ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2001, том 37, № 8, с. 1118–1121

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.958:536.2

МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СО СМЕШАННЫМИ РАЗРЫВНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ПОВЕРХНОСТИ ПОЛУПРОСТРАНСТВА

© 2001 г. В. П. Козлов, П. А. Мандрик, Н. И. Юрчук

Пусть требуется найти решение дифференциального уравнения нестационарной $(\tau > 0)$ теплопроводности в цилиндрических координатах $(r, z > 0)$

$$\theta_{rr}(r,z,\tau) + r^{-1}\theta_r(r,z,\tau) + \theta_{zz}(r,z,\tau) = a^{-1}\theta_\tau(r,z,\tau) \tag{1}$$

для полупространства с однородным начальным условием

$$\theta(r,z,0) = 0 \tag{2}$$

и смешанных граничных условиях

$$\theta(r,0,\tau) = f_1(r)f_2(\tau), \quad 0 < r < R, \quad \theta_z(r,0,\tau) = 0, \quad R < r < \infty, \tag{3}$$

на поверхности $z = 0$ при наличии осевой симметрии $\theta_r(0,z,\tau) = 0$.

Если к задаче (1)–(3) применить интегральное преобразование Лапласа (L-преобразование) $\overline{\theta}(r,z,s) = L[\theta(r,z,\tau)] = \int_0^\infty \theta(r,z,\tau)\exp(-s\tau)d\tau$, $\operatorname{Re} s > 0$, то указанная задача примет вид

$$\overline{\theta}_{rr}(r,z,s) + r^{-1}\overline{\theta}_r(r,z,s) + \overline{\theta}_{zz}(r,z,s) = \sigma\overline{\theta}(r,z,s), \quad \sigma = s/a, \tag{4}$$

$$\overline{\theta}(r,0,s) = f_1(r)\overline{f}_2(s), \quad 0 < r < R, \quad \overline{\theta}_z(r,0,s) = 0, \quad R < r < \infty, \tag{5}$$

где

$$\overline{f}_2(s) = \int\limits_0^\infty f_2(\tau)\exp(-s\tau)d\tau. \tag{6}$$

Теорема. *В предположении, что интеграл (6) существует, действительная часть параметра s положительна* $(\operatorname{Re} s > 0)$, *а температура при $\sqrt{r^2+z^2} \to \infty$ остается ограниченной, решение искомой задачи в области L-изображений может быть записано в виде*

$$\overline{\theta}(r,0,s) = \frac{2\overline{f}_2(s)}{\pi}\exp(-R\sqrt{\sigma}\,)\int\limits_0^\infty \exp(-z\sqrt{p^2+\sigma}\,)\frac{pJ_0(pr)\,dp}{\sqrt{p^2+\sigma}}\int\limits_0^R \cos(t\sqrt{p^2+\sigma}\,)\left[\frac{d}{dt}\int\limits_0^t F_1(t,\mu)\right]dt +$$

$$+\frac{\overline{f}_2(s)}{\pi}\exp(-R\sqrt{\sigma}\,)\int\limits_0^\infty \exp(-z\sqrt{p^2+\sigma}\,)\frac{pJ_0(pr)\,dp}{\sqrt{p^2+\sigma}}\sum_{k=0}^\infty s^{(k+1)/2}\int\limits_0^R \cos(t\sqrt{p^2+\sigma}\,)\times$$

$$\times\left[\frac{d}{dt}\int\limits_0^t D_{k+1}(R,t,\mu)F_1(t,\mu)\,d\mu + \sum_{m=0}^{k+1}\int\limits_0^R C_m(x,t)\varphi_{k-m+1}(x)\,dx\right]dt, \tag{7}$$

где

$$C_m(x,t) = (1/m!)(\sqrt{a}\,)^{-m}\sin(m\pi/2)[(x-t)^{m-1} + (x+t)^{m-1}], \tag{8}$$

$$D_n(R,t,\mu) = \frac{2}{n!}(\sqrt{a}\,)^{-n}\sum_{j=0}^n \binom{n}{j}R^{n-j}\cos\left(\frac{j\pi}{2}\right)(\sqrt{t^2-\mu^2}\,)^j, \tag{9}$$

$F_1(t,\mu)=f_1(\mu)\mu/\sqrt{t^2-\mu^2}$, $\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}$ – *биномиальные коэффициенты,* $J_0(pr)$ – *функция Бесселя первого рода.*

Доказательство. Решение уравнения (4) имеет вид (см. [1])

$$\overline{\theta}(r,z,s)=\int\limits_0^\infty \overline{C}(p,s)\exp(-z\sqrt{p^2+\sigma}\,)J_0(pr)\,dp, \tag{10}$$

где $\overline{C}(p,s)$ – неизвестная функция, для определения которой из (5) получены парные интегральные уравнения в области L-изображений

$$\int\limits_0^\infty \overline{C}(p,s)J_0(pr)\,dp=f_1(r)\overline{f}_2(s),\quad 0<r<R,\quad \int\limits_0^\infty \overline{C}(p,s)\sqrt{p^2+\sigma}J_0(pr)\,dp=0,\quad R<r<\infty. \tag{11}$$

Если ввести новую неизвестную функцию $\overline{\varphi}(t,s)$ с помощью соотношения

$$\overline{C}(p,s)=\frac{p}{\sqrt{p^2+\sigma}}\int\limits_0^R \overline{\varphi}(t,s)\cos(t\sqrt{p^2+\sigma}\,)\,dt, \tag{12}$$

то подстановкой выражения (12) несложно показать, что второе парное интегральное уравнение из (11) выполняется автоматически согласно известному значению разрывного интеграла [2, с. 203]

$$\int\limits_0^\infty \frac{pJ_0(pr)}{\sqrt{p^2+\sigma}}\sin(x\sqrt{p^2+\sigma}\,)\,dp=\begin{cases}0, & x<r,\\ \cos(\sqrt{(x^2-r^2)\sigma}\,)(x^2-r^2)^{-1/2}, & x>r.\end{cases}$$

Подстановка соотношения (12) в первое из уравнений (11) приводит к интегральному уравнению

$$\int\limits_0^r \frac{\overline{\varphi}(t,s)}{\sqrt{r^2-t^2}}\exp(-\sqrt{(r^2-t^2)\sigma}\,)\,dt-\int\limits_r^R \frac{\overline{\varphi}(t,s)}{\sqrt{t^2-r^2}}\sin(\sqrt{(t^2-r^2)\sigma}\,)\,dt=f_1(r)\overline{f}_2(s),\quad 0<r<R, \tag{13}$$

с учетом известного значения разрывного интеграла [2, с. 203]

$$\int\limits_0^\infty \frac{pJ_0(pr)}{\sqrt{p^2+\sigma}}\cos(t\sqrt{p^2+\sigma}\,)\,dp=\begin{cases}\exp(-\sqrt{(r^2-t^2)\sigma}\,)(r^2-t^2)^{-1/2}, & t<r,\\ \sin(-\sqrt{(t^2-r^2)\sigma}\,)(t^2-r^2)^{-1/2}, & t>r.\end{cases}$$

Интегральное уравнение (13) в области L-изображений является основой для определения неизвестной функции $\overline{\varphi}(r,s)$. Преобразуем его к интегральному уравнению второго рода типа Фредгольма (но с параметром s). Для этого левую и правую части уравнения (13) разделим на $\overline{f}_2(s)\neq 0$ и умножим на интегрирующий множитель $2\mu\cos(\sqrt{(r^2-\mu^2)\sigma}\,)(r^2-\mu^2)^{-1/2}$, предварительно заменив в полученном уравнении r на μ. Проинтегрировав, далее, обе части уравнения по μ в пределах от 0 до r, имеем

$$\int\limits_0^r \frac{\cos(\sqrt{(r^2-\mu^2)\sigma}\,)}{\sqrt{(r^2-\mu^2)}}\mu\int\limits_0^\mu \frac{\overline{\varphi}^*(t,s)}{\sqrt{\mu^2-t^2}}\exp(-\sqrt{(\mu^2-t^2)\sigma}\,)\,dt\,d\mu-$$

$$-\int\limits_0^r \frac{\cos(\sqrt{(r^2-\mu^2)\sigma}\,)}{\sqrt{r^2-\mu^2}}\mu\int\limits_\mu^R \frac{\overline{\varphi}^*(t,s)}{\sqrt{t^2-\mu^2}}\sin(\sqrt{(t^2-\mu^2)\sigma}\,)\,dt\,d\mu=\int\limits_0^r \frac{f_1(\mu)\cos(\sqrt{(r^2-\mu^2)\sigma}\,)}{\sqrt{r^2-\mu^2}}\mu\,d\mu,\quad 0<r<R,$$

где

$$\overline{\varphi}^*(t,s)=\overline{\varphi}(t,s)/(s\overline{f}_2(s)). \tag{14}$$

Изменяя порядок интегрирования в левой части последнего уравнения и вычисляя получаемые интегралы, приходим к интегральному уравнению

$$\int\limits_0^r \overline{\varphi}^*(t,s)\,dt-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^R \overline{\varphi}^*(t,s)[\mathrm{si}((t+r)\sqrt{\sigma}\,)-\mathrm{si}((t-r)\sqrt{\sigma}\,)]\,dt=\frac{2}{\pi s}\int\limits_0^r \frac{f_1(\mu)\cos(\sqrt{(r^2-\mu^2)\sigma}\,)}{\sqrt{r^2-\mu^2}}\mu\,d\mu,\quad 0<r<R,$$

где $\mathrm{si}(x)$ – интегральный синус [3, с. 59], из которого, дифференцируя левую и правую части по r, получаем в результате интегральное уравнение в области L-изображений для определения функции $\overline{\varphi}^*(r,s)$:

$$\overline{\varphi}^*(r,s) - \frac{1}{\pi}\int_0^R \overline{\varphi}^*(t,s)\overline{K}(r,t,s)\,dt = \overline{F}(r,s), \quad 0<r<R, \tag{15}$$

где

$$\overline{K}(r,t,s) = \frac{\sin((t-r)\sqrt{\sigma})}{t-r} + \frac{\sin((t+r)\sqrt{\sigma})}{t+r}, \tag{16}$$

$$\overline{F}(r,s) = \frac{2}{s\pi}\frac{d}{dr}\int_0^r \frac{f_1(\mu)\cos(\sqrt{(r^2-\mu^2)\sigma})}{\sqrt{r^2-\mu^2}}\mu\,d\mu. \tag{17}$$

Заметим, что в работе [4] найдено решение (15)–(17) при $f_1(\mu)\equiv 1$, а здесь определим решение в общем виде задания функции $f_1(\mu)$.

Представим неизвестную аналитическую функцию $\overline{\varphi}^*(r,s)$ функциональным рядом

$$\overline{\varphi}^*(r,s) = \frac{1}{s}\exp(-R\sqrt{\sigma})\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(r)(\sqrt{s})^n, \quad 0<r<R, \tag{18}$$

где $\varphi_n(r)$ – некоторые вспомогательные функции. Определяемое выражением (16) ядро $\overline{K}(r,t,s)$ представим рядом:

$$\overline{K}(r,t,s) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(t,r)(\sqrt{s})^k,$$

а

$$\exp(R\sqrt{\sigma})\cos(\sqrt{(r^2-\mu^2)\sigma}) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} D_n(R,r,\mu)(\sqrt{s})^n,$$

где $C_k(t,r)$ и $D_n(R,r,\mu)$ определяются соответственно формулами (8) и (9).

Подставляя полученные выражения в уравнение (15) и производя соответствующие умножения рядов, приходим к равенству

$$\pi\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(r)(\sqrt{s})^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{d}{dr}\int_0^r D_n(R,r,\mu)f_1(\mu)\frac{\mu\,d\mu}{\sqrt{r^2-\mu^2}} + \sum_{m=0}^{n}\int_0^R C_m(t,r)\varphi_{n-m}(t)\,dt\right](\sqrt{s})^{n-2},$$

$0<r<R$, которое не является интегральным уравнением относительно $\varphi_{n-m}(t)$, так как очевидно, что $C_0(t,r)\equiv 0$.

Таким образом, для определения неизвестных вспомогательных функций $\varphi_n(r)$ нетрудно записать рекуррентную формулу

$$\varphi_n(r) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dr}\int_0^r D_n(R,r,\mu)\frac{f_1(\mu)\mu\,d\mu}{\sqrt{r^2-\mu^2}} + \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n}\int_0^R C_m(t,r)\varphi_{n-m}(t)\,dt, \quad 0<r<R,$$

из которой, в частности, имеем

$$\varphi_0(r) = \frac{2}{\pi}\frac{d}{dr}\int_0^r \frac{f_1(\mu)\mu\,d\mu}{\sqrt{r^2-\mu^2}}, \quad \varphi_1(r) = \frac{2R}{\pi\sqrt{a}}\frac{d}{dr}\int_0^r \frac{f_1(\mu)\mu\,d\mu}{\sqrt{r^2-\mu^2}} + \frac{4}{\pi^2\sqrt{a}}\int_0^R \frac{f_1(\mu)\mu\,d\mu}{\sqrt{R^2-\mu^2}},$$

и т.д.

Подставляя выражение для $\varphi_n(r)$ в формулу (18), можно найти значение функции-изображения $\overline{\varphi}^*(r,s)$, для которого существует обратное преобразование Лапласа, так как

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s}\exp(-R\sqrt{\sigma})\right] = \mathrm{erfc}\left(\frac{R}{2\sqrt{a\tau}}\right), \quad L^{-1}[s^{(k-1)/2}\exp(-R\sqrt{\sigma})] = \frac{1}{2^k\sqrt{\pi\tau^{k+1}}}\exp\left(-\frac{R^2}{4a\tau}\right)H_k\left(\frac{R}{2\sqrt{a\tau}}\right),$$

где $\operatorname{erfc}(x) = (2/\sqrt{\pi}) \int_x^\infty \exp(-t^2)\,dt$, $H_k(x)$ – многочлен Эрмита [3, с. 579]. Выполнив соответствующие подстановки, находим

$$\overline{\varphi}(r,s) = \frac{2\overline{f}_2(s)}{\pi} \exp(-R\sqrt{\sigma}) \frac{d}{dr} \int\limits_0^r \frac{f_1(\mu)\mu\,d\mu}{\sqrt{r^2-\mu^2}} +$$

$$+ \frac{\overline{f}_2(s)}{\pi} \exp(-R\sqrt{\sigma}) \sum_{k=0}^{\infty} s^{(k+1)/2} \left[\frac{d}{dr} \int\limits_0^r D_{k+1}(R,r,\mu) \frac{f_1(\mu)\mu\,d\mu}{\sqrt{r^2-\mu^2}} + \sum_{m=0}^{k+1} \int\limits_0^R C_m(t,r)\varphi_{k-m+1}(t)\,dt \right].$$

Тогда с учетом (12) и (10) можно записать решение искомой задачи в области L-изображений в виде (7), откуда, используя формулу обращения интеграла Лапласа [5, с. 205], находится оригинал $\theta(r,s,\tau)$. Тем самым теорема доказана.

Отметим, что если $f_1(\mu) = T_c - T_0 = \text{const} \neq 0$, где T_0 – начальная температура полупространства, T_c – температура на поверхности $z = 0$ в области круга $0 < r < R$, то внутренние интегралы в полученном решении (7) нетрудно вычислить

$$\int\limits_0^R \cos(t\sqrt{p^2+\sigma}) \left[\frac{d}{dt} \int\limits_0^t \frac{(T_c - T_0)\mu\,d\mu}{\sqrt{t^2-\mu^2}} \right] dt = (T_c - T_0) \frac{\sin(R\sqrt{p^2+\sigma})}{\sqrt{p^2+\sigma}},$$

$$\int\limits_0^R \cos(t\sqrt{p^2+\sigma}) \left[\frac{d}{dt} \int\limits_0^t D_{k+1}(R,t,\mu) \frac{(T_c - T_0)\mu\,d\mu}{\sqrt{t^2-\mu^2}} \right] dt =$$

$$= (T_c - T_0) \sum_{j=0}^{k+1} \sum_{n=0}^{j} \frac{(j+1)n!}{(k+1)!} \binom{k+1}{j} \binom{j}{n} B\left(1, \frac{j+1}{2}\right) \left(\frac{R}{\sqrt{a}}\right)^{k+1} \cos\left(\frac{j\pi}{2}\right) \frac{\sin(R\sqrt{p^2+\sigma} + n\pi/2)}{R^n(\sqrt{p^2+\sigma})^{n+1}},$$

где $B(\alpha,\beta)$ – бета-функция [6, с. 24].

В случае $s \to 0$ $(\tau \to \infty)$

$$\lim_{s\to 0} [s\overline{\varphi}(r,s)] = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dr} \int\limits_0^r \frac{f_1(\mu)\mu\,d\mu}{\sqrt{r^2-\mu^2}} \lim_{s\to 0} [s\overline{f}_2(s)]$$

и, в частности, при $f_1(\mu) = T_c - T_0$ имеем $\lim\limits_{s\to 0} [s\overline{\varphi}(r,s)] = (2/\pi)(T_c - T_0)$, что совпадает с аналогичными решениями, полученными в работах [7, 8], для соответствующего стационарного уравнения Лапласа со смешанными граничными условиями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Козлов В.П., Юрчук Н.И., Мандрик П.А.* // ИФЖ. 1998. Т. 71. № 4. С. 734–743.
2. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды (специальные функции). М., 1983.
3. Справочник по специальным функциям / Под ред. Абрамовица М., Стиган И. М., 1979.
4. *Козлов В.П., Юрчук Н.И., Мандрик П.А.* // Вестн. Бел. ун-та. Сер. 1. 1999. № 2. С. 37–42.
5. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М., 1969.
6. *Козлов В.П.* Двумерные осесимметричные нестационарные задачи теплопроводности. Минск, 1986.
7. *Уфлянд Я.С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л., 1977.
8. *Sneddon I.* Mixed boundary value problems in potential theory. Amsterdam, 1966.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию
25.01.2001 г.