих экстремальных случаях установлены [4; 5, с. 43–47; 6; 7] различные связи между множествами L^pS, M^pS и множествами ES и US соответственно экспоненциально устойчивых и равномерно устойчивых линейных систем.

В общем случае известны лишь очевидные строгие включения $ED \subset L^pD$ при любом $0 < p \le +\infty$, $ED \subset \bigcap\limits_{p>0} L^pD$ и свойство сужения [8] $L^{p+\varepsilon}D \subset L^pD$, $\varepsilon > 0$, множеств L^pD с возрастанием параметра p на интервале $(0, +\infty)$.

Связь между всеми рассматриваемыми множествами устанавливает

Теорема 1. *Для любого положительного числа p справедливо представление*

$$ED = L^pD \cap L^\infty D. \tag{6}$$

Доказательство. Справедливость включения $ED \subset L^pD \cap L^\infty D$ очевидна. Обратно, пусть $A \in L^pD \cap L^\infty D$ и L^p-дихотомия системы (1) реализуется на паре проекторов P_1 и P_2. Известно [2, с. 68], что любое решение $x(t)$ с начальным условием $x(0) \in P_1R^n \equiv B_0$ удовлетворяет предельному соотношению $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$, в противном случае $\varlimsup\limits_{t\to+\infty} \|x(t)\| = +\infty$. С другой стороны, для обыкновенной дихотомии в выборе первого проектора из определения $L^\infty D$ большая свобода [9, с. 17–19], в частности, в качестве него можно взять любой проектор $P : R^n \to B_0$. Отсюда следует, что для системы $A \in L^pD \cap L^\infty D$ обыкновенная дихотомия системы (1) реализуется также на той же паре проекторов P_1 и P_2, что и L^p-дихотомия.

Введем для любого числа $\alpha > 0$ множества

$$T^1_\alpha(t) = \{\tau \in [0,t] : \|X(t)P_1X^{-1}(\tau)\| \geq \alpha\},$$

$$T^2_\alpha(t) = \{\tau \in [t,+\infty) : \|X(t)P_2X^{-1}(\tau)\| \geq \alpha\}.$$

Из критерия L^p-дихотомии [8] следует, что для некоторого $0 < \alpha < 1$ выполнено неравенство

$$\operatorname{mes} T^i_\alpha(t) \leq c(\alpha) < \infty, \quad t \geq 0, \quad i = 1,2. \tag{7}$$

Пусть $\tau \geq 0$, $t \geq 1+\tau+c(\alpha)$ – любые фиксированные числа. По начальной точке $t^1_0 = t$ построим на отрезке $[\tau, t]$ совокупность точек $\{t^1_i\}$, $i = 1,2,\ldots,m$, определяемых по правилу

$$t^1_i = \sup\{s \in [\tau, t^1_{i-1} - 1] : \|X(t^1_{i-1})P_1X^{-1}(s)\| \leq \alpha\} \tag{8}$$

и удовлетворяющих в силу (7) условию

$$1 \leq t^1_{i-1} - t^1_i \leq 1 + c(\alpha), \quad i = 1,2,\ldots,m, \quad t_m - \tau < 1 + c(\alpha).$$

Тогда из неравенств (4) и (8) при $t \geq 1 + \tau + c(\alpha)$ получаем первую оценку из определения экспоненциальной дихотомии

$$\|X(t)P_1X^{-1}(\tau)\| \leq \|X(t)P_1X^{-1}(t^1_1)\|\,\|X(t^1_1)P_1X^{-1}(t^1_2)\|\ldots\|X(t^1_{m-1})P_1X^{-1}(\tau^1_m)\|\,\|X(t^1_m)P_1X^{-1}(\tau)\| \leq$$

$$\leq K\alpha^m = Ke^{m\ln\alpha} \leq K\exp\{[(t-\tau)/(1+c(\alpha)) - 1]\ln\alpha\} \equiv K_1e^{-a(t-\tau)},$$

где $K_1 = K/\alpha$, $-a = \ln\alpha/(1+c(\alpha))$.

Для t, τ, $0 \leq t - \tau < 1 + c(\alpha)$, в силу (4) имеем неравенство

$$\|X(t)P_1X^{-1}(\tau)\| \leq K \leq Ke^{a(1+c(\alpha))}e^{-a(t-\tau)} \equiv K_2e^{-a(t-\tau)},$$

где $K_2 = Ke^{a(1+c(\alpha))}$.

Из полученных неравенств следует первая оценка (2) в определении экспоненциальной дихотомии с $N_1 = \max\{K_1, K_2\}$, $\nu_1 = a$.

Аналогично, отправляясь от точки $t^2_0 = t$ вправо, на промежутке $[t, \tau]$, $\tau \geq t + 1 + c(\alpha)$, построим совокупность точек $\{t^2_i\}$, $i = 1,2,\ldots,l$, определяемых по правилу

$$t^2_i = \inf\{s \in [t^2_{i-1} + 1, \tau] : \|X(t^2_{i-1})P_2X^{-1}(s)\| \leq \alpha\}$$

со свойством

$$1 \leq t^2_i - t^2_{i-1} \leq 1 + c(\alpha), \quad i = 1,2,\ldots,l, \quad \tau - t^2_l < 1 + c(\alpha).$$

Проводя, как и выше, соответствующие оценки, получаем при $\tau \geq t \geq 0$ второе условие (3) экспоненциальной дихотомии с постоянными $N_2 = N_1$, $\nu_2 = a$.

Включение $L^pD \cap L^\infty D \subset ED$, а с ним и представление (6) доказаны.

Отсюда, как следствие, при любом $p > 0$ получаем равенство

$$ES = L^pS \cap US,$$

установленное Р. Конти при $p \geq 1$ [5, с. 43].

Предположим теперь, что матрица Коши $X(t,\tau)$ системы (1) удовлетворяет φ-условию

$$\|X(t,\tau)\| \leq \varphi(|t-\tau|), \quad t, \tau \geq 0, \tag{9}$$

где $\varphi : [0,+\infty) \to (0,+\infty)$ – некоторая неубывающая функция.

Очевидно, что система (1) с интегрально ограниченной матрицей коэффициентов, для которой

$$\sup_{t\geq 0} \int\limits_t^{t+1} \|A(\tau)\|d\tau = M < +\infty,$$

удовлетворяет φ-условию с функций $\varphi(t) = Ce^{Mt}$ в силу известной оценки $\|X(t,\tau)\| \leq Ce^{M|t-\tau|}$, $C = e^M$, $t,\tau \geq 0$, матрицы Коши системы (1).

Теорема 2. *Если система (1) обладает L^p-дихотомией на R_+ с числом $p > 0$ и проекторами P_1 и P_2, а ее матрица Коши $X(t,\tau)$ удовлетворяет φ-условию (9), то система (1) обладает экспоненциальной дихотомией на R_+ с теми же проекторами P_1 и P_2.*

Доказательство. Используя построенную при доказательстве теоремы 1 совокупность точек $\{t_i^1\}$, $i = 0,1,\ldots,m$, в силу неравенств (8), (9) и свойства неубывания функции φ получаем при $t \geq 1+\tau+c(\alpha)$ оценку

$$\|X(t)P_1X^{-1}(\tau)\| \leq \alpha^m\|X(t_m^1,\tau)\| \leq \alpha^m\varphi(t_m^1-\tau) \leq \varphi(1+c(\alpha)).$$

Если $0 \leq t-\tau < 1+c(\alpha)$ и $t > 1+c(\alpha)$, то построим точку $\tilde{t} = \sup\{s \in [0,t] : \|X(t)P_1X^{-1}(s)\| \leq \alpha\}$. Если $\tilde{t} = \tau$, то $\|X(t)P_1X^{-1}(\tau)\| \leq \alpha$, в противном случае в силу критерия L^p-дихотомии [8] и φ-условия (9) получаем неравенства $|\tilde{t}-\tau| \leq 1+c(\alpha)$ и $\|X(t)P_1X^{-1}(\tau)\| \leq \|X(t)P_1X^{-1}(\tilde{t})\|\,\|X(\tilde{t})X^{-1}(\tau)\| \leq \alpha\varphi(|\tilde{t}-\tau|) \leq \varphi(1+c(\alpha))$. Если $0 \leq t \leq 1+c(\alpha)$, то при $0 \leq t-\tau < 1+c(\alpha)$ имеет место оценка

$$\|X(t)P_1X^{-1}(\tau)\| \leq \max_{0\leq t,\tau\leq 1+c(\alpha)} \|X(t)P_1X^{-1}(\tau)\| \equiv M_1 < +\infty.$$

Отсюда следует справедливость первого условия (4) для обыкновенной дихотомии

$$\|X(t)P_1X^{-1}(\tau)\| \leq \max\{\alpha, M_1, \varphi(1+c(\alpha))\} \equiv K_1, \quad t \geq \tau \geq 0.$$

Аналогично с помощью совокупности точек $\{t_i^2\}$, $i = 0,\ldots,l$, получаем при $\tau \geq t+1+c(\alpha)$ оценку

$$\|X(t)P_2\,X^{-1}(\tau)\| \leq \alpha^l\|X(t_l^2,\tau)\| \leq \alpha^l\varphi(\tau-t_l^2) \leq \varphi(1+c(\alpha)),$$

а при t,τ, $0 \leq \tau-t < 1+c(\alpha)$, справедливо неравенство $\|X(t)P_2X^{-1}(\tau)\| \leq \max\{\alpha, M_2, \varphi(1+c(\alpha))\} \equiv K_2$, $\tau \geq t \geq 0$, где $M_2 \equiv \max\limits_{0\leq t,\tau\leq 1+c(\alpha)} \|X(t)P_2X^{-1}(\tau)\|$.

Отсюда следует, что система (1) удовлетворяет условиям (4) и (5) обыкновенной дихотомии с проекторами P_1 и P_2 и с постоянной $K = \max\{K_1, K_2\}$.

В силу теоремы 1 система (1) обладает экспоненциальной дихотомией на R_+ с теми же проекторами P_1 и P_2. Теорема доказана.

Следствие. *Если система (1) с интегрально ограниченной матрицей коэффициентов обладает L^P-дихотомией на R_+ с числом $p > 0$, то она обладает также экспоненциальной дихотомией на R_+.*

Из установленного выше следует, что многие теоремы для линейных экспоненциально дихотомичных систем с интегрально ограниченной матрицей коэффициентов могут быть установлены как следствие соответствующих теорем для линейных систем с L^p-дихотомией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970.
2. *Coppel W.A.* Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations. Boston, 1965.
3. *Conti R.* // Finkcialaj Ekvacioj. 1966. V. 9. № 1. P. 23–26.
4. *Conti R.* // Colloquium Math. 1967. V. 18. № 1. P. 73–75.
5. *Conti R.* Linear Differential Equations and Control. New York, 1976.
6. *Изобов Н.А., Прохорова Р.А.* // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 5. С. 775–791.
7. *Изобов Н.А., Прохорова Р.А.* // Вестн. Бел. ун-та. Сер. 1. 1989. № 8. С. 39–44.
8. *Прохорова Р.А.* // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 12. С. 2090–2096.
9. *Coppel W.A.* Dichotomies in Stability Theory: Lect. Notes Math. 629. Berlin; Heidelberg; New York, 1978.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию
03.03.2000 г.