
ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.936

О НЕОБХОДИМЫХ СВОЙСТВАХ ГРАНИЧНЫХ СТЕПЕННЫХ МНОЖЕСТВ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПФАФФА

© 2001 г. Н. А. Изобов, Е. Н. Крупчик

Рассматриваем линейную систему Пфаффа

$$\partial x / \partial t_i = A_i(t)x, \quad x \in R^n, \quad t = (t_1, t_2) \in R_{\geq 1}^2, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

с непрерывно дифференцируемыми и ограниченными в $R_{\geq 1}^2$ матрицами $A_1(t)$ и $A_2(t)$, удовлетворяющими условию полной интегрируемости [1, с. 14–24; 2, с. 16–26]

$$\partial A_1(t) / \partial t_2 + A_1(t)A_2(t) = \partial A_2(t) / \partial t_1 + A_2(t)A_1(t), \quad t \in R_{\geq 1}^2.$$

Пусть $p = p[x]$ – какой-то нижний характеристический вектор [3] нетривиального решения $x : R_{\geq 1}^2 \rightarrow R^n \setminus \{0\}$ системы (1), а множество $P_x = \cup p[x]$ – его нижнее характеристическое множество [3]. Это множество определяется [3] ограниченной монотонно убывающей выпуклой вверх функцией $\varphi : [\alpha_x, \beta_x] \rightarrow [a_x, b_x]$ посредством равенства $P_x = \{(p_1, \varphi(p_1)) \in R^2 : \alpha_x \leq p_1 \leq \beta_x\}$. В [4] по нижнему характеристическому вектору $p \in P_x$ введено понятие (ограниченной) нижней характеристической степени $d = d_x(p) \in R^2$ рассматриваемого решения, определяемое условиями

$$\underline{\ln}_x(p, d) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|x(t)\| - (p, t) - (d, \ln t)}{\|\ln t\|} = 0, \quad \ln t \equiv (\ln t_1, \ln t_2) \in R_+^2, \quad (2_1)$$

$$\underline{\ln}_x(p, d + \varepsilon e_i) < 0, \quad e_i = (2 - i, i - 1) \in R^2, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad i = 1, 2. \quad (2_2)$$

Отметим, что в отличие от нижнего характеристического множества P_x нижнее степенное множество $\underline{D}_x(p) \equiv \cup d_x(p)$ нетривиального решения вполне интегрируемой системы Пфаффа (1) с ограниченными непрерывно дифференцируемыми коэффициентами, вообще говоря, может быть и пустым. Например, нижнее степенное множество нетривиального решения $x(t) = (e^{-t_1} + e^{-t_2}) \exp\{\ln^2 t_1 + \ln^2 t_2\}$ уравнения Пфаффа

$$\partial x / \partial t_i = a_i(t)x, \quad a_i(t) = x^{-1}(t) \partial x(t) / \partial t_i, \quad t = (t_1, t_2) \in R_{\geq 1}^2, \quad i = 1, 2, \quad (1_1)$$

соответствующее всякой точке нижнего характеристического множества, является пустым.

Нижнее степенное множество $\underline{D}_x(p)$ будем называть внутренним нижним степенным множеством, если точка $p = (p_1, \varphi(p_1)) \in P_x$, $p_1 \in (\alpha_x, \beta_x)$, – внутренняя точка нижнего характеристического множества P_x , и левым (правым) граничным нижним степенным множеством, если $p \equiv p' = (\alpha_x, b_x)$ ($p \equiv p'' = (\beta_x, a_x)$) – “левая” (“правая”) граничная точка нижнего характеристического множества.

В работе [4] полностью описано всякое непустое внутреннее нижнее степенное множество $\underline{D}_x(p)$ нетривиального решения $x(t)$ системы (1), являющееся прямой $d_1 + d_2 = \underline{c}_x(p)$ плоскости R^2 . Нетрудно проверить, что левое граничное нижнее степенное множество нетривиального решения

$$x(t) = (e^{-t_1} + e^{-t_2})\psi(t), \quad \psi(t) = \ln^2 t_2 e_{01}(t_2/t_1; 2, 3), \quad t \in R_{\geq 1}^2, \quad (3)$$

построенного с использованием бесконечно дифференцируемой функции [5, с. 54]

$$e_{01}(\eta; \eta_1, \eta_2) = \begin{cases} 0, & \eta \in (-\infty, \eta_1], \\ \exp\{-(\eta - \eta_1)^{-2} \exp[-(\eta - \eta_2)^{-2}]\}, & \eta \in (\eta_1, \eta_2), \\ 1, & \eta \in [\eta_2, +\infty), \end{cases}$$

$-\infty < \eta_1 < \eta_2 < +\infty$, уравнения Пфаффа (1₁) с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами есть прямая $d_1 + d_2 = 0$ двумерной плоскости. Поэтому возникает естественный вопрос, всякое ли непустое граничное нижнее степенное множество нетривиального решения системы Пфаффа (1) является прямой $d_1 + d_2 = \text{const}$ двумерной плоскости.

Очевидно, что левое граничное нижнее степенное множество нетривиального решения

$$x(t) = e^{-t_1} + e^{-t_2} \tag{4}$$

вполне интегрируемого уравнения Пфаффа (1₁) с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами не совпадает с прямой $d_1 + d_2 = 0$ двумерной плоскости, а является лишь ее лучом $\{d = (d_1, d_2) : d_1 + d_2 = 0, d_2 \leq 0\}$.

И, более того, приведенная ниже теорема 1 показывает, что граничное нижнее степенное множество может не только не совпадать ни с какой прямой двумерной плоскости, но и даже не содержать отрезка прямой.

Теорема 1. *Существует такое вполне интегрируемое уравнение Пфаффа (1₁) с бесконечно дифференцируемыми ограниченными коэффициентами, что левое граничное нижнее степенное множество всякого его нетривиального решения $x : R_{\geq 1}^2 \rightarrow R \setminus \{0\}$ есть монотонно убывающая выпуклая вверх кривая Γ (отличная от прямой и даже не содержащая никакого отрезка прямой) с множествами значений $\{d_1 : (d_1, d_2) \in \Gamma\} = (-\infty, +\infty)$ первой и $\{d_2 : (d_1, d_2) \in \Gamma\} = (-\infty, 0)$ второй компонент.*

При доказательстве этой и последующих теорем существенно будет использована следующая устанавливающая свойства последовательностей, реализующих граничные нижние степенные множества,

Лемма 1. *Пусть нижнее характеристическое множество P_x нетривиального решения $x(t) \neq 0$ системы Пфаффа (1) состоит более чем из одной точки, и p', p'' — соответственно его левая и правая граничные точки. Тогда для любого вектора $N \in R^2$ существуют последовательности $\{t'(k)\} \uparrow \infty$ и $\{t''(k)\} \uparrow \infty$, реализующие пределы $\underline{\ln}_x(p', N)$ и $\underline{\ln}_x(p'', N)$ и удовлетворяющие условиям:*

- 1) $0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \ln t'_1(k) / \|\ln t'(k)\| \leq 1/\sqrt{2}, \quad 0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \ln t''_2(k) / \|\ln t''(k)\| \leq 1/\sqrt{2};$
- 2) $t'_i(k) \rightarrow +\infty, \quad t''_i(k) \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty, \quad i = 1, 2.$

Доказательство. Установим справедливость леммы 1 для левой граничной точки $p' \in \partial P_x$. Для правой же граничной точки $p'' \in \partial P_x$ доказательство аналогичное. Из [4, 6, 7] вытекает существование последовательности $\{t'(k)\} \uparrow \infty$, реализующей предел $\underline{\ln}_x(p', N)$ и такой, что $t'_1(k)/t'_2(k) \rightarrow \gamma' \in [0, +\infty)$ при $k \rightarrow +\infty$. Из того, что норма $\|t'(k)\|$ этой последовательности стремится к $+\infty$ при $k \rightarrow +\infty$, следует, что для этой последовательности справедливо стремление $t'_2(k) \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$. Поэтому, не ограничивая общности, для последовательности $\{t'(k)\}$ можно считать выполненными неравенства $0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \ln t'_1(k) / \|\ln t'(k)\| \leq 1/\sqrt{2}$. Если у последовательности $\{t'_1(k)\}$ существует подпоследовательность $\{t'_1(k_n)\}$, стремящаяся к $+\infty$, то последовательность $\{t'(k_n)\}$ искомая.

Предположим теперь, что у последовательности $\{t'_1(k)\}$ не существует подпоследовательности, сходящейся к $+\infty$. Тогда по теореме Больцано–Вейерштрасса из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{t'_1(k_n)\}$. Очевидно, подпоследовательность $\{t'(k_n)\}$ удовлетворяет условиям 1) и 2) при $i = 2$ леммы 1. Без ограничения общности будем считать последовательность $\{t'(k)\}$ такой, что справедливо стремление $t'_1(k) \rightarrow \alpha \in R, \quad \alpha \geq 1$, при $k \rightarrow +\infty$.

По последовательности $\{t'(k)\}$ построим новую последовательность $\{\tau'(k)\}$ с элементами $\tau'(k) = (t'_1(k) + \ln \ln t'_2(k), t'_2(k))$. Очевидно, эта последовательность удовлетворяет условиям 1), 2) леммы 1. Покажем, что по этой последовательности реализуется нижний предел $\underline{\ln}_x(p', N)$.

Поскольку $x(t) \neq 0$ – нетривиальное решение системы Пфаффа (1) с ограниченными коэффициентами, то справедливы неравенства [1, с. 91]

$$\exp\{-a_1|t_1 - \tau_1| - a_2|t_2 - \tau_2|\} \leq \|x(t)\|/\|x(\tau)\| \leq \exp\{a_1|t_1 - \tau_1| + a_2|t_2 - \tau_2|\}, \quad \forall t, \tau \in R_+^2.$$

Положив в этих неравенствах $t \equiv \tau'(k)$ и $\tau \equiv t'(k)$, получаем оценки

$$\exp\{-a_1 \ln \ln t'_2(k)\} \|x(t'(k))\| \leq \|x(\tau'(k))\| \leq \exp\{a_1 \ln \ln t'_2(k)\} \|x(t'(k))\|. \quad (5)$$

Обозначая $R_x(p, N, t) \equiv \ln \|x(t)\| - (p, t) - (N, \ln t)$, $R_x^1(p, N, t) \equiv R_x(p, N, t)/\|\ln t\|$ и используя оценки (5), получаем неравенства

$$\begin{aligned} &[-(p'_1 + a_1) \ln \ln t'_2(k) - N_1 \ln(1 + (\ln \ln t'_2(k))/t'_1(k)) + \|\ln t'(k)\| R_x^1(p', N, t'(k))]/\|\ln \tau'(k)\| \leq \\ &\leq R_x^1(p', N, \tau'(k)) \leq [-(p'_1 - a_1) \ln \ln t'_2(k) - N_1 \ln(1 + (\ln \ln t'_2(k))/t'_1(k)) + \\ &+ \|\ln t'(k)\| R_x^1(p', N, t'(k))]/\|\ln \tau'(k)\|. \end{aligned} \quad (6)$$

Установим справедливость равенства

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\ln t'(k)\|/\|\ln \tau'(k)\| = 1. \quad (7)$$

Из справедливости стремления $t'_1(k) \rightarrow \alpha \in R$ при $k \rightarrow +\infty$ вытекает выполнение равенства $\lim_{k \rightarrow \infty} \ln t'_1(k)/\ln t'_2(k) = 0$. Поскольку последовательность $\{t'_1(k)\}$ сходящаяся, то она ограничена некоторой постоянной α_1 и справедливы оценки

$$0 \leq \ln(\tau'_1(k))/\ln t'_2(k) \leq \ln(\alpha_1 + \ln \ln t'_2(k))/\ln t'_2(k).$$

Отсюда по лемме “о зажатой переменной” вытекает равенство $\lim_{k \rightarrow \infty} \ln(\tau'_1(k))/\ln t'_2(k) = 0$. Тем самым установлена справедливость (7).

Так как предел $\underline{\ln}_x(p', N)$ реализуется по последовательности $\{t'(k)\}$, то выполнено равенство $\underline{\ln}_x(p', N) = \lim_{k \rightarrow \infty} R_x^1(p', N, t'(k))$. Поэтому, переходя к пределу в неравенствах (6), получаем равенство $\lim_{k \rightarrow \infty} R_x^1(p', N, \tau'(k)) = \underline{\ln}_x(p', N)$, т.е. нижний предел $\underline{\ln}_x(p', N)$ реализуется по последовательности $\{\tau'(k)\}$, а эта последовательность удовлетворяет условиям леммы 1. Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 1. В замкнутом квадранте $R_{\geq 1}^2$ двумерной плоскости будем строить необходимое уравнение Пфаффа (1₁) с бесконечно дифференцируемыми и ограниченными удовлетворяющими условию полной интегрируемости $\partial a_1(t)/\partial t_2 \equiv \partial a_2(t)/\partial t_1$, $t \in R_{\geq 1}^2$, коэффициентами $a_1(t)$ и $a_2(t)$ посредством построения его нетривиального решения.

1. Построение решения. Искомое решение $x(t)$ будем строить в виде $\ln x(t) = \ln \varphi(t) + \ln \psi(t)$, где функция $\varphi(t)$ определена равенством $\ln \varphi(t) = \ln(e^{-t_1} + e^{-t_2})$. Функцию $\ln \psi(t)$ (для реализации требуемого левого граничного нижнего степенного множества) строим на основе функции $v(t) = -\sqrt{\ln t_1 \ln(t_2/t_1)}$. Для склеивания различных бесконечно дифференцируемых функций с сохранением этого их свойства будем использовать также бесконечно дифференцируемую функцию [5, с. 54] $e_{01}(\eta; \eta_1, \eta_2)$, $-\infty < \eta_1 < \eta_2 < +\infty$. Построим вспомогательную функцию

$$\ln u(t) = \begin{cases} v(t), & 3t_1 \leq t_2 \leq t_1^{t_1}, \\ v(t)[1 - e_{01}(\ln t_2/(t_1 \ln t_1); 1, 2)], & t_2 > t_1^{t_1}, \\ v(t)e_{01}(t_2/t_1; 2, 3), & t_2 < 3t_1, \end{cases}$$

определенную при всех $t \in R_{\geq 1}^2$. Функцию $\psi(t)$ определим равенством $\ln \psi(t) = \ln u(t) \times e_{01}(t_1; 2, 3)$, $t \in R_{\geq 1}^2$ и $\ln \psi(t) = 0$ при $t_1 = 1$.

2. Построение уравнения. Ограниченность коэффициентов. Построенная функция $x(t) > 0$ является решением уравнения (1₁) с коэффициентами $a_1(t) = x^{-1}(t)\partial x(t)/\partial t_1 = \partial \ln x(t)/\partial t_1$ и $a_2(t) = x^{-1}(t)\partial x(t)/\partial t_2 = \partial \ln x(t)/\partial t_2$, $t \in R_{\geq 1}^2$, удовлетворяющими условию полной интегрируемости в силу бесконечной в $R_{\geq 1}^2$ дифференцируемости $\ln x(t)$.

Покажем ограниченность этих коэффициентов. Заметим вначале, что для частных производных функции $v(t)$ при $3t_1 \leq t_2 \leq t_1^2$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial v(t)}{\partial t_1} \right| &= \left| \left(\frac{1}{t_1} \ln \frac{t_2}{t_1} - \frac{1}{t_1} \ln t_1 \right) / (2v(t)) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{\ln t_1}} \frac{1}{t_1} \sqrt{\ln(t_2/t_1)} + \frac{\sqrt{\ln t_1}}{2t_1 \sqrt{\ln(t_2/t_1)}} \leq \frac{\sqrt{t_1 - 1}}{2t_1} + \frac{\sqrt{\ln t_1}}{2t_1 \sqrt{\ln 3}} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\ln 3}}, \\ \left| \frac{\partial v(t)}{\partial t_2} \right| &= \left| \frac{1}{2v(t)} \frac{1}{t_2} \ln t_1 \right| = \frac{\sqrt{\ln t_1}}{2t_2 \sqrt{\ln(t_2/t_1)}} \leq \frac{1}{6\sqrt{\ln 3}}. \end{aligned}$$

Используя [4, с. 902] неравенство

$$\left| \frac{\partial e_{01}(\eta(t_1, t_2); \eta_1, \eta_2)}{\partial t_i} \right| \leq 4 \exp[3(\eta_2 - \eta_1)^{-2}] \left| \frac{\partial \eta}{\partial t_i} \right|, \quad i = 1, 2,$$

справедливое на всяком отрезке $[\eta_1, \eta_2]$ длины $\eta_2 - \eta_1 \leq 1$, получаем ограниченность производных функции $\ln \psi(t)$ при $t_1^{t_1} < t_2 < t_1^{2t_1}$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \ln \psi(t)}{\partial t_1} \right| &\leq \left(\frac{\sqrt{\ln(t_2/t_1)}}{2t_1 \sqrt{\ln t_1}} + \frac{\sqrt{\ln t_1}}{2t_1 \sqrt{\ln(t_2/t_1)}} \right) \left| 1 - e_{01} \left(\frac{\ln t_2}{t_1 \ln t_1}; 1, 2 \right) \right| + 4e^3 |v(t)| (\ln t_2) \frac{1 + \ln t_1}{(t_1 \ln t_1)^2} \leq \\ &\leq \frac{\sqrt{2t_1 - 1}}{2t_1} + \frac{1}{2\sqrt{\ln 3}} + 8e^3 \sqrt{2t_1 - 1} \frac{1 + \ln t_1}{t_1} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{\ln 3}} + 24\sqrt{2}e^3, \\ \left| \frac{\partial \ln \psi(t)}{\partial t_2} \right| &\leq \frac{1}{6\sqrt{\ln 3}} + 4e^3 \frac{|v(t)|}{t_1 \ln t_1} \leq \frac{1}{6\sqrt{\ln 3}} + 4\sqrt{2}e^3. \end{aligned}$$

Аналогично устанавливаются оценки

$$\left| \frac{\partial \ln \psi(t)}{\partial t_i} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{\ln 2}} + 12e^3 \sqrt{\ln 3}, \quad i = 1, 2, \quad 2t_1 < t_2 < 3t_1.$$

Ограниченность же остальных производных очевидна. Тем самым полностью доказана ограниченность коэффициентов построенного уравнения Пфаффа.

3. Вычисление нижнего характеристического множества. Заметим, что нижнее характеристическое множество построенного решения $x(t)$ уравнения (1₁) совпадает с нижним характеристическим множеством $P_\varphi \equiv \{p \in R_-^2 : p_1 + p_2 = -1\}$ функции $\varphi(t)$. Это следует из существования предела $\lim_{t \rightarrow \infty} \ln \psi(t)/\|t\| = 0$, а последнее вытекает из оценки $0 \geq \ln \psi(t) \geq v(t) \geq -\sqrt{\ln t_1 \ln t_2} \geq -\ln \|t\|$.

4. Вычисление левого граничного нижнего степенного множества. Возьмем левую граничную точку $p' = (-1, 0) \in \partial P_x$ нижнего характеристического множества и покажем, что левое граничное нижнее степенное множество $\underline{D}_x(p')$ совпадает с множеством $D \equiv \{d \in R^2 : d_1 = (2 - \alpha_0)/(2\sqrt{\alpha_0 - 1}), d_2 = -1/(2\sqrt{\alpha_0 - 1}), \alpha_0 \in (1, +\infty)\}$.

Вначале установим включение $D \subset \underline{D}_x(p')$. Возьмем любой вектор $d \in D$ и в качестве реализующей нижний предел $\underline{\ln}_x(p', d)$ возьмем последовательность $\{t(k)\}$, удовлетворяющую условиям леммы 1. Поэтому, не ограничивая общности, последовательность $\{t(k)\}$ можно считать такой, что $t_1(k) > 1$ при всех $k \in N$. Тогда получаем оценки снизу

$$R_x(p', d, t(k)) \geq \ln(1 + e^{t_1(k) - t_2(k)}) + v(t(k)) - \frac{2 - \alpha_0}{2\sqrt{\alpha_0 - 1}} \ln t_1(k) + \frac{\alpha(k)}{2\sqrt{\alpha_0 - 1}} \ln t_1(k) \geq$$

$$\begin{aligned} &\geq -\sqrt{\alpha(k)-1} \ln t_1(k) - \frac{2-\alpha_0}{2\sqrt{\alpha_0-1}} \ln t_1(k) + \frac{\alpha(k)}{2\sqrt{\alpha_0-1}} \ln t_1(k) = \\ &= \left[2\sqrt{\alpha_0-1} - \sqrt{\alpha(k)-1} + \frac{\alpha(k)-1}{2\sqrt{\alpha_0-1}} \right] \ln t_1(k) = \frac{[\sqrt{\alpha_0-1} - \sqrt{\alpha(k)-1}]^2}{2\sqrt{\alpha_0-1}} \ln t_1(k) \geq 0 \end{aligned}$$

при $\alpha(k) = \ln t_2(k) / \ln t_1(k) \geq 1$. Отсюда и из вида функции $x(t)$ вытекает неравенство $\ln_x(p', d) \geq 0$. Рассмотрим направление $t_2 = t_1^{\alpha_0}$ для достаточно больших t_1 ($t_1 > 3, 3t_1 < t_1^{\alpha_0} < t_1^{t_1}$). Тогда функция $\ln \psi(t)$ по этому направлению имеет вид $\ln \psi(t) = v(t) = -\sqrt{\alpha_0-1} \ln t_1$. Следовательно, выполнено равенство

$$\begin{aligned} &\lim_{t_2=t_1^{\alpha_0} \rightarrow \infty} [\ln(1 + e^{t_1-t_1^{\alpha_0}}) - \sqrt{\alpha_0-1} \ln t_1 - (2-\alpha_0)/(2\sqrt{\alpha_0-1}) \ln t_1 + \\ &+ \alpha_0/(2\sqrt{\alpha_0-1}) \ln t_1] / (\sqrt{1+\alpha_0^2} \ln t_1) = 0. \end{aligned}$$

Тем самым для вектора $d \in D$ установлено первое определяющее свойство $\ln_x(p', d) = 0$ нижней характеристической степени. Второе ее определяющее свойство (2₂) реализуется также по направлению $t_2 = t_1^{\alpha_0}$ для достаточно больших t_1 . Таким образом, установлено включение $D \subset \underline{D}_x(p')$.

Покажем обратное включение $\underline{D}_x(p') \subset D$. Возьмем любой вектор $d \in \underline{D}_x(p')$, принадлежащий левому граничному нижнему степенному множеству $\underline{D}_x(p')$. Тогда справедливы неравенства $\lim_{t_1=1, t_2 \rightarrow \infty} (\ln(1 + e^{1-t_2}) - d_2 \ln t_2) / \ln t_2 = -d_2 \geq 0$, так как иначе возникает противоречие с равенством (2₁).

Покажем, что выполнено строгое неравенство $d_2 > 0$. Предположим противное: $d_2 = 0$. Тогда равенство (2₁) примет вид

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{t_1-t_2}) + \ln \psi(t) - d_1 \ln t_1}{\|\ln t\|} = 0. \tag{8}$$

Если d_1 строго меньше нуля, то по направлению $t_2 = t_1^{d_1^2+1}$, где t_1 достаточно большое (чтобы функция $\ln \psi(t)$ на этом направлении совпадала с функцией $v(t)$), справедливы оценки

$$\lim_{t_2=t_1^{d_1^2+1} \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{t_1-t_1^{d_1^2+1}}) - d_1 \ln t_1 - d_1 \ln t_1}{\sqrt{1+(d_1^2+1)^2} \ln t_1} = \frac{-2d_1}{\sqrt{1+(d_1^2+1)^2}} < 0,$$

противоречащие равенству (8). Если первая компонента d_1 вектора d строго меньше нуля, то аналогично по направлению $t_2 = t_1^{4d_1^2+1}$, где t_1 достаточно большое, получаем неравенства

$$\lim_{t_2=t_1^{4d_1^2+1} \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{t_1-t_1^{4d_1^2+1}}) - \sqrt{4d_1^2} \ln t_1 - d_1 \ln t_1}{\sqrt{1+(4d_1^2+1)^2} \ln t_1} = \frac{d_1}{\sqrt{1+(4d_1^2+1)^2}} < 0,$$

снова противоречащие равенству (8). Из рассмотрения направления $t_2 = t_1^2$, где t_1 достаточно большое, заключаем, что d_1 также не может равняться нулю. Таким образом, справедливо строгое неравенство $d_2 < 0$.

Тогда, взяв направление $t_2 = t_1^{\alpha_0}$, $\alpha_0 = 1 + 1/(4d_2^2) > 1$, t_1 достаточно большое (чтобы выполнялось равенство $\ln \psi(t) = v(t)$ на этом направлении), получаем оценки

$$\lim_{t_2=t_1^{\alpha_0} \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{t_1-t_1^{\alpha_0}}) - \sqrt{1/(4d_2^2)} \ln t_1 - d_1 \ln t_1 - d_2(1 + 1/(4d_2^2)) \ln t_1}{\sqrt{1+\alpha_0^2} \ln t_1} =$$

$$= \frac{1/(2d_2) - d_1 - d_2 - 1/(4d_2)}{\sqrt{1 + \alpha_0^2}} \geq 0,$$

так как иначе возникает противоречие с равенством (2₁). Из этих оценок вытекает неравенство $-d_1 \geq d_2(1 - 1/(4d_2^2))$. Если предположить, что это неравенство строгое, то существует число $h > 0$, при котором выполнено равенство $-d_1 = d_2(1 - 1/(4d_2^2)) + h$. Тогда для $\varepsilon_0 = h/2 > 0$ имеем неравенства

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{t_1 - t_2}) + \ln \psi(t) + d_2(1 - 1/(4d_2^2)) \ln t_1 - d_2 \ln t_2 + (h/2) \ln t_1}{\|\ln t\|} \geq \\ & \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{t_1 - t_2}) + \ln \psi(t) + d_2(1 - 1/(4d_2^2)) \ln t_1 - d_2 \ln t_2}{\|\ln t\|} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(h/2) \ln t_1}{\|\ln t\|} \geq 0, \end{aligned}$$

противоречащие неравенству (2₂) в силу того, что параметризация $d_1 = (2 - \alpha_0)/(2\sqrt{\alpha_0 - 1})$, $d_2 = -1/(2\sqrt{\alpha_0 - 1})$ полностью заполняет кривую $-d_1 = d_2(1 - 1/(4d_2^2))$, $d_2 < 0$.

Таким образом, любая нижняя характеристическая степень $d = (d_1, d_2) \in \underline{D}_x(p')$ лежит на кривой $-d_1 = d_2(1 - 1/(4d_2^2))$, $d_2 < 0$, и, следовательно, содержится во множестве D .

Понятно, что для вектора $d = (d_1, d_2) \in \underline{D}_x(p')$ справедливы неравенства $-\infty < d_1 < +\infty$, $-\infty < d_2 < 0$ и поэтому построенное уравнение Пфаффа удовлетворяет условиям теоремы 1. Теорема 1 доказана.

Необходимые же свойства граничного нижнего степенного множества дает следующая

Теорема 2. Пусть нижнее характеристическое множество P_x решения $x(t) \neq 0$ системы (1) состоит более чем из одной точки. Тогда непустое левое $\underline{D}_x(p')$ (правое $\underline{D}_x(p'')$) граничное нижнее степенное множество этого решения есть замкнутая выпуклая вверх монотонно убывающая неограниченная справа и снизу (слева и сверху) кривая двумерной плоскости, имеющая отрицательный не меньший (не больший) -1 угловой коэффициент всякой своей касательной.

Доказательство. Утверждение этой теоремы основывается на приведенных ниже леммах 2–4.

Лемма 2. Непустое граничное нижнее степенное множество всякого нетривиального решения $x(t)$ вполне интегрируемой системы Пфаффа (1) с ограниченными непрерывно дифференцируемыми коэффициентами есть замкнутая выпуклая вверх монотонно убывающая кривая двумерной плоскости.

Доказательство этой леммы аналогично [3, 8].

Лемма 3. Непустое левое (правое) граничное нижнее степенное множество $\underline{D}_x(p')$ (множество $\underline{D}_x(p'')$) нетривиального решения $x(t)$ системы Пфаффа (1), нижнее характеристическое множество P_x которого состоит более чем из одной точки, как кривая двумерной плоскости od_1d_2 не ограничено по d_1 справа (слева) и по d_2 снизу (сверху).

Доказательство. Установим справедливость утверждения леммы 3 для левого граничного нижнего степенного множества. Для правого граничного нижнего степенного множества лемма 3 доказывается совершенно аналогично.

Поскольку левое граничное нижнее степенное множество $\underline{D}_x(p')$ непусто, то существует точка $d^0 = (d_1^0, d_2^0) \in \underline{D}_x(p')$, принадлежащая этому множеству.

Если для любого числа $d_1 \in R$, $d_1^0 < d_1$, покажем существование такого числа $d_2 \in R$, что справедливо включение $(d_1, d_2) \in \underline{D}_x(p')$, то тем самым будет установлена неограниченность кривой $\underline{D}_x(p')$ по d_1 справа. Неограниченность же снизу по d_2 кривой $\underline{D}_x(p')$ вытекает из рассмотрения всех возможных видов замкнутых выпуклых вверх монотонно убывающих кривых с неограниченной справа первой компонентой.

В силу того что граничное нижнее степенное множество непусто, возникает функция $\ln_x(p', \cdot) : R^2 \rightarrow R$, $\ln_x(p', d) \in R$. Из определения этой функции следует, что она непрерывна по $d = (d_x, d_2)$ и даже, более того, удовлетворяет условию Липшица с константой, равной 1.

Возьмем произвольное число $d_1 \in R$, удовлетворяющее неравенству $d_1^0 < d_1$. Тогда существует число $\varepsilon > 0$ такое, что справедливо равенство $d_1 = d_1^0 + \varepsilon$.

Покажем, что функция $\underline{ln}_x(p', (d_1^0 + \varepsilon, d_2))$, непрерывная по d_2 на отрезке $[d_2^0 - \gamma, d_2^0]$, $\gamma > \varepsilon$, принимает на концах этого отрезка значения разных знаков. Поскольку нижнее характеристическое множество P_x состоит более чем из одной точки и p' – его левая граничная точка, то из леммы 1 следует существование последовательности $\{t(k)\} \uparrow +\infty$, реализующей нижний предел $\underline{ln}_x(p', (d_1^0 + \varepsilon, d_2^0 - \gamma))$ и удовлетворяющей неравенствам $0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \ln t_1(k) / \|\ln t_2(k)\| \leq 1$.

В силу (2₁) без ограничения общности можно считать, что либо справедливо равенство $\lim_{k \rightarrow \infty} R_x^1(p', d^0, t(k)) = +\infty$, либо неравенство $\lim_{k \rightarrow \infty} R_x^1(p', d^0, t(k)) \geq 0$. Если предположить, что первый случай возможен, то получаем равенство $\underline{ln}_x(p', (d_1^0 + \varepsilon, d_2^0 - \gamma)) = +\infty$. А отсюда следует, что нижний предел $\underline{ln}_x(p', d^0)$ равен $+\infty$, но это противоречит равенству (2₁). Поэтому для значения функции $\underline{ln}_x(p', (d_1^0 + \varepsilon, d_2))$ на левом конце отрезка $[d_2^0 - \gamma, d_2^0]$ получаем оценку снизу

$$\begin{aligned} \underline{ln}_x(p', (d_1^0 + \varepsilon, d_2^0 - \gamma)) &= \lim_{k \rightarrow \infty} R_x^1(p', d^0, t(k)) + \\ &+ (-\varepsilon \lim_{k \rightarrow \infty} \ln t_1(k) / \ln t_2(k) + \gamma) / \sqrt{(\lim_{k \rightarrow \infty} \ln t_1(k) / \ln t_2(k))^2 + 1} > 0. \end{aligned}$$

Из неравенства (2₁) для значения функции $\underline{ln}_x(p', (d_1^0 + \varepsilon, d_2^0))$ на правом конце отрезка $[d_2^0 - \gamma, d_2^0]$ вытекает оценка сверху $\underline{ln}_x(p', (d_1^0 + \varepsilon, d_2^0)) < 0$. По теореме о промежуточных значениях заключаем, что существует такая точка $d_2^0 - \gamma_0 \in [d_2^0 - \gamma, d_2^0]$, в которой функция $\underline{ln}_x(p', (d_1^0 + \varepsilon, d_2))$ обращается в нуль. Следовательно, для точки $(d_1^0 + \varepsilon, d_2^0 - \gamma_0)$ выполнено первое определяющее свойство нижней характеристической степени $\underline{ln}_x(p', (d_1^0 + \varepsilon, d_2^0 - \gamma_0)) = 0$.

Для этой точки установим второе определяющее свойство нижней характеристической степени. Пусть нижний предел $\underline{ln}_x(p', (d_1^0 + \varepsilon, d_2^0 - \gamma_0))$ реализуется по последовательности $\{\tau(k)\} \uparrow +\infty$ из леммы 1. Если справедливо стремление $\ln \tau_1(k) / \ln \tau_2(k) \rightarrow a$, $0 < a \in R$, то по этой последовательности реализуются неравенства $\underline{ln}_x(p', (d_1^0 + \varepsilon + \tilde{\varepsilon}, d_2^0 - \gamma_0)) < 0$ и $\underline{ln}_x(p', (d_1^0 + \varepsilon, d_2^0 - \gamma_0 + \tilde{\varepsilon})) < 0$, $\forall \tilde{\varepsilon} > 0$. Тем самым установлено, что точка $(d_1^0 + \varepsilon, d_2^0 - \gamma_0) \in \underline{D}_x(p')$ принадлежит левому граничному нижнему степенному множеству.

Если предположить, что справедливо стремление $\ln \tau_1(k) / \ln \tau_2(k) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, то, не ограничивая общности, получаем неравенства

$$\begin{aligned} 0 = \underline{ln}_x(p', (d_1^0 + \varepsilon, d_2^0 - \gamma_0)) &\leq \underline{ln}_x(p', (d_1^0, d_2^0 - \gamma_0)) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} R_x^1(p', (d_1^0, d_2^0 - \gamma_0), \tau(k)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} R_x^1(p', (d_1^0 + \varepsilon, d_2^0 - \gamma_0), \tau(k)) + \varepsilon \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \tau_1(k)}{\|\ln \tau(k)\|} = 0. \end{aligned}$$

Из этих неравенств следует равенство $\underline{ln}_x(p', (d_1^0, d_2^0 - \gamma_0)) = 0$, а также тот факт, что нижний предел $\underline{ln}_x(p', (d_1^0, d_2^0 - \gamma_0))$ реализуется по последовательности $\{\tau(k)\}$. Поэтому, не ограничивая общности, получаем цепочку противоречивых неравенств

$$0 = \underline{ln}_x(p', (d_1^0, d_2^0)) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} R_x^1(p', (d_1^0, d_2^0 - \gamma_0), \tau(k)) - \gamma_0 \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \tau_2(k)}{\|\ln \tau(k)\|} = -\gamma_0 < 0.$$

Следовательно, последовательность $\{\tau(k)\}$ удовлетворяет условию $\lim_{k \rightarrow \infty} \ln \tau_1(k) / \ln \tau_2(k) = a > 0$, $a \in R$.

Таким образом, какое бы мы число $d_1 = d_1^0 + \varepsilon > d_1^0$ ни взяли, всегда найдется такое число $d_2 = d_2^0 - \gamma_0$, $\gamma_0 > \varepsilon$, что вектор $(d_1, d_2) \in \underline{D}_x(p')$ принадлежит левому граничному нижнему степенному множеству. А это и означает неограниченность справа по d_1 левого граничного нижнего степенного множества $\underline{D}_x(p')$. Лемма 3 полностью доказана.

Лемма 4. Пусть нижнее характеристическое множество P_x нетривиального решения $x(t) \neq 0$ системы Пфаффа (1) состоит более чем из одной точки. Тогда тангенс угла наклона всякой секущей непустого левого $\underline{D}_x(p')$ (правого $\underline{D}_x(p'')$) граничного нижнего степенного множества этого решения как кривой двумерной плоскости принадлежит промежутку $[-1, 0)$ ($(-\infty, -1]$).

Доказательство. Поскольку левое граничное нижнее степенное множество $\underline{D}_x(p')$ непусто, то по лемме 3 оно состоит более чем из одной точки. Пусть тогда $d', d'' \in \underline{D}_x(p')$ – произвольные точки левого граничного степенного множества, причем $d''_1 > d'_1$, $d''_2 > d'_2$, а прямая $d_2 = kd_1 + c$ – секущая проходящая через эти точки. Так как точки d', d'' лежат на этой прямой, то получаем равенства $d'_2 = kd'_1 + c$ и $d''_2 = kd''_1 + c$, из которых следует выражение $k = (d''_2 - d'_2)/(d''_1 - d'_1) < 0$.

С другой стороны, поскольку точки $d', d'' \in \underline{D}_x(p')$ принадлежат левому граничному нижнему степенному множеству и последовательность $\{t(k)\} \uparrow +\infty$, реализующую нижний предел $\underline{\ln}_x(p', d'')$, можно взять такую, как в лемме 1, то, не ограничивая общности, получаем цепочку неравенств

$$0 = \underline{\ln}_x(p', d') \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left[R_x^1(p', d'', t(k)) + (d''_1 - d'_1) \frac{\ln t_1(k)}{\|\ln t(k)\|} + (d''_2 - d'_2) \frac{\ln t_2(k)}{\|\ln t(k)\|} \right] = \\ = (d''_1 - d'_1) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln t_1(k)}{\|\ln t(k)\|} + (d''_2 - d'_2) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln t_2(k)}{\|\ln t(k)\|} \leq \frac{(d''_1 - d'_1) + (d''_2 - d'_2)}{\sqrt{2}}.$$

Из этих неравенств и следует требуемая оценка $k = (d''_2 - d'_2)/(d''_1 - d'_1) \geq -1$ для тангенса угла наклона секущей кривой $\underline{D}_x(p')$.

Аналогично (с той лишь разницей, что надо рассмотреть последовательность $\{\tau(k)\} \uparrow +\infty$, реализующую нижний предел $\underline{\ln}_x(p'', d')$) можно показать, что тангенс угла наклона секущей кривой $\underline{D}_x(p'')$ принадлежит промежутку $(-\infty, -1]$. Лемма 4 доказана.

Следствие. Угловой коэффициент всякой касательной к левому (правому) граничному нижнему степенному множеству как кривой двумерной плоскости отрицателен и не больше (не больше) -1 .

Теорема 2 полностью доказана.

Уточнение же необходимых свойств граничного нижнего степенного множества содержит следующая

Теорема 2.1. Пусть нижнее характеристическое множество P_x решения $x(t) \neq 0$ системы (1) состоит более чем из одной точки. Тогда непустое левое $\underline{D}_x(p')$ (правое $\underline{D}_x(p'')$) граничное нижнее степенное множество этого решения есть замкнутая выпуклая вверх монотонно убывающая неограниченная справа и снизу (слева и сверху) кривая двумерной плоскости, имеющая отрицательный не меньший (не больший) -1 угловой коэффициент всякой своей касательной, одного из следующих трех видов:

- 1) неограниченная слева (снизу), ограниченная сверху (справа);
- 2) неограниченная слева и сверху (справа и снизу);
- 3) ограниченная слева и сверху (справа и снизу).

Вместе с тем для левого $\underline{D}_x(p')$ (правого $\underline{D}_x(p'')$) граничного нижнего степенного множества-кривой реализованы все эти три возможности (см. теорему 1, (3), (4)). В связи с этим представляет интерес и следующая устанавливающая критерий неограниченности сверху (справа) левого (правого) граничного нижнего степенного множества

Теорема 3. Пусть множество P_x состоит более чем из одной точки. Непустое левое $\underline{D}_x(p')$ (правое $\underline{D}_x(p'')$) граничное нижнее степенное множество как кривая двумерной плоскости не ограничено сверху (справа) тогда и только тогда, когда существует бесконечный предел

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \ln t_2 / \ln t_1 \rightarrow \infty}} R_x^1(p', 0, t) = +\infty \left(\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \ln t_1 / \ln t_2 \rightarrow \infty}} R_x^1(p'', 0, t) = +\infty \right).$$

Доказательство. Установим справедливость теоремы 3 для левого граничного нижнего степенного множества. Для правого граничного нижнего степенного множества утверждение теоремы 3 доказывается совершенно аналогично.

Покажем сначала необходимость теоремы 3. Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что левое граничное нижнее степенное множество $\underline{D}_x(p')$ не ограничено сверху и нарушается существование предела $\lim_{t \rightarrow \infty} R_x^1(p', 0, t) = +\infty$. Тогда суще-

ствует последовательность $\{t(k)\} \uparrow +\infty$, удовлетворяющая условиям $\lim_{k \rightarrow \infty} \ln t_2(k) / \ln t_1(k) \equiv$

$\equiv \alpha(t(k)) = +\infty$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} R_x^1(p', 0, t(k)) \in R$. Возьмем любую точку $d = (d_1, d_2) \in \underline{D}_x(p')$ левого граничного нижнего степенного множества $\underline{D}_x(p')$. По определению нижней характеристической степени для этой точки получаем равенство $\underline{ln}_x(p', d) = 0$. Поэтому по последовательности $\{t(k)\}$ должно выполняться неравенство $\lim_{k \rightarrow \infty} R_x^1(p', d, t(k)) = \lim_{k \rightarrow \infty} R_x^1(p', 0, t(k)) - d_2 \geq 0$, которое равносильно ограниченности сверху по d_2 левого граничного нижнего степенного множества. Тем самым получаем противоречие.

Установим теперь достаточность теоремы 3. По определению предела для любого числа $l_0 > 0$ существует число $\beta_0 > 0$ такое, что для всех $t \in R_{\geq 1}^2$, удовлетворяющих условиям $\|t\| \geq \beta_0$ и $\alpha(t) \geq \beta_0$, справедливо неравенство

$$R_x^1(p', 0, t) \geq l_0. \quad (9)$$

Поскольку левое граничное нижнее степенное множество $\underline{D}_x(p')$ непусто, то существует степень $d^0 = (d_1^0, d_2^0) \in \underline{D}_x(p')$, ему принадлежащая. Неограниченность же сверху по d_2 множества $\underline{D}_x(p')$ означает, что для любого числа $\varepsilon_0 > 0$ существует число $d_1 \in R$, удовлетворяющее включению $(d_1, d_2^0 + \varepsilon_0) \in \underline{D}_x(p')$.

По определению нижней характеристической степени $d^0 \in \underline{D}_x(p')$ получаем равенство $\underline{ln}_x(p', d^0) = 0$ и неравенство

$$\underline{ln}_x(p', (d_1^0, d_2^0 + \varepsilon_0)) < 0. \quad (10)$$

Покажем, что существует число $-\delta < \min\{0, d_1^0\}$, для которого выполнена оценка

$$\underline{ln}_x(p', (-\delta, d_2^0 + \varepsilon_0)) > 0. \quad (11)$$

Пусть предел $\underline{ln}_x(p', (-\delta, d_2^0 + \varepsilon_0))$ реализуется по последовательности $\{t(k, \delta)\}$ без ограничения общности, удовлетворяющей условию $\alpha(t(k, \delta)) \rightarrow \alpha(\delta)$ при $k \rightarrow \infty$. Очевидно, что $\alpha(\delta)$ конечно для всякого δ . Если предположить противное – $\alpha(\delta) = +\infty$, то получаем равенство $\lim_{k \rightarrow \infty} R_x^1(p', 0, t(k, \delta)) = +\infty$, из которого заключаем, что предел $\underline{ln}_x(p', (-\delta, d_2^0 + \varepsilon_0))$ равен $+\infty$, а отсюда следует равенство $\underline{ln}_x(p', d^0) = +\infty$, противоречащее включению $d^0 \in \underline{D}_x(p')$.

Без ограничения общности справедливы оценки

$$\begin{aligned} \underline{ln}_x(p', (-\delta, d_2^0 + \varepsilon_0)) &= \lim_{k \rightarrow \infty} R_x^1(p', (-\delta, d_2^0 + \varepsilon_0), t(k, \delta)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} R_x^1(p', 0, t(k, \delta)) + \delta \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln t_1(k, \delta)}{\|\ln t(k, \delta)\|} - (d_2^0 + \varepsilon_0) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln t_2(k, \delta)}{\|\ln t(k, \delta)\|} \geq \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} R_x^1(p', 0, t(k, \delta)) + \delta/\sqrt{1 + \alpha^2(\delta)} - |d_2^0 + \varepsilon_0|. \end{aligned}$$

Не ограничивая общности, будем считать, что либо справедливо стремление $\delta/\sqrt{1 + \alpha^2(\delta)} \rightarrow +\infty$ при $\delta \rightarrow +\infty$, либо $\delta/\sqrt{1 + \alpha^2(\delta)} \rightarrow \gamma \geq 0$ при $\delta \rightarrow +\infty$. Если же не существует предела при $\delta \rightarrow +\infty$ функции $\delta/\sqrt{1 + \alpha^2(\delta)}$, то тогда вместо δ возьмем последовательность $\{\delta_n\}$, $\delta_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$, и все дальнейшие рассуждения будем проводить для этой последовательности.

В случае первой возможности существует число δ_0 такое, что для всех чисел $\delta \geq \delta_0$ выполнено неравенство $\delta/\sqrt{1 + \alpha^2(\delta)} \geq |\underline{ln}_x(p', 0)| + |d_2^0 + \varepsilon_0|$. Поэтому справедлива оценка

$$\underline{ln}_x(p', (-\delta, d_2^0 + \varepsilon_0)) \geq -|\underline{ln}_x(p', 0)| + \delta/\sqrt{1 + \alpha^2(\delta)} - |d_2^0 + \varepsilon_0| > 0, \quad \forall \delta \geq \delta_0.$$

Во втором случае получаем стремление $\alpha(\delta) \rightarrow +\infty$ при $\delta \rightarrow +\infty$. Выберем произвольное число l_0 , удовлетворяющее неравенству $l_0 > |d_2^0 + \varepsilon_0|$. Для этого числа l_0 возьмем число $\beta_0 > 0$ из (9), а для данного β_0 существует число δ_0 такое, что для всех $\delta \geq \delta_0$ справедливо неравенство $\alpha(\delta) > \beta_0$. Из стремления $\alpha(t(k, \delta_0)) \rightarrow \alpha(\delta_0)$ при $k \rightarrow +\infty$ следует существование числа $k_0 = k(\delta_0)$ такого, что для всех $k \geq k_0$ выполнено неравенство

$\alpha(t(k, \delta_0)) \geq \beta_0$, а из стремления $\|t(k, \delta_0)\| \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$ – справедливость оценки $\|t(k, \delta_0)\| \geq \beta_0$ для всех номеров $k \geq \tilde{k}(\delta_0)$. Возьмем число $k' = \max\{k(\delta_0), \tilde{k}(\delta_0)\}$ и из неравенства (9) получим оценку снизу $R_x^1(p', 0, t(k, \delta_0)) \geq l_0, \forall k \geq k'$. Тогда получим неравенства $\underline{ln}_x(p', (-\delta_0, d_2^0 + \varepsilon_0)) \geq l_0 + \delta/\sqrt{1 + \alpha^2(\delta)} - |d_2^0 + \varepsilon_0| > 0$. Из непрерывности функции $\underline{ln}_x(p', (d_1, d_2^0 + \varepsilon_0))$ по d_1 на отрезке $[-\delta_0, d_1^0]$ и неравенств (10), (11) по теореме о промежуточных значениях вытекает существование числа $\tilde{d}_1 \in [-\delta_0, d_1^0]$ такого, что выполнено равенство

$$\underline{ln}_x(p', (\tilde{d}_1, d_2^0 + \varepsilon_0)) = 0. \tag{12}$$

Покажем справедливость неравенства

$$\underline{ln}_x(p', (\tilde{d}_1 + \tilde{\varepsilon}, d_2^0 + \varepsilon_0)) < 0, \quad \forall \tilde{\varepsilon} > 0. \tag{13}$$

Пусть нижний предел $\underline{ln}_x(p', (\tilde{d}_1, d_2^0 + \varepsilon_0))$ реализуется по последовательности $\{\tau(k)\} \uparrow +\infty$, по лемме 1 эту последовательность можно считать удовлетворяющей неравенствам

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \ln \tau_1(k) / \ln \tau_2(k) \leq 1.$$

Если выполнено строгое неравенство $\lim_{k \rightarrow \infty} \ln \tau_1(k) / \ln \tau_2(k) > 0$, то справедлива оценка

$$\underline{ln}_x(p', (\tilde{d}_1 + \tilde{\varepsilon}, d_2^0 + \varepsilon_0)) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} R_x^1(p', (\tilde{d}_1 + \tilde{\varepsilon}, d_2^0 + \varepsilon_0), \tau(k)) < 0,$$

устанавливающая (13). Если же выполнено равенство $\lim_{k \rightarrow \infty} \ln \tau_1(k) / \ln \tau_2(k) = 0$, то предел $\lim_{k \rightarrow \infty} R_x^1(p', 0, \tau(k)) = +\infty$, а значит, справедливо равенство $\underline{ln}_x(p', (\tilde{d}_1, d_2^0 + \varepsilon_0)) = +\infty$, противоречащее (12).

Тем самым установлено включение $(\tilde{d}_1, d_2^0 + \varepsilon_0) \in \underline{D}_x(p')$, означающее неограниченность сверху левого граничного нижнего степенного множества. Теорема 3 полностью доказана.

Замечание. Если нижнее степенное множество $\underline{D}_x(p)$ нетривиального решения $x(t)$ системы Пфаффа (1) непусто, то для нижнего характеристического вектора $p \in P_x$ существует конечный предел $\underline{ln}_x(p, 0) = \underline{c}_x(p) / \sqrt{2}$.

Выше показано, что непустое граничное нижнее степенное множество нетривиального решения системы Пфаффа (1) может как совпадать с прямой $d_1 + d_2 = \underline{c}_x(p)$ двумерной плоскости, так и не содержать никакого отрезка этой прямой. Поэтому представляет интерес критерий принадлежности отрезка прямой $d_1 + d_2 = \underline{c}_x(p)$ граничному нижнему степенному множеству, который содержит следующая

Теорема 4. Пусть нижнее характеристическое множество P_x нетривиального решения $x(t)$ системы (1) состоит более чем из одной точки. Луч $D \equiv \{d \in R^2 : d_1 + d_2 = \underline{c}_x(p'), d_1 \geq \max\{\underline{c}_x(p'), 0\}\}$ (луч $D \equiv \{d \in R^2 : d_1 + d_2 = \underline{c}_x(p''), d_1 \leq \min\{\underline{c}_x(p''), 0\}\}$) прямой $d_1 + d_2 = \underline{c}_x(p')$ (прямой $d_1 + d_2 = \underline{c}_x(p'')$) принадлежит левому $\underline{D}_x(p')$ (правому $\underline{D}_x(p'')$) граничному нижнему степенному множеству этого решения тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{t(k)\} \uparrow +\infty$, реализующая нижний предел $\underline{ln}_x(p', 0)$ (предел $\underline{ln}_x(p'', 0)$) и удовлетворяющая условию $\lim_{k \rightarrow \infty} \ln t_1(k) / \|\ln t(k)\| = 1/\sqrt{2}$.

Доказательство. Установим сначала достаточность теоремы 4. Для этого возьмем любую точку $d \in D$ луча D и покажем, что она содержится в левом граничном нижнем степенном множестве $\underline{D}_x(p')$. Пусть нижний предел $\underline{ln}_x(p', d)$ реализуется по последовательности $\{\tau(k)\} \uparrow +\infty$ из леммы 1. Тогда выполнены неравенства $0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \ln \tau_1(k) / \|\ln \tau(k)\| \leq 1/\sqrt{2}$ и $1/\sqrt{2} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \ln \tau_2(k) / \|\ln \tau(k)\| \leq 1$. В силу замечания без ограничения общности можно считать, что либо существует конечный предел $\lim_{k \rightarrow \infty} R_x^1(p', 0, \tau(k)) \geq \underline{c}_x(p') / \sqrt{2}$, либо справедливо равенство $\lim_{k \rightarrow \infty} R_x^1(p', 0, \tau(k)) = +\infty$. В случае первой возможности получаем неравенства

$$\underline{ln}_x(p', d) = \lim_{k \rightarrow \infty} R_x^1(p', 0, \tau(k)) - d_1 \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \tau_1(k)}{\|\ln \tau(k)\|} + (d_1 - \underline{c}_x(p')) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \tau_2(k)}{\|\ln \tau(k)\|} \geq$$

$$\geq \frac{c_x(p')}{\sqrt{2}} - \frac{d_1}{\sqrt{2}} + \frac{d_1 - c_x(p')}{\sqrt{2}} = 0, \quad d \in D,$$

а в случае второй возможности – равенство $\underline{ln}_x(p', d) = +\infty$. По последовательности $\{t(k)\} \uparrow +\infty$ имеем равенство $\lim_{k \rightarrow \infty} R_x^1(p', d, t(k)) = c_x(p')/\sqrt{2} - d_1/\sqrt{2} + (d_1 - c_x(p'))/\sqrt{2} = 0$, тем самым для точки $d \in D$ луча D установлено первое определяющее свойство (2₁) нижней характеристической степени. Второе же определяющее свойство (2₂) нижней характеристической степени также показывается с помощью последовательности $\{t(k)\}$. Таким образом, полностью доказана принадлежность луча D левому граничному нижнему степенному множеству $\underline{D}_x(p')$.

Теперь установим необходимость теоремы. Пусть луч D содержится в левом граничном нижнем степенном множестве $\underline{D}_x(p')$. Тогда для любой точки $d \in D$ этого луча справедливо равенство (2₁).

Покажем, что по всякой последовательности $\{t(k)\} \uparrow +\infty$, реализующей нижний предел $\underline{ln}_x(p', d) = 0$, $d \in D$, и удовлетворяющей лемме 1, реализуется нижний предел $\underline{ln}_x(p', 0)$. Предположим противное – существует последовательность $\{t(k)\} \uparrow +\infty$, реализующая нижний предел $\underline{ln}_x(p', d) = 0$, $d \in D$, и удовлетворяющая лемме 1, по которой не реализуется нижний предел $\underline{ln}_x(p', 0)$. Так как по последовательности $\{t(k)\}$ не реализуется нижний предел $\underline{ln}_x(p', 0)$, то, не ограничивая общности, можно считать, что либо существует конечный предел $\lim_{k \rightarrow \infty} R_x^1(p', 0, t(k)) > c_x(p')/\sqrt{2}$, либо справедливо равенство $\lim_{k \rightarrow \infty} R_x^1(p', 0, t(k)) = +\infty$. В первом возможном случае получаем неравенства

$$0 = \underline{ln}_x(p', d) = \lim_{k \rightarrow \infty} R_x^1(p', 0, t(k)) - d_1 \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln t_1(k)}{\|\ln t(k)\|} + \\ + (d_1 - c_x(p')) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln t_2(k)}{\|\ln t(k)\|} > \frac{c_x(p')}{\sqrt{2}} - \frac{d_1}{\sqrt{2}} + \frac{d_1 - c_x(p')}{\sqrt{2}} = 0,$$

а во втором случае – равенство $\underline{ln}_x(p', d) = +\infty$, также противоречащее условию (2₁). Итак, показано, что по всякой последовательности, реализующей нижний предел $\underline{ln}_x(p', d) = 0$, $d \in D$, и удовлетворяющей лемме 1, реализуется нижний предел $\underline{ln}_x(p', 0)$.

Возьмем любую точку $d^0 \in D$ луча D , для которой $d_1^0 > 0$. Пусть нижний предел $\underline{ln}_x(p', d^0) = 0$ реализуется по последовательности $\{t(k)\} \uparrow +\infty$, удовлетворяющей лемме 1. Тогда по последовательности $\{t(k)\}$ реализуется нижний предел $\underline{ln}_x(p', 0)$. Для доказательства необходимости остается показать справедливость равенства $\theta_1 \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \ln t_1(k)/\|\ln t(k)\| = 1/\sqrt{2}$. В силу того что по последовательности $\{t(k)\}$ реализуются нижние пределы $\underline{ln}_x(p', d^0) = 0$ и $\underline{ln}_x(p', 0) = c_x(p')/\sqrt{2}$, получаем равенства

$$0 = \underline{ln}_x(p', d^0) = c_x(p')/\sqrt{2} - d_1^0 \lim_{k \rightarrow \infty} \ln t_1(k)/\|\ln t(k)\| + (d_1^0 - c_x(p')) \times \\ \times \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{1 - (\ln t_1(k)/\|\ln t(k)\|)^2} = c_x(p')/\sqrt{2} - d_1^0 \theta_1 + (d_1^0 - c_x(p')) \sqrt{1 - \theta_1^2} \equiv \varphi(\theta_1). \quad (14)$$

Очевидно, что $\theta_1 = 1/\sqrt{2}$ является корнем этого уравнения. Покажем, что других корней у уравнения (14) нет. Для этого вычислим производную функции $\varphi(\theta_1)$:

$$\varphi'(\theta_1) = -d_1^0 + (d_1^0 - c_x(p'))(-2\theta_1)/\sqrt{1 - \theta_1^2} < 0$$

в силу того, что точка d^0 лежит на луче D и справедливо неравенство $d_1^0 > 0$. Поэтому функция $\varphi(\theta_1)$ строго монотонно убывает. Следовательно, уравнение (14) имеет единственный корень $\theta_1 = 1/\sqrt{2}$, а это и доказывает теорему 4 для левого граничного нижнего степенного множества. Для правого граничного нижнего степенного множества теорема 4 устанавливается совершенно аналогично. Теорема 4 полностью доказана.

Для верхних характеристических степеней [9] справедливы аналогичные приведенным выше результатам теоремы 2'–4'.

Теорема 2'. Пусть характеристическое множество Λ_x решения $x(t) \neq 0$ системы (1) состоит более чем из одной точки. Тогда непустое левое $\overline{D}_x(\lambda')$ (правое $\overline{D}_x(\lambda'')$) граничное верхнее степенное множество этого решения есть замкнутая выпуклая вниз монотонно убывающая неограниченная справа и снизу (слева и сверху) кривая двумерной плоскости, имеющая отрицательный не меньший (не больший) -1 угловой коэффициент всякой своей касательной.

Теорема 3'. Пусть множество Λ_x состоит более чем из одной точки. Непустое левое $\overline{D}_x(\lambda')$ (правое $\overline{D}_x(\lambda'')$) граничное нижнее степенное множество как кривая двумерной плоскости не ограничено слева (снизу) тогда и только тогда, когда существует бесконечный предел

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \ln t_1 / \ln t_2 \rightarrow \infty}} R_x^1(\lambda', 0, t) = -\infty \left(\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \ln t_2 / \ln t_1 \rightarrow \infty}} R_x^1(\lambda'', 0, t) = -\infty \right).$$

Теорема 4'. Пусть характеристическое множество Λ_x нетривиального решения $x(t)$ системы (1) состоит более чем из одной точки. Луч $\{d \in R^2 : d_1 + d_2 = \overline{c}_x(\lambda'), d_1 \geq \max\{\overline{c}_x(\lambda'), 0\}\}$ (луч $\{d \in R^2 : d_1 + d_2 = \overline{c}_x(\lambda''), d_1 \leq \min\{\overline{c}_x(\lambda''), 0\}\}$) прямой $d_1 + d_2 = \overline{c}_x(\lambda')$ (прямой $d_1 + d_2 = \overline{c}_x(\lambda'')$) принадлежит левому $\overline{D}_x(\lambda')$ (правому $\overline{D}_x(\lambda'')$) граничному верхнему степенному множеству этого решения тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{t(k)\} \uparrow +\infty$, реализующая верхний предел $\overline{\ln}_x(\lambda', 0)$ (предел $\overline{\ln}_x(\lambda'', 0)$) и удовлетворяющая условию $\lim_{k \rightarrow \infty} \ln t_1(k) / \|\ln t(k)\| = 1/\sqrt{2}$.

Утверждения этих теорем являются прямым следствием того факта, что верхняя характеристическая степень $\overline{d}_x(\lambda)$ нетривиального решения $x(t)$ системы (1), соответствующая характеристическому вектору $\lambda[x]$, равна нижней характеристической степени $\underline{d}_{1/\|x\|}(p)$ функции $1/\|x(t)\|$, соответствующей нижнему характеристическому вектору $p[1/\|x\|] = -\lambda[x]$, взятой с противоположным знаком, т.е. $\overline{d}_x(\lambda) = -\underline{d}_{1/\|x\|}(p)$, и справедливости теорем 2–4 для любой функции $x : R_{\geq 1}^2 \rightarrow R^n \setminus \{0\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гайшун И.В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. Мн., 1983.
2. Гайшун И.В. Линейные уравнения в полных производных. Мн., 1989.
3. Изобов Н.А. // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 12. С. 1623–1630.
4. Крупчик Е.Н. // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 7. С. 899–908.
5. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. М., 1967.
6. Изобов Н.А. // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 6. С. 857–858.
7. Изобов Н.А. // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 6. С. 738–744.
8. Грудо Э.И. // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 12. С. 2115–2128.
9. Ласый П.Г. К теории характеристических вектор-степеней решений линейных систем Пфаффа. Мн., 1982. 23 с. (Препринт / Ин-т математики АН БССР: 14).

Институт математики НАН Беларуси,
Белорусский государственный университет

Поступила в редакцию
07.08.2000 г.