ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2001, том 37, № 7, с. 867–879

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.63

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ АДДИТИВНЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ

© 2001 г. В. Н. Абрашин, А. А. Егоров, Н. Г. Жадаева

0. Введение. Данная работа продолжает исследования [1–4], связанные с применением многокомпонентного метода переменных направлений (ММПН) при решении стационарных краевых задач математической физики. Хорошо известно [5, 6], что большинство итерационных разностных схем основано на сведении решения стационарного уравнения с самосопряженным и положительно-определенным оператором к решению соответствующего эволюционного уравнения. При этом наибольший интерес представляют экономичные итерационные схемы, основанные на аддитивном представлении исходного оператора. К таким методам относится классический итерационный метод переменных направлений [5, 6], детально изученный для дискретных аналогов эллиптических краевых задач с разделяющимися переменными при двухкомпонентном разбиении. При p-компонентном разбиении ($p > 2$) используются экономичные факторизованные итерационные схемы [5, 6], требующие попарной коммутируемости операторов разбиения. Следует отметить, что обычный метод переменных направлений ($p = 2$) наиболее оптимален также в коммутируемом случае. Применение методов расщепления [7–9] для построения итерационных алгоритмов малоэффективно, так как при этом требуется существенное уменьшение итерационного параметра, что значительно ухудшает сходимость этих методов (здесь, как правило, устанавливается лишь факт сходимости без указания порядка скорости сходимости). К недостаткам перечисленных методов можно также отнести их невысокую степень распараллеленности вследствие последовательной организации вычислительной работы. Из параллельных экономичных разностных схем представляют интерес метод аддитивного усреднения суммарной аппроксимации [10, 11] и аналогичный многокомпонентный метод полной аппроксимации [12, 13], однако исследование их стабилизирующих свойств показало, что данные алгоритмы близки по своим качествам к классическим итерационным методам. Принадлежащие данному классу итерационные методы кластерного агрегирования [14] имеют те же недостатки. В [15] изучена сходимость таких итерационных методов без указания порядка скорости сходимости. В параллельных методах как суммарной, так и полной аппроксимации в качестве конечного результата выбирается специальным образом усредненное решение. Процедура усреднения для улучшения скорости сходимости может дать определенный эффект, однако этот вопрос не изучался. По эффективности указанные методы, по-видимому, сравнимы с аддитивными алгоритмами [7, 9, 16].

В настоящей работе предложены аддитивно-усредненные итерационные методы для решения стационарных задач математической физики, построенные на основе ММПН [12, 13]. Исследована скорость сходимости в случае произвольного числа как коммутируемых, так и некоммутируемых операторов разбиения. Найдены оптимальные значения итерационного параметра и получены соответствующие оценки для числа итераций. Приведены различные варианты применения предложенных итерационных процедур.

1. Постановка задачи и формулировка алгоритмов. Пусть требуется решить операторное уравнение первого рода

$$Ay = f \tag{1}$$

с линейным оператором $A : H \to H$, действующим в вещественном гильбертовом пространстве H со скалярным произведением (u, v) и нормой $\|u\| = \sqrt{(u,u)}$. Предположим, что A – самосопряженный и положительно-определенный оператор: $A = A^* \geq cE$, $c > 0$. Через H_A обозначим пространство H, снабженное скалярным произведением $(u,v)_A = (Au, v)$ и нормой $\|u\|_A = \sqrt{(Au,u)}$.

Как известно [5, 6], задача Коши для линейного эволюционного уравнения

$$dv/dt + Av = f, \quad t > 0, \quad v(0) = v_0 \tag{2}$$

имеет решение $v(t)$, которое при $t \to \infty$ сходится в H к решению уравнения (1). Для погрешности $v(t) - y$ имеет место неравенство

$$\|v(t) - y\| \le e^{-ct}\|v_0 - y\|. \tag{3}$$

Оценка (3) позволяет конструировать итерационные методы решения уравнения (1) с использованием различных разностных схем. Оптимальными с точки зрения скорости сходимости являются неявные схемы. Например, для чисто неявной разностной схемы

$$(y_{n+1} - y_n)/\tau + Ay_{n+1} = f, \quad t_n = n\tau, \quad y_0 = v_0,$$

аппроксимирующей задачу (2), справедлива оценка [6]

$$\|y_n - v\| \le e^{-ct_n + \beta t_n}\|y_0 - v\|, \quad \beta = O(\tau). \tag{4}$$

Поэтому естественным представляется разработка неявных экономичных итерационных методов, обладающих аналогичной скоростью сходимости и допускающих при этом эффективную реализацию всего алгоритма.

Пусть оператор A представим в аддитивном виде $A = \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha$, где операторы A_α обладают теми же свойствами, что и исходный оператор A, т.е.

$$A_\alpha = A_\alpha^*, \quad (A_\alpha y, y) \ge c_0\|y\|^2, \quad \alpha = \overline{1,p}, \quad c_0 > 0. \tag{5}$$

На основе абсолютно устойчивых разностных схем полной аппроксимации [12]

$$\frac{\widehat{y}_\alpha - y_\alpha}{\tau} + \sum_{\beta=1}^{\alpha} A_\alpha \widehat{y}_\beta + \sum_{\beta=\alpha+1}^{p} A_\beta y_\beta = f, \quad \alpha = \overline{1,p}, \tag{6}$$

$$\frac{\widehat{y}_\alpha - y_\alpha}{\tau} + \sigma A_\alpha(\widehat{y}_\alpha - y_\alpha) + \sum_{\beta=1}^{p} A_\beta y_\beta = f, \quad \alpha = \overline{1,p}, \tag{7}$$

будем строить итерационные методы, обладающие лучшими асимптотическими свойствами.

Рассмотрим модифицированные итерационные многокомпонентные разностные схемы:

$$\frac{\overset{s+1}{y}_\alpha - \overset{s}{\widetilde{y}}}{\tau} + \sum_{\beta=1}^{\alpha} A_\beta \overset{s+1}{y}_\beta + \sum_{\beta=\alpha+1}^{p} A_\beta \overset{s}{u}_\beta = f, \quad \alpha = \overline{1,p}, \tag{8}$$

$$\frac{\overset{s+1}{y}_\alpha - \overset{s}{\widetilde{y}}}{\tau} + \sigma A_\alpha(\overset{s+1}{y}_\alpha - \overset{s}{y}_\alpha) + \sum_{\beta=1}^{p} A_\beta \overset{s}{u}_\beta = f, \quad \alpha = \overline{1,p}, \tag{9}$$

где $\overset{s}{\widetilde{y}} = p^{-1}\sum_{\alpha=1}^{p} \overset{s}{y}_\alpha$, которые относятся к методам с последовательной и параллельной организацией вычислений соответственно.

2. Исследование сходимости. Детально остановимся на изучении стабилизирующих свойств параллельного итерационного метода (9). Суммируя соотношения (9) по $\alpha = \overline{1,p}$, получим равенство

$$\frac{\overset{s+1}{\widetilde{y}} - \overset{s}{\widetilde{y}}}{\tau} + \sigma^* \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha \overset{s+1}{y}_\alpha + (1 - \sigma^*) \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha \overset{s}{y}_\alpha = f, \tag{10}$$

где $\sigma^* = \sigma/p$. Выражение (10) аппроксимирует уравнение (2) при $\sigma^* > 1/2$ с первым порядком точности по τ, а при $\sigma^* = 1/2$ со вторым. Нетрудно заметить, что итерационный метод (10) имеет структуру, аналогичную разностной схеме с весами

$$(\widehat{y} - y)/\tau + \sigma^* A\widehat{y} + (1-\sigma^*)Ay = f. \tag{11}$$

Схема (11) для $\sigma^* = 0.5$ асимптотически устойчива при $\tau < 2/\sqrt{c\Delta}$, $c < A < \Delta$, $\Delta > 0$, а для $\sigma^* > 0.5$ при любых $\tau > 0$. При данных значениях σ схема (11) является, вообще говоря, наилучшей для построения итерационных методов решения уравнения (1). Представление (9) в виде (10) позволяет предположить, что уравнение (9) имеет асимптотические свойства, схожие с уравнением (11). В связи с этим значительный интерес представляют вопросы изучения скорости сходимости этого метода при различных значениях параметра τ, а также оптимального выбора итерационного параметра.

Схема с весами (11) относится к классу канонических двухслойных разностных схем [5, 17] и для исследования ее устойчивости и сходимости достаточно просто используется общая теория, построенная [6] с использованием двухслойной схемы $By_t + Ay = f$. Канонической формой аддитивно-усредненного алгоритма (9) является выражение (10). Оно лишь внешне напоминает схему (11) и является его полным аддитивным представлением. Однако использование (10) для решения уравнения (1) не представляется возможным. В данной работе будем рассматривать схему (9).

Отметим, что аддитивно-векторное представление допускают и другие экономичные методы. Так, например, обычная векторно-аддитивная схема [12, 13]

$$\frac{\overset{s+1}{y}_\alpha - \overset{s}{y}_\alpha}{\tau} + \sigma A_\alpha(\overset{s+1}{y}_\alpha - \overset{s}{y}_\alpha) + \sum_{\beta=1}^{p} A_\beta \overset{s}{u}_\beta = f, \quad \alpha = \overline{1,p}, \tag{12}$$

также имеет аддитивно-усредненную каноническую форму (10). Аналогичным свойством обладает итерационный метод кластерного агрегирования неизвестных [14, 15], который основан на представлении решения уравнения (1) в виде $y = \sum_{\alpha=1}^{p} G^{(\alpha)} y_\alpha$, $G^{(\alpha)} = (G^{(\alpha)})^* \geq 0$, $\alpha = \overline{1,p}$, $\widetilde{G} = \sum_{\alpha=1}^{p} G^{(\alpha)} > 0$. В этом случае уравнение (1) имеет аддитивное представление $\sum_{\alpha=1}^{p} AG^{(\alpha)} y_\alpha = f$ и алгоритм кластерного агрегирования принимает вид [14]

$$(\mu E + AG^{(\alpha)})\frac{\overset{s+1}{y}_\alpha - \overset{s}{y}_\alpha}{\tau} + \sum_{\beta=1}^{p} AG^{(\beta)} \overset{s}{u}_\beta = f, \quad \alpha = \overline{1,p}. \tag{13}$$

Пусть $\overset{s}{w}_\alpha = A^{-1/2} \overset{s}{y}_\alpha$. Тогда из (13) получим уравнение

$$(\mu E + \widetilde{A}^{(\alpha)})\frac{\overset{s+1}{w}_\alpha - \overset{s}{w}_\alpha}{\tau} + \sum_{\beta=1}^{p} \widetilde{A}^{(\beta)} \overset{s}{w}_\beta = f, \quad \alpha = \overline{1,p}, \tag{14}$$

где $\widetilde{A}^{(\alpha)} = A^{1/2} G^{(\alpha)} A^{1/2}$. Аддитивно-усредненную форму метода (13), соответствующую (10), можно представить следующим образом:

$$\frac{\overset{s+1}{\widetilde{w}}_\alpha - \overset{s}{\widetilde{w}}_\alpha}{\tau^*} + \widetilde{\sigma}^* \sum_{\alpha=1}^{p} \widetilde{A}^{(\alpha)} \overset{s+1}{w}_\alpha + (1-\widetilde{\sigma}^*) \sum_{\alpha=1}^{p} \widetilde{A}^{(\alpha)} \overset{s}{w}_\alpha = \widetilde{f},$$

где $\tau^* = \mu^{-1}\tau$, $\widetilde{\sigma}^* = 1/\tau$, $\widetilde{f} = A^{-1/2} f$. Очевидно, что если в (12) положить $\tau = \mu\tau^*$, $\sigma = 1/\tau$, $A_\alpha = \widetilde{A}^{(\alpha)}$, то схемы (12) и (13) совпадут по своим свойствам и все результаты, полученные в [18–22] и др., справедливы и для разностной схемы (13). В частности, в [20, 21] доказана сходимость итерационного процесса (12) без указания порядка скорости сходимости при $\sigma \geq p/2$.

Схема (13), эквивалентная разностной схеме (12), согласно [14, 15, 22], сходится (также без указания порядка скорости сходимости) при $0 < \tau < 2/p$, а так как в (12) $\tau = \sigma^{-1}$, то $\sigma > p/2$. Таким образом, исследование сходимости итерационных разностных схем (12) и (14) можно проводить по одной и той же методике. Однако алгоритмы (12) и (13) конструктивно совершенно разные. Возможно, представление решения в аддитивном виде $y = \sum_{\alpha=1}^{p} G^{(\alpha)} y_\alpha$ и может дать определенный эффект, однако в настоящее время этот вопрос не изучен.

Для решения уравнения (1) могут быть использованы последовательный и параллельный итерационные методы кластерного агрегирования уравнений [14]:

$$(\mu E + A^{(\alpha)})(y_{s+\alpha/p} - y_{s+(\alpha-1)/p})/\tau + A^{(\alpha)} y_{s+(\alpha-1)/p} = f_\alpha, \quad \alpha = \overline{1,p}, \tag{15}$$

$$(\mu E + A^{(\alpha)})(\widetilde{y}_{s+\alpha/p} - y_s)/\tau + A^{(\alpha)} y_s = f_\alpha, \quad \alpha = \overline{1,p}, \quad y_{s+1} = \frac{1}{p}\sum_{\alpha=1}^{p} \widetilde{y}_{s+\alpha/p}. \tag{16}$$

Итерационный метод (15) исследован в [9], а метод (16) – в [10, 11, 16]. Следует заметить, что данные итерационные методы малоэффективны, хотя просты в реализации. Итерационный параметр $\tau^* = \mu^{-1}\tau$, как правило, обеспечивает сходимость метода к решению уравнения (1) со скоростью ε, при этом τ^* должно быть эквивалентно ε [9]. Как следствие, скорость сходимости этих методов достаточно низкая. Методы (12) и (13) даже при условии $A_\alpha > 0$, $\widetilde{A}^{(\alpha)} > 0$ также имеют невысокую скорость сходимости (это, по-видимому, и объясняет отсутствие порядка скорости сходимости). В (12), (13) каждая из компонент сходится достаточно быстро друг к другу, но к одному значению (т.е. к исходному решению сходимость медленная), при этом усреднение решения по компонентам не дает улучшения результата. Использование в качестве итерационной разностной схемы алгоритма (9) может изменить эту ситуацию. Усреднение решения в первом слагаемом выражения (9) обеспечивает быструю сходимость всех компонент к усредненному решению и сходимость этих же компонент друг к другу и, очевидно, к решению исходного уравнения (1).

Модифицируя алгоритм (13), его можно записать в виде, аналогичном (9):

$$\mu \frac{\overset{s+1}{w}_\alpha - \overset{s}{\widetilde{w}}}{\tau} + \frac{\widetilde{A}^{(\alpha)}(\overset{s+1}{w}_\alpha - \overset{s}{w}_\alpha)}{\tau} + \sum_{\beta=1}^{p} \widetilde{A}^{(\beta)} \overset{s}{w}_\beta = f, \quad \alpha = \overline{1,p}. \tag{17}$$

Наряду с (9) рассмотрим и разностную схему (17), в некотором смысле трактуемую как алгоритм декомпозиции по направлениям, в которой решение представляется в виде $\overset{s}{y} = \sum_{\alpha=1}^{p} G^{(\alpha)} \overset{s}{y}_\alpha$. Заметим, что поскольку при соответствующем выборе итерационных параметров схемы (9) и (17) совпадают, то для исследования сходимости метода (17) достаточно детально изучить итерационный метод (9).

Подробно проведем доказательство сходимости итерационного процесса (9) при $\sigma = p$ ($\sigma^* = 1$). Отметим, что при исследовании сходимости обычного метода переменных направлений или различных алгоритмов факторизованных итерационных схем используется верхняя граница спектра операторов A, A_α. Ниже будет показано, что в случае коммутируемых операторов разбиения сходимость метода (9) устанавливается с учетом только нижней границы спектра.

Умножим уравнение (9) скалярно на $\tau A_\alpha \overset{s+1}{y}_{\alpha t}$ и просуммируем по $\alpha = \overline{1,p}$:

$$2\sum_{\alpha=1}^{p} (\overset{s+1}{y}_\alpha - \overset{s}{\widetilde{y}}, A_\alpha \overset{s+1}{y}_{\alpha t}) + 2p\tau^2 \sum_{\alpha=1}^{p} \|A_\alpha \overset{s+1}{y}_{\alpha t}\|^2 - \tau^2 \left\| \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha \overset{s+1}{y}_{\alpha t} \right\|^2 + \|r(s+1)\|^2 = \|r(s)\|^2, \tag{18}$$

где $r(s) = \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha \overset{s}{y}_\alpha - f$. Преобразуем выражение в левой части равенства (18). Обозначим $\overset{s}{v}{}^{(\alpha,\beta)} = \overset{s}{y}_\alpha - \overset{s}{y}_\beta$. Тогда нетрудно убедиться в справедливости тождества

$$\sum_{\alpha=1}^{p} (\overset{s+1}{y}_\alpha - \overset{s}{\widetilde{y}}, A_\alpha \overset{s+1}{y}_{\alpha t}) = \tau \sum_{\alpha=1}^{p} (A_\alpha \overset{s+1}{y}_{\alpha t}, \overset{s+1}{y}_{\alpha t}) + \frac{1}{p} \sum_{\alpha,\beta=1,\ \alpha>\beta}^{p} (\overset{s}{v}{}^{(\alpha,\beta)}, A_\alpha \overset{s+1}{y}_{\alpha t} - A_\beta \overset{s+1}{y}_{\beta t}). \tag{19}$$

Поскольку $A_\alpha \overset{s+1}{y}_{\alpha t} - A_\beta \overset{s+1}{y}_{\beta t} = -p^{-1}\tau^{-2}\overset{s+1}{v}{}^{(\alpha,\beta)}$, то второе слагаемое в правой части (19) равно выражению

$$-p^{-2}\tau^{-2}\sum_{\alpha,\beta=1,\alpha>\beta}^{p}(\overset{s}{v}{}^{(\alpha,\beta)}, \overset{s+1}{v}{}^{(\alpha,\beta)}) = -0.25p^{-2}\tau^{-2}(\tau^2\|\overset{s+1}{v}_t\|_3^2 - \|\overset{s+1}{v}\|_3^2 - \|\overset{s}{v}\|_3^2),$$

где $\|\overset{s}{v}\|_3^2 = \sum_{\alpha,\beta=1,\alpha>\beta}^{p}(\overset{s}{v}{}^{(\alpha,\beta)}, \overset{s}{v}{}^{(\alpha,\beta)})$. Кроме того, из равенства

$$p\tau^2\sum_{\alpha=1}^{p}\|A_\alpha \overset{s+1}{y}_{\alpha t}\|^2 - \tau^2\left\|\sum_{\alpha=1}^{p}A_\alpha \overset{s+1}{y}_{\alpha t}\right\|^2 = \tau^2\sum_{\alpha,\beta=1,\ \alpha>\beta}^{p}\|A_\alpha \overset{s+1}{y}_{\alpha t} - A_\beta \overset{s+1}{y}_{\beta t}\|^2 = p^{-2}\tau^{-2}\|\overset{s+1}{v}\|_3^2$$

вытекает оценка $p\tau^2\sum_{\alpha=1}^{p}\|A_\alpha \overset{s+1}{y}_{\alpha t}\|^2 - 0.5\tau^2\|\sum_{\alpha=1}^{p}A_\alpha \overset{s+1}{y}_{\alpha t}\|^2 \geq p^{-2}\tau^{-2}\|\overset{s+1}{v}\|_3^2$. С учетом проведенных выше преобразований и свойств операторов A_α из (18) получаем

$$2c_0\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\|\overset{s+1}{y}_{\alpha t}\|^2 + p^{-2}\tau^{-2}\|\overset{s+1}{v}\|_3^2 + p^{-2}\|\overset{s+1}{v}_t\|_3^2 + \|r(s+1)\|^2 \leq p^{-2}\tau^{-2}\|\overset{s}{v}\|_3^2 + \|r(s)\|^2. \tag{20}$$

В силу равенства $\sum_{\alpha=1}^{p}\|\overset{s+1}{y}_{\alpha t}\|^2 = p\|\overset{s+1}{\tilde{y}}_t\|^2 + p^{-1}\|\overset{s+1}{v}_t\|_3^2$ и вытекающего из (10) при $\sigma^* = 1$ очевидного свойства $\overset{s+1}{\tilde{y}}_t = (\overset{s+1}{\tilde{y}} - \overset{s}{\tilde{y}})/\tau = -r(s+1)$ для первого слагаемого (20) получим выражение

$$c_0\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\|\overset{s+1}{y}_{\alpha t}\|^2 = c_0\tau(p\|r(s+1)\|^2 + p^{-1}\|\overset{s+1}{v}_t\|_3^2), \tag{21}$$

с учетом которого, представив константу c_0 в виде суммы $c_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \mathrm{const} > 0$, из (20) выводим неравенство

$$0.5(1 + 2\varepsilon_1 p\tau)\|r(s+1)\|^2 + \varepsilon_2\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\|\overset{s+1}{y}_{\alpha t}\|^2 + (0.5p^{-2} + \varepsilon_1 p^{-1}\tau)\|\overset{s+1}{v}_t\|_3^2 + 0.5p^{-2}\tau^{-2}\|\overset{s+1}{v}\|_3^2 \leq$$

$$\leq 0.5p^{-2}\tau^{-2}\|\overset{s}{v}\|_3^2 + 0.5\|r(s)\|^2. \tag{22}$$

Для оценки величины $\sum_{\alpha=1}^{p}\|\overset{s+1}{y}_{\alpha t}\|^2$ воспользуемся тождеством $\overset{s+1}{y}_{\alpha t} = -(p\tau A_\alpha \overset{s+1}{y}_{\alpha t} + p^{-1}\tau^{-1}\sum_{\beta=1}^{p}(\overset{s}{y}_\alpha - \overset{s}{y}_\beta) + r(s))$, которое следует непосредственно из (9). Возводя последнее равенство скалярно в квадрат и суммируя по $\alpha = \overline{1,p}$, получим следующее соотношение:

$$\sum_{\alpha=1}^{p}\|\overset{s+1}{y}_{\alpha t}\|^2 = p^2\tau^2\sum_{\alpha=1}^{p}\|A_\alpha \overset{s+1}{y}_{\alpha t}\|^2 + p^{-2}\tau^{-2}\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|\sum_{\beta=1}^{p}(\overset{s}{y}_\alpha - \overset{s}{y}_\beta)\right\|^2 + p\|r(s)\|^2 -$$

$$-2\sum_{\alpha,\beta=1,\alpha>\beta}^{p}(\overset{s}{v}{}^{(\alpha,\beta)}, A_\alpha \overset{s+1}{y}_{\alpha t} - A_\beta \overset{s+1}{y}_{\beta t}) + 2p\tau\sum_{\alpha=1}^{p}(A_\alpha \overset{s+1}{y}_{\alpha t}, r(s)) + 2p^{-1}\tau^{-1}\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\sum_{\beta=1}^{p}(\overset{s}{y}_\alpha - \overset{s}{y}_\beta), r(s)\right).$$

Так как

$$p^2\tau^2\sum_{\alpha=1}^{p}\|A_\alpha \overset{s+1}{y}_{\alpha t}\|^2 + 2p\tau\sum_{\alpha=1}^{p}(A_\alpha \overset{s+1}{y}_{\alpha t}, r(s)) + p\|r(s)\|^2 =$$

$$= p^2\tau^2\sum_{\alpha=1}^{p}\|A_\alpha \overset{s+1}{y}_{\alpha t}\|^2 - p\tau^2\left\|\sum_{\alpha=1}^{p}A_\alpha \overset{s+1}{y}_{\alpha t}\right\|^2 + p\|r(s+1)\|^2 = p^{-1}\tau^{-2}\|\overset{s+1}{v}\|_3^2 + p\|r(s+1)\|^2,$$

$$-2\sum_{\alpha,\beta=1,\ \alpha>\beta}^{p}(\overset{s}{v}{}^{(\alpha,\beta)}, A_\alpha \overset{s+1}{y}_{\alpha t} - A_\beta \overset{s+1}{y}_{\beta t}) = 2p^{-1}\tau^{-2}\sum_{\alpha,\beta=1,\ \alpha>\beta}^{p}(\overset{s}{v}{}^{(\alpha,\beta)}, \overset{s+1}{v}{}^{(\alpha,\beta)}) =$$

$$= p^{-1}\tau^{-2}(\|\overset{s+1}{v}\|_3^2 + \|\overset{s}{v}\|_3^2 - \tau^2\|\overset{s+1}{v}_t\|_3^2), \quad 2p^{-1}\tau^{-1}\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\sum_{\beta=1}^{p}(\overset{s}{y}_\alpha - \overset{s}{y}_\beta), r(s)\right) = 0,$$

то из неравенства (22) окончательно имеем оценку

$$(1+2c_0p\tau)\|r(s+1)\|^2 + p^{-2}(1+2p(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\tau)\|\overset{s+1}{v}_t\|_3^2 + p^{-2}\tau^{-2}(1+4\varepsilon_2 p\tau)\|\overset{s+1}{v}\|_3^2 \le$$

$$\le \|r(s)\|^2 + p^{-2}\tau^{-2}\|\overset{s}{v}\|_3^2, \tag{23}$$

из которой при $\varepsilon_2 = 0.5c_0$ вытекает

Лемма 1. *Для итерационного метода (9) при $\sigma = p$ имеет место неравенство*

$$Q(\overset{s}{y}) \le q^{-s}Q(\overset{\circ}{y}), \tag{24}$$

где $Q(\overset{s}{y}) = \|r(s)\|^2 + p^{-2}\tau^{-2}\|\overset{s}{v}\|_3^2$, $q = 1 + 2c_0p\tau$.

Из леммы 1, вообще говоря, еще не следует сходимость итерационной схемы (9) к решению задачи (1) в силу того, что невязка метода $r(s) = \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha \overset{s}{y}_\alpha - f$ не согласована с естественной невязкой $A\overset{s}{y} - f$, характерной для классических итерационных методов. Для получения оценки сходимости метода (9) введем функцию погрешности $\overset{s}{\rho} = \overset{s}{\widetilde{y}} - y$. Используя тождество

$$\overset{s}{y}_\alpha = \overset{s}{\widetilde{y}} + \frac{1}{p}\sum_{\beta=1}^{p}(\overset{s}{y}_\alpha - \overset{s}{y}_\beta) = \overset{s}{\widetilde{y}} + \frac{1}{p}\sum_{\beta=1}^{p}\overset{s}{v}{}^{(\alpha,\beta)}$$

и выражение для невязки $r(s)$, получим равенство

$$A\overset{s}{\rho} = -\sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha\left(\frac{1}{p}\sum_{\beta=1}^{p}\overset{s}{v}{}^{(\alpha,\beta)}\right) + r(s), \tag{25}$$

откуда следует, что $\overset{s}{\rho} = -\sum_{\alpha=1}^{p} B_\alpha(p^{-1}\sum_{\beta=1}^{p}\overset{s}{v}{}^{(\alpha,\beta)}) + A^{-1}r(s)$, где $B_\alpha = A^{-1}A_\alpha = (E + \sum_{\beta=1,\ \beta\ne\alpha}^{p} A_\alpha^{-1}A_\beta)^{-1}$. При условии попарной коммутируемости операторов A_α, $\alpha = \overline{1,p}$, очевидно, норма $\|B_\alpha\| < 1$ и $\|\overset{s}{\rho}\| \le c^{-1}\|r(s)\| + \|\overset{s}{v}\|_3$. Далее, из (24) имеем неравенства

$$\|\overset{s}{v}\|_3 \le p\tau(q^{-s}Q(\overset{\circ}{y}))^{1/2}, \quad c^{-1}\|r(s)\| \le c^{-1}(q^{-s}Q(\overset{\circ}{y}))^{1/2}, \tag{26}$$

складывая которые, приходим к оценке $\|\overset{s}{\rho}\| \le (p\tau + c^{-1})q^{-s/2}(Q(\overset{\circ}{y}))^{1/2}$.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (5) и операторы A_α, $\alpha = \overline{1,p}$, попарно коммутируемы. Тогда итерационный ММПН (9) при $\sigma = p$ сходится к решению уравнения (1) и для его скорости сходимости справедлива оценка*

$$\|\overset{s}{\widetilde{y}} - y\| \le (p\tau + c^{-1})(1 + 2c_0p\tau)^{-s/2}(\|r(0)\| + p^{-1}\tau^{-1}\|\overset{\circ}{v}\|_3). \tag{27}$$

Итерационный метод (9) сходится при любом $\tau > 0$, но оптимальное значение итерационного параметра, как следует из (26), достигается при $\tau = \tau_0 \sim p^{-1}c^{-1}$. Таким образом, скорость сходимости итерационного ММПН зависит только от нижней границы спектра операторов A, A_α, т.е. оценка (27) аналогична оценке скорости сходимости (4) для чисто неявной разностной схемы.

Из теоремы 1 нетрудно получить оценку числа итераций s, необходимых для уменьшения начальной ошибки в $1/\varepsilon$ раз. Для этого достаточно потребовать, чтобы $(p\tau + c^{-1})(1+2c_0p\tau)^{-s/2} \le \varepsilon$, и учесть, что $c = pc_0$. Тогда при $\tau = p^{-1}c^{-1}$ имеем

$$s \ge s_0(\varepsilon) = 2(\ln(2c^{-1}/\varepsilon))/\ln(1+2p^{-1}). \tag{28}$$

В случае некоммутируемых операторов A_α для оценки скорости сходимости итерационного ММПН можно использовать следующее утверждение, вытекающее из соотношения (25).

Теорема 2. *Пусть выполняются условия (5). Тогда при $\sigma = p$ итерационный метод (9) сходится и для его погрешности справедлива оценка*

$$\|\overset{s}{\rho}\|_A \le c^{-1/2}\|r(s)\| + \left(\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|\frac{1}{p}\sum_{\beta=1}^{p}\overset{s}{v}{}^{(\alpha,\beta)}\right\|_{A_\alpha}^2\right)^{1/2} \le (c^{-1/2} + \tau\Delta^{1/2})q^{-s/2}(Q(\overset{\circ}{y}))^{1/2}, \tag{29}$$

где $A_\alpha < \Delta_0$, $\Delta = p\Delta_0$.

В оценку (29) входит слагаемое $\tau\Delta^{1/2}$, содержащее верхнюю границу спектра оператора A. Это приводит к необходимости предварительной дискретизации исходной задачи и согласования итерационного параметра и шага пространственной сетки: $\tau \sim c^{-1/2}\Delta^{-1/2}$. Оценка для числа итераций в этом случае принимает вид $s \ge s_0(\varepsilon) = 2(\ln(2c^{-1/2}/\varepsilon))/\ln(1+2c^{1/2}\Delta^{-1/2})$. Полученное условие сходимости совпадает с ограничением на τ в классическом методе переменных направлений, при этом зависимость числа итераций метода от шага дискретизации h определяется соотношением $s_0(\varepsilon) = O(h^{-1})$.

Заметим, что в случае $\sigma > p/2$ $(\sigma^* > 0.5)$ справедливость теорем 1, 2 сохраняется.

Для $\sigma = p/2$ сходимость итерационного процесса (9) удается доказать только для ограниченных операторов A_α, т.е. для разностных или проекционно-разностных схем. Справедлива

Лемма 2. *Пусть $\sigma = p/2$, $0.25c_0\mu_0p^2\tau^2 \ge \mu_1\Delta^{-1}$ $(0.25c_0\mu_0p^2\tau^2 \le \mu_1\Delta^{-1})$, $\mu_0 + \mu_1 = 1$, μ_0, μ_1 – положительные константы, $\Delta > A_\alpha$, $\alpha = \overline{1,p}$. Тогда для итерационного метода (9) справедлива оценка вида (24), в которой*

$$Q(\overset{s}{y}) = \|r(s)\|^2 + p^{-2}\tau^{-2}\|\overset{s}{v}\|_3^2, \quad q = \min\{1+4\gamma, 1+4\mu_0p\tau\}, \quad \gamma = \mu_1p^{-1}\Delta^{-1}\tau$$

$$(q = \max\{1/(1+\gamma\tau), 1/(1+c_0p\tau)\}, \quad \gamma = c_0\mu_0p).$$

Из леммы 2 следуют теоремы, аналогичные теоремам 1, 2, однако оценка числа итераций для случая как коммутируемых, так и некоммутируемых операторов разбиения подобна соответствующей оценке для классического метода переменных направлений. Увеличение скорости сходимости метода здесь можно достичь только за счет оптимизации выбора итерационных параметров.

Исследуем алгоритм кластерного агрегирования (13) в модификации (17), где в качестве решения на каждой итерации будем брать выражение $\overset{s}{y} = \sum_{\alpha=1}^{p} G^{(\alpha)}\overset{s}{y}_\alpha$. Для погрешности метода (17) $\overset{s}{z}_\alpha = \overset{s}{w}_\alpha - w_\alpha$ справедливо равенство

$$\mu\,\frac{\overset{s+1}{z}_\alpha - \overset{s}{\tilde z}}{\tau} + \frac{\widetilde{A}^{(\alpha)}(\overset{s+1}{z}_\alpha - \overset{s}{z}_\alpha)}{\tau} + \sum_{\beta=1}^{p}\widetilde{A}^{(\beta)}\overset{s}{z}_\beta = 0, \quad \alpha = \overline{1,p}. \tag{30}$$

Тогда для уравнения (30) имеет место лемма 1, в которой $Q(\overset{s}{y})$ следует заменить на $Q^*(\overset{s}{z}) = \|r^*(z)\|^2 + p^{-2}\tau^{-2}\|\overset{s}{v}_*\|_3^2$, где $\|\overset{s}{v}_*\|_3^2 = \sum_{\alpha,\beta=1,\ \alpha>\beta}^{p}(\overset{s}{v}{}_*^{(\alpha,\beta)}, \overset{s}{v}{}_*^{(\alpha,\beta)})$, $\overset{s}{v}{}_*^{(\alpha,\beta)} = \overset{s}{z}_\alpha - \overset{s}{z}_\beta$, $r^*(s) = \sum_{\alpha=1}^{p}\widetilde{A}^{(\alpha)}\overset{s}{z}_\alpha = A(\overset{s}{y} - y)$. При этом норма $Q^*(\overset{s}{z})$ в лемме 1 становится естественной и обеспечивает высокую скорость сходимости метода (17).

Отличительной особенностью итерационного метода (9) является то, что для его сходимости не требуется положительная определенность всех операторов разбиения A_α, т. е. некоторые из них могут быть неотрицательными. Пусть $A_{\alpha_0} \ge c_0 > 0$, где в качестве α_0 можно взять одно из значений α, для которого оператор A_α является положительно-определенным. Тогда из (18) можно получить неравенство

$$2\tau(A_{\alpha_0}\overset{s+1}{y}_{\alpha_0 t}, \overset{s+1}{y}_{\alpha_0 t}) + p^{-2}\tau^{-2}\|\overset{s+1}{v}\|_3^2 + p^{-2}\|\overset{s+1}{v}_t\|_3^2 + \|r(s+1)\|^2 \le p^{-2}\tau^{-2}\|\overset{s}{v}\|_3^2 + \|r(s)\|^2. \quad (31)$$

Поскольку $y_{\alpha_0}^2 = y_\alpha^2 - 2y_\alpha(y_\alpha - y_{\alpha_0}) + (y_\alpha - y_{\alpha_0})^2$, то, суммируя это равенство по $\alpha = \overline{1,p}$ и применяя ε-неравенство, находим оценку

$$\tau(A_{\alpha_0}\overset{s+1}{y}_{\alpha_0 t}, \overset{s+1}{y}_{\alpha_0 t}) \ge c_0 p^{-1}\tau\left((1-\varepsilon)\sum_{\alpha=1}^{p}\|\overset{s+1}{y}_{\alpha t}\|^2 + \left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)\sum_{\alpha=1}^{p}\|\overset{s+1}{v}{}_t^{(\alpha,\alpha_0)}\|^2\right), \quad 0<\varepsilon<1,$$

с учетом которой из (31) имеем

$$2c_1\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\|\overset{s+1}{y}_{\alpha t}\|^2 + p^{-2}\tau^{-2}\|\overset{s+1}{v}\|_3^2 + (p^{-2} + 2c_0p^{-1}(1-1/\varepsilon)\tau)\|\overset{s+1}{v}_t\|_3^2 + \|r(s+1)\|^2 \le$$

$$\le p^{-2}\tau^{-2}\|\overset{s}{v}\|_3^2 + \|r(s)\|^2. \quad (32)$$

Дальнейшее повторяет доказательство леммы 1, где в качестве неравенства (20) выступает оценка (32).

3. Примеры применения итерационного ММПН. Рассмотрим первую краевую задачу для эллиптического уравнения

$$Lu = -\sum_{\alpha,\beta=1}^{p}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right) = f(x), \quad x\in G, \quad u(x)=0, \quad x\in\partial G, \quad (33)$$

где $G = (x_1,\dots,x_p)$ – односвязная область с достаточно гладкой границей ∂G, L – эллиптический оператор, для которого выполняются условия

$$c_1\sum_{\alpha=1}^{p}\xi_\alpha^2 \le \sum_{\alpha,\beta=1}^{p}k_{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \le c_2\sum_{\alpha=1}^{p}\xi_\alpha^2, \quad 0\ne\xi=(\xi_1,\dots,\xi_p)\in G.$$

Предполагается также, что известные функции $f(x)$, $k_{\alpha\beta}(x)$ таковы, что решение задачи (33) существует, единственно и обладает гладкостью, необходимой для корректности рассматриваемых ниже методов.

Возможности применения экономичных итерационных методов для решения задач такого типа весьма ограничены. Если $Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u$, $L_\alpha u = -(\partial/\partial x_\alpha)(k_\alpha(x)\,\partial u/\partial x_\alpha)$, то в случае разделяющихся переменных (метод Фурье) можно использовать алгоритм (9) для решения как непосредственно дифференциальной задачи, так и для ее разностного аналога. Количество итераций здесь зависит только от требуемой точности и корректной аппроксимации. В некоммутируемом случае применять данный класс методов можно лишь в дискретном варианте. В частности, теорема 2 устанавливает сходимость метода (9) в зависимости от верхней границы спектра исходного оператора, что существенно влияет на его скорость сходимости.

Проиллюстрируем сказанное выше на примере трехмерной задачи Дирихле для уравнения Пуассона в единичном кубе

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = -f(x), \quad x\in G, \quad u(x)=g(x), \quad x\in\Gamma. \quad (34)$$

Для приближенного решения соответствующей разностной задачи Дирихле вида (1) использовался трехкомпонентный итерационный метод переменных направлений (9). Расчеты проводились при заданной точности $\varepsilon = 10^{-4}$. Итерации регулировались условием $\|\overset{s}{\rho}\| \le c^{-1}\|r(s)\| +$

$+\|\overset{s}{v}\|_3 \leq \varepsilon$. Вычисления показали, что при малых значениях параметра τ норма разности компонент метода $\|\overset{s}{v}\|_3$ мала, но невязка $\|r(s)\|$ достаточно велика вследствие относительно большого значения коэффициента сжатия $1/q$. При больших значениях τ наблюдается обратная ситуация, т.е. норма невязки мала ($1/q$ мало), а разность компонент велика. Минимальное число итераций достигается для значения $\tau = \tau_0 \sim 0.025$, при этом $s_0(\varepsilon) \sim 13$. С увеличением количества точек дискретизации N число итераций, необходимых для достижения заданной точности ε, не возрастает в соответствии с оценкой (28). Таким образом, скорость сходимости итерационного ММПН (9) зависит только от нижней границы спектра оператора A и заданной точности и не зависит от шага пространственной сетки. Если сравнивать метод (9) с классическим методом переменных направлений в двумерном варианте или методом факторизации в случае коммутируемых операторов разбиения, то скорость сходимости этих методов зависит от шага пространственной дискретизации даже при оптимальном выборе итерационных параметров.

Рассмотрим теперь применение метода (9) для разностного аналога уравнения (34) в случае некоммутируемых операторов A_α (например, для уравнения с переменными коэффициентами). Как уже отмечено, теорема 2 позволяет эффективно вычислять в процессе итераций норму погрешности метода $\|\overset{s}{\rho}\|_A = \|\overset{s}{\widetilde{y}} - y\|_{W_2^1}$. Условие $\|\overset{s}{\rho}\|_A \leq \varepsilon$ использовалось в качестве критерия для окончания процесса итераций. Расчеты проводились на квадратной сетке для $\varepsilon = h^2$ (см. таблицу).

Таблица 1

$h = 0.1$				$h = 0.03$			
τ	s	$\|r(s)\|$	$\|v\|_3$	τ	s	$\|r(s)\|$	$\|v\|_3$
0.003	85	$4.9 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-8}$	0.003	115	$3.7 \cdot 10^{-3}$	$2.3 \cdot 10^{-7}$
0.008	35	$4.0 \cdot 10^{-2}$	$3.5 \cdot 10^{-6}$	0.005	75	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$4.4 \cdot 10^{-5}$
0.02	20	$7.5 \cdot 10^{-3}$	$3.0 \cdot 10^{-4}$	0.008	69	$6.5 \cdot 10^{-5}$	$1.1 \cdot 10^{-5}$
0.1	33	$6.3 \cdot 10^{-4}$	$5.7 \cdot 10^{-4}$	0.02	94	$1.7 \cdot 10^{-5}$	$1.3 \cdot 10^{-5}$
0.5	114	$2.0 \cdot 10^{-5}$	$6.5 \cdot 10^{-4}$	0.04	133	$5.0 \cdot 10^{-6}$	$1.4 \cdot 10^{-5}$

Из таблицы видно, что минимальное число итераций s_0 достигается при некотором значении $\tau = \tau_0$ (например, при $h = 0.1$ оно равно $\tau_0 \approx 0.02$), причем s_0 тем больше, чем меньше шаг дискретизации. Данная ситуация довольно точно предсказывается оценкой (29), в правую часть которой входит слагаемое $\tau\Delta^{1/2}$, требующее для получения оптимальной скорости сходимости согласования итерационного параметра и шага пространственной сетки.

Отметим также, что если проверку точности итерационного процесса проводить только по невязке $\|r(s)\| \leq \varepsilon$, то при увеличении τ $(\tau > 50)$ сходимость метода (9) достигается за 1–2 итерации, при этом его относительная погрешность $\|\overset{s}{\widetilde{y}} - y_{\text{точн}}\|/\|y_{\text{точн}}\|$ (т.е. погрешность в рамках данной задачи) составляет примерно 0.3 % для указанных выше сеточных шагов.

Рассмотрим теперь уравнение (33) с эллиптическим дифференциальным оператором L, содержащим смешанные производные. В этом случае аддитивное представление $A = \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha$ не позволяет непосредственно применить итерационный метод (9). Пусть $k_{\alpha\beta}(x) \neq k_{\beta\alpha}(x)$. Представим оператор L в виде суммы операторов $L = A + B$, где

$$Au = \sum_{\alpha,\beta=1}^{p} A_{\alpha\beta}u, \quad A_{\alpha\beta}u = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(a_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right),$$

$$a_{\alpha\alpha} = k_{\alpha\alpha}, \quad a_{\alpha\beta} = 0.5(k_{\alpha\beta} + k_{\beta\alpha}) = a_{\beta\alpha}, \quad \beta \neq \alpha, \quad \alpha, \beta = \overline{1,p},$$

$$Bu = \sum_{\alpha=1}^{p} B_\alpha u, \quad B_\alpha u = -0.5\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(b_\alpha(x)u) + b_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right),$$

$$b_\alpha(x) = 0.5 \sum_{\beta=1,\ \alpha\neq\beta}^{p} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(k_{\beta\alpha} - k_{\alpha\beta}), \quad \vec{b}(x) = (b_1, \dots, b_p), \quad \operatorname{div} \vec{b}(x) = 0 \quad \forall x \in G.$$

При этом в пространстве H операторы A, B обладают следующими свойствами: $A = A^* > 0$, $B = -B^*$, $B_\alpha = -B_\alpha^*$, $\alpha = \overline{1,p}$. Кроме того, разобьем оператор A на сумму двух операторов $A = A^+ + A^-$: $A^\pm = \sum_{\alpha=1}^p A_\alpha^\pm$, $A_\alpha^- u = \sum_{i=1}^\alpha A_{\alpha i}^- u$, $A_\alpha^+ u = \sum_{i=\alpha}^p A_{\alpha i}^+ u$, где

$$A_{\alpha i} = \begin{cases} A_{\alpha i}^+, & i \geq \alpha, \\ A_{\alpha i}^-, & i \leq \alpha, \end{cases} \quad A_{\alpha i}^\pm u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(a_{\alpha i}^\pm \frac{\partial u}{\partial x_i}\right), \quad a_{\alpha\alpha}^- = a_{\alpha\alpha}^+ = 0.5 a_{\alpha\alpha}, \quad a_{\alpha i} = \begin{cases} a_{\alpha i}^+, & i > \alpha, \\ a_{\alpha i}^-, & i < \alpha. \end{cases}$$

Определим гильбертово пространство H^{2p} вектор-функций $U = (u_1^{\rightarrow}, \dots, u_p^{\rightarrow}, u_p^{\leftarrow}, \dots, u_1^{\leftarrow})$, $u_\alpha^{\rightarrow}, u_\alpha^{\leftarrow} \in H$, $\alpha = \overline{1,p}$, обращающихся в нуль на границе ∂G, со скалярным произведением $(U, V) = \sum_{\alpha=1}^{2p} (u_\alpha^*, v_\alpha^*)$ и нормой $\|U\| = \sqrt{(U,V)}$, где $u_\alpha^* = \begin{cases} u_\alpha^{\rightarrow}, & \alpha = \overline{1,p}, \\ u_{2p+1-\alpha}^{\leftarrow}, & \alpha = \overline{p+1, 2p}. \end{cases}$ Таким образом, вместо задачи (33) можно рассматривать систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial y_\alpha}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^{2p} (A_\beta^* y_{(\beta)} + 0.5 B_\beta y_\beta) = f(x), \quad x \in G, \quad y_\alpha(0) = y_0, \quad y_\alpha(x) = 0, \quad x \in \partial G, \quad \alpha = \overline{1, 2p},$$

где

$$A_\beta^* y_{(\beta)} = \begin{cases} A_\beta^- y_{(\beta)}^{\rightarrow}, & \beta = \overline{1,p}, \\ A_{2p+1-\beta}^+ y_{(2p+1-\beta)}^{\leftarrow}, & \beta = \overline{p+1, 2p}, \end{cases} \quad B_\beta y_{(\beta)} = \begin{cases} B_\beta y_{(\beta)}^{\rightarrow}, & \beta = \overline{1,p}, \\ B_{2p+1-\beta} y_{(2p+1-\beta)}^{\leftarrow}, & \beta = \overline{p+1, 2p}, \end{cases}$$

$A_\beta^- y_{(\beta)}^{\rightarrow} = A_{\beta\beta}^- y_\beta^{\rightarrow} + \sum_{i=1}^{\beta-1} A_{\beta i} y_i^{\rightarrow}$, $A_\beta^+ y_{(\beta)}^{\leftarrow} = A_{\beta\beta}^+ y_\beta^{\leftarrow} + \sum_{i=\beta+1}^{p} A_{\beta i} y_i^{\leftarrow}$. Оператор A в этом случае можно представить в аддитивном виде $A = \sum_{\alpha=1}^{p} (A_\alpha^- + B_\alpha) + \sum_{\alpha=p+1}^{2p} (A_{2p+1-\alpha}^+ + B_{2p+1-\alpha})$. Тогда итерационный метод решения дискретного аналога задачи (33) запишем следующим образом:

$$\frac{\overset{s+1}{y}_\alpha - \overset{s}{\tilde{\tilde{y}}}}{\tau} + \sigma(A_{h\alpha}^* + B_{h\alpha})(\overset{s+1}{y}_\alpha - \overset{s}{y}_\alpha) + \sum_{\beta=1}^{2p} (A_{h\beta}^* + B_{h\beta}) \overset{s}{y}_\beta = f, \quad \alpha = \overline{1, 2p}, \tag{35}$$

где $\overset{s}{\tilde{\tilde{y}}} = (2p)^{-1} (\sum_{\alpha=1}^{p} \overset{s}{y}{}_\alpha^{\rightarrow} + \sum_{\alpha=p+1}^{2p} \overset{s}{y}{}_{2p+1-\alpha}^{\leftarrow})$, а разностные операторы $A_{h\alpha}^*$, $B_{h\beta}$ определены, например, в [23]. Для сходимости итерационного метода (35) справедлива теорема 2 при $p < \sigma \leq 2p$, причем в оценке (29) невязка имеет вид $r(s) = \sum_{\alpha=1}^{2p} (A_{h\alpha}^* + B_{h\alpha}) \overset{s}{y}_\alpha - f$.

4. Итерационные методы декомпозиции области. Схемы типа переменных направлений широко применяются при построении методов решения задач математической физики в подобластях [24]. Для нестационарных уравнений в качестве методов декомпозиции эффективно могут быть использованы схемы расщепления [25], разделения области [26, 27], а также методы, построенные на основе векторно-аддитивных разностных схем [28, 29]. Итерационные алгоритмы вида (12), (13) можно применять при решении стационарных уравнений в подобластях [14, 15, 20–22], однако их скорость сходимости достаточно медленная. Тем не менее с вычислительной точки зрения привлекает высокая степень однородности этих методов. Небольшая модификация итерационной разностной схемы (12) (усреднение решения осуществляется только на границе стыковки подобластей) существенно улучшает ее асимптотические свойства и позволяет получить алгоритм, обладающий быстрой сходимостью, и указать его скорость сходимости [30].

Наиболее перспективными, на наш взгляд, являются итерационные алгоритмы разделения области, примыкающие к методу Шварца. Построению и исследованию таких методов посвящено большое количество работ. Естественно обратиться к методам разделения области, ориентированным на параллельные вычисления [31–35].

Пусть требуется решить задачу Дирихле

$$Lu \equiv -\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right) + c(x)u = f(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in G, \quad u(x) = 0, \quad x \in \partial G, \tag{36}$$

где $G \subset R^n$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей ∂G, локально удовлетворяющей условию Липшица. Предполагается, что для уравнения (36) выполнены условия сильной эллиптичности.

Рассмотрим гильбертово пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^1(G) \subset L_2(G)$ и определим в нем скалярное произведение

$$[u,v]_G = \int\limits_G \left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\frac{\partial v}{\partial x_\beta} + c(x)uv\right)dx.$$

Тогда обобщенная форма записи задачи (36) имеет вид $[u,v]_G = (f,v)$, где $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ – искомое решение, $v(x)$ – произвольная функция из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$, а $(f,v) \equiv (f,v)_{L_2(G)} = \int_G f(x)v(x)\,dx$.

Разобьем область G на подобласти $G_1, \dots, G_N$: $G = \bigcup_{\alpha=1}^N G_\alpha$. Определим границу подобласти G_α, $\alpha = \overline{1,N}$, следующим образом: $\Gamma_\alpha = \gamma_\alpha \bigcup \partial G_\alpha$, где ∂G_α – часть границы Γ_α, принадлежащая ∂G, т.е. $\partial G_\alpha = \partial G \bigcap \Gamma_\alpha$; $\gamma_\alpha = \bigcup_{m=1}^p \gamma_{k_m}^{(\alpha)}$, $\gamma_{k_m}^{(\alpha)}$ – граница раздела области G_α с соприкасающейся подобластью G_{k_m}. Предполагается также, что границы областей Γ_α локально удовлетворяют условию Липшица и $\operatorname{mes}(\partial G_\alpha) > 0$, $\alpha = \overline{1,N}$.

Определим на γ_α внешнюю по отношению к G_α конормальную производную

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial \nu_\alpha} = \sum_{i,j=1}^{n} k_{ij}(x)\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j}\cos(n_\alpha, x_i),$$

где n_α – внешняя по отношению к G_α нормаль. Для построения итерационных методов решения задачи (36) на внутренних границах γ_α, $\alpha = \overline{1,N}$, используем процедуру установления

$$\partial u_\alpha/\partial t + \partial u_\alpha/\partial \nu_\alpha + \partial u_\beta/\partial \nu_\beta = 0, \quad \beta = \overline{k_1^{(\alpha)}, k_p^{(\alpha)}}. \tag{37}$$

Пусть функция $\overset{\circ}{u}_\alpha(x)$ определена на G_α, функции $\overset{s}{u}_\alpha(x) \in W_2^1(G_\alpha)$, $\overset{s}{u}_\alpha = 0$ на Γ_α, $\alpha = \overline{1,N}$. Тогда для определения приближений $\overset{s+1}{u}_\alpha$ используем итерационный процесс ММПН [36]:

$$L\overset{s+1}{u}_\alpha = f(x), \quad x \in G_\alpha, \quad \overset{s+1}{u}_\alpha = 0, \quad x \in \partial G_\alpha, \quad \alpha = \overline{1,N}, \tag{38}$$

$$(\overset{s+1}{u}_\alpha - \overset{s}{\tilde{u}})/\tau + \sigma(\partial\overset{s+1}{u}_\alpha/\partial\nu_\alpha - \partial\overset{s}{u}_\alpha/\partial\nu_\alpha) + \partial\overset{s}{u}_\alpha/\partial\nu_\alpha + \partial\overset{s}{u}_\beta/\partial\nu_\beta = 0, \quad x \in \gamma_\beta^{(\alpha)}, \tag{39}$$

$\overset{s}{\tilde{u}}_\alpha = 0.5(\overset{s}{u}_\alpha + \overset{s}{u}_\beta)$, $\beta = k_1^{(\alpha)}, \dots, k_p^{(\alpha)}$, $\alpha = \overline{1,N}$. Алгоритм (38), (39) является асинхронным методом, что позволяет решать задачи во всех подобластях одновременно. Численная реализация задачи (38), (39) достаточно просто осуществляется с помощью разностных (проекционно-разностных) методов.

Справедлива

Лемма 3. *Пусть $\sigma = 2$. Тогда для итерационного метода (38), (39) имеет место оценка*

$$Q(\overset{s}{u}) \le q^{-s}Q(\overset{\circ}{u}), \tag{40}$$

где

$$Q(\overset{s}{u}) = \|r(s)\|_{\mathrm{I}}^2 + 0.25\tau^{-2}\|\overset{s}{v}\|_{\mathrm{III}}^2, \quad \|r(s)\|_{\mathrm{I}}^2 = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{\beta=k_1^{(\alpha)},\ \beta>\alpha}^{k_p^{(\alpha)}} \left\| \frac{\partial \overset{s}{u}_\alpha}{\partial \nu_\alpha} + \frac{\partial \overset{s}{u}_\beta}{\partial \nu_\beta} \right\|^2_{L_2(\gamma_\beta^{(\alpha)})},$$

$$\|\overset{s}{v}\|_{\mathrm{III}}^2 = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{\beta=k_1^{(\alpha)},\ \beta>\alpha}^{k_p^{(\alpha)}} \left(\overset{s}{v}{}^{(\alpha,\beta)}, \overset{s}{v}{}^{(\alpha,\beta)}\right)_{L_2(\gamma_\beta^{(\alpha)})}, \quad \overset{s}{v}{}^{(\alpha,\beta)} = \overset{s}{u}_\alpha - \overset{s}{u}_\beta, \quad q = 1 + 4c_0\tau, \quad c_0 = \mathrm{const} > 0.$$

Неравенство (40) гарантирует при $s \to \infty$ стремление величины $\partial\overset{s}{u}_\alpha/\partial\nu_\alpha + \partial\overset{s}{u}_\beta/\partial\nu_\beta$ к нулю и компонент $\overset{s}{u}_\alpha, \overset{s}{u}_\beta$ друг к другу, что обеспечивает выполнение условий сопряжения (37). Для вывода оценки скорости сходимости метода (38), (39) определим функцию погрешности $\overset{s}{\rho}_\alpha(x) = \overset{s}{u}_\alpha(x) - u(x)$, $x \in \overline{G}_\alpha$, $\alpha = \overline{1,p}$. Из уравнений для погрешности нетрудно получить соотношения $[\overset{s}{\rho}_\alpha, \overset{s}{\rho}_\alpha]_\alpha = (\partial\overset{s}{\rho}_\alpha/\partial\nu_\alpha, \overset{s}{\rho}_\alpha)_{L_2(\gamma_\alpha)}$, $\alpha = \overline{1,p}$, суммируя которые по $\alpha = \overline{1,N}$ и используя вытекающие из (40) неравенства $\|r(s)\|_{\mathrm{I}} \le (q^{-s}Q(\overset{\circ}{u}))^{1/2}$, $\|\overset{s}{v}\|_{\mathrm{III}} \le 0.5\tau(q^{-s}Q(\overset{\circ}{u}))^{1/2}$, приходим к следующей оценке скорости сходимости:

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \|\overset{s}{\rho}_\alpha\|_\alpha \le 0.5M(1+\tau/2)(q^{-s}Q(\overset{\circ}{u}))^{1/2},$$

где $M = \mathrm{const} > 0$ – постоянная, не зависящая от τ.

5. Заключение. Предложенные итерационные методы решения стационарных задач являются аддитивными как по форме, так и по способу реализации. Классические методы расщепления [8], факторизации [7] и переменных направлений, содержащие в своей основе аддитивные принципы аппроксимации, таковыми по существу не являются. Все эти методы связаны с последовательной реализацией процесса нахождения решения и кроме аддитивности разбиения здесь присутствует мультипликативность формы алгоритма. Наиболее удачным среди этих методов является метод переменных направлений – классический итерационный метод решения двумерных задач, многомерной альтернативой которому являются алгоритмы факторизации. По своим свойствам эти вычислительные процедуры близки – они оптимальны при условии попарной коммутируемости пространственных операторов и требуют для своей эффективной реализации выбора оптимального итерационного параметра (например, по Жордану [7]), что довольно громоздко и не является необходимым для данного класса алгоритмов (имеется в виду упрощение реализации на основе аддитивности). Так, например, к методу (9) (аддитивному и по форме, и по содержанию) можно применить “аддитивное распараллеливание”, которое позволяет находить оптимальный итерационный параметр (в коммутируемом случае) без дополнительных алгоритмических процедур.

Возможность построения экономичных итерационных методов для уравнений с неограниченными операторами нам представляется весьма полезной при конструирования новых методов решения этих задач, так как сама аппроксимация пространственного оператора далеко не однозначна и ее эффективность проверяется скорее в процессе вычислений, нежели априори. Для итерационных методов разбиения по направлениям наиболее эффективным, на наш взгляд, является алгоритм (9). В некоммутируемом случае преимущество метода (9) проявляется лишь в произвольной размерности задачи. В двумерном варианте аналогичными свойствами обладает метод переменных направлений с различными его модификациями. Возможно, что при его реализации также придется вводить процедуру выбора итерационного параметра, но при этом будет необходима дискретизация пространственного оператора.

Авторы выражают благодарность А.А. Самарскому и П.Н. Вабищевичу за обсуждение результатов и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самарский А.А., Абрашин В.Н., Жадаева Н.Г.* // Докл. РАН. 2000. Т. 373. № 6. С. 734–736.
2. *Абрашин В.Н., Егоров А.А., Жадаева Н.Г., Самарская Е.А.* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 1999. Т. 3. С. 99–105.
3. *Абрашин В.Н.* // Мат. моделирование. 2000. Т. 12. № 2. С. 45–58.
4. *Абрашин В.Н., Жадаева Н.Г.* // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 9. С. 1220–1229.
5. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М., 1989.
6. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М., 1978.
7. *Самарский А.А.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1962. Т. 2. № 5. С. 787–821.
8. *Яненко Н.Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, 1967.
9. *Бенсусан А., Лионс Ж.-Л., Темам Р.* // Методы вычислительной математики. Новосибирск, 1975. С. 144–274.
10. *Самарский А.А.* // Междунар. конгресс математиков в Ницце, 1970: Докл. советских математиков. М., 1972. С. 276–289.
11. *Гордезиани Д.Г., Меладзе Г.В.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1974. Т. 14. № 1. С. 246–250.
12. *Абрашин В.Н.* // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 2. С. 314–323.
13. *Абрашин В.Н., Муха В.А.* // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 10. С. 1786–1799.
14. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Аддитивные схемы для задач математической физики. М., 1999.
15. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* // Докл. РАН. 1996. Т. 349. № 1. С. 22–25.
16. *Гордезиани Д.Г.* // Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М., 1982. С. 128–137.
17. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. М., 1973.
18. *Abrashin V.N., Zhadaeva N.G.* // Proceedings of the Second International Conference "Finite-Difference Methods: Theory and Application". Minsk, Belarus, 1998. V. 1. P. 12–21.
19. *Абрашин В.Н.* // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 2. С. 212–224.
20. *Абрашин В.Н., Жадаева Н.Г.* // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 9. С. 1212–1221.
21. *Жадаева Н.Г.* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 7. С. 998–1000.
22. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* // Докл. РАН. 1997. Т. 354. № 3. С. 310–312.
23. *Абрашин В.Н., Жадаева Н.Г.* // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 7. С. 948–958.
24. *Лаевский Ю.М.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1992. Т. 32. № 11. С. 1744–1755.
25. *Вабищевич П.Н.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1989. Т. 29. № 12. С. 1822–1829.
26. *Кузнецов Ю.А.* Новые алгоритмы приближенной реализации неявных разностных схем. М., 1986 (Препринт / ОВМ АН СССР: 142).
27. *Marchuk G.I., Kuznetsov Yu.A.* // Analyse mathematique et applications. Paris, 1988. P. 357–371.
28. *Абрашин В.Н.* // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 9. С. 1525–1535.
29. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 9. С. 1563–1569.
30. *Абрашин В.Н.* // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 7. С. 909–918.
31. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М., 1989.
32. *Агошков В.И.* Сопряженные уравнения и алгоритмы возмущений в задачах математической физики. М., 1989.
33. *Лебедев В.И.* Метод композиции. М., 1986.
34. *Лебедев В.И., Агошков В.И.* Обобщенный алгоритм Шварца с переменными параметрами. М., 1981 (Препринт / ОВМ АН СССР).
35. *Лебедев В.И., Агошков В.И.* Операторы Пуанкаре–Стеклова и их приложения в анализе. М., 1983.
36. *Егоров А.А.* // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 5. С. 703–708.

Институт математики НАН Беларуси, г. Минск,
Белорусский государственный университет, г. Минск

Поступила в редакцию
01.03.2001 г.