

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.7

О ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЯХ МЕЖДУ РЕШЕНИЯМИ ПЯТОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

© 2001 г. В. И. Громак, Г. В. Филипук

В настоящей работе исследуются свойства преобразований Беклунда, строятся нелинейные функциональные соотношения для решений пятого уравнения Пенлеве

$$w'' = \frac{3w-1}{2w(w-1)}w'^2 - \frac{w'}{z} + \frac{(w-1)^2}{z^2} \left(\alpha w + \frac{\beta}{w} \right) + \frac{\gamma w}{z} + \frac{\delta w(w+1)}{w-1}, \quad (P_5)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – произвольные комплексные постоянные, а также изучается связь между решениями пятого и третьего уравнений Пенлеве.

Для уравнения (P_5) в работе [1] (см. также [2, с. 114; 3–6]) построены преобразования Беклунда, позволяющие, в частности, строить новые решения по известным, а также указаны условия существования однопараметрических и рациональных решений. В [5] (см. также [2, с. 91]) найдена связь между решениями уравнений (P_5) и (P_3) при специальных соотношениях между параметрами. В настоящей работе эти соотношения расширяются.

1. О преобразованиях Беклунда. Для уравнения (P_5) в случае $\delta \neq 0$ известны [1] преобразования Беклунда, которые устанавливают соотношения между решениями уравнения при различных значениях параметров.

Теорема 1. Пусть $w = w(z, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ является решением уравнения (P_5) при некоторых значениях параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 0$ таким, что

$$F_1(w) = zw' - \varepsilon_1 cw^2 + (\varepsilon_1 c - \varepsilon_2 a + \varepsilon_3 kz)w + \varepsilon_2 a \neq 0, \quad (1)$$

где $c^2 = 2\alpha$, $a^2 = -2\beta$, $k^2 = -2\delta$. Тогда преобразование

$$T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3} : w(z, \alpha, \beta, \gamma, \delta) \rightarrow w_1(z, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1) = 1 - 2\varepsilon_3 kz w F_1^{-1}(w) \quad (2)$$

определяет решение $w_1(z, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$ уравнения (P_5) при значениях параметров

$$\alpha_1 = -\frac{1}{16\delta}[\gamma + \varepsilon_3 k(1 - \varepsilon_2 a - \varepsilon_1 c)]^2, \quad \beta_1 = \frac{1}{16\delta}[\gamma - \varepsilon_3 k(1 - \varepsilon_2 a - \varepsilon_1 c)]^2, \quad \gamma_1 = \varepsilon_3 k(\varepsilon_2 a - \varepsilon_1 c), \quad \delta_1 = \delta, \quad (3)$$

где $\varepsilon_i^2 = 1$, $i = 1, 2, 3$.

Решение $w(z, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$, для которого выполняется условие (1), т.е. $F_1(w) \neq 0$, и которое называется решением нулевого уровня, порождает восемь различных решений уравнения (P_5) первого уровня $w_i(z, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i)$, $i = \overline{1, 8}$, в зависимости от выбора ветвей $c = \sqrt{2\alpha}$, $a = \sqrt{-2\beta}$, $k = \sqrt{-2\delta}$, которые определяются выбором $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ соответственно. Решения, полученные после n -кратного применения преобразования теоремы 1, будем называть решениями n -го уровня, которым соответствует мультииндекс i_1, \dots, i_n , где $i_j = \overline{1, 8}$, $j = \overline{1, n}$, $n > 1$.

Покажем, что значение параметра ε_3 можно фиксировать и, следовательно, можно рассматривать решения уравнения (P_5) n -го уровня в зависимости от выбора ветвей, которые определяются выбором параметров ε_1 и ε_2 при фиксированном $\varepsilon_3 = 1$. В доказательстве этого утверждения и приведенных ниже теорем существенно будут использованы следующие леммы.

Лемма 1. Изменение параметра ε_3 для решений первого уровня равносильно инверсии $T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, 1} w(z) = (T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, -1} w(z))^{-1}$.

Доказательство. Утверждение леммы 1 следует непосредственно из преобразования (2), (3). Действительно, пусть w_i и w_{i+4} , $i = \overline{1,4}$, являются решениями уравнения (P_5) , которые получены с помощью преобразования теоремы 1 из решения $w(z)$ при $\varepsilon_3 = 1$ и $\varepsilon_3 = -1$ соответственно. Воспользовавшись формулой (2), убеждаемся в справедливости соотношения $w_i(z, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i) = w_{i+4}^{-1}(z, -\beta_i, -\alpha_i, -\gamma_i, \delta_i)$.

Лемма 2. Справедливо соотношение $T_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3} \circ T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3} w(z) = T_{\sigma_1, \sigma_2, -\sigma_3} \circ T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, -\varepsilon_3} w(z)$, где $\sigma_i^2 = \varepsilon_i^2 = 1$, $i = 1, 2, 3$.

Доказательство. Из леммы 1 и преобразования (2), (3) непосредственно получаем, что если $\tilde{w}(z) = T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3} w(z)$ и $\check{w} = T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, -\varepsilon_3} w(z)$, то $\check{w}(z) = \tilde{w}^{-1}(z)$. Следовательно, $T_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3} \tilde{w}(z) = T_{\sigma_1, \sigma_2, -\sigma_3} \check{w}^{-1}(z)$.

Заметим, что соотношение леммы 2 свидетельствует о коммутативности построения решений в зависимости от выбора ветвей параметров при преобразовании (2), (3).

Таким образом, решения второго уровня, полученные с помощью двукратного применения преобразования (2), (3) для фиксированной ветви ε_3 , совпадают при одинаковых значениях параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Лемма 3. Двукратное применение преобразования теоремы 1 при следующем выборе ветвей параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$: $T_{1, -1, \varepsilon_3} \circ T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3} : w(z) \rightarrow w^{-1}(z)$ равносильно инверсии исходного решения.

Доказательство леммы 3 проверяется непосредственно с помощью двукратного применения преобразования теоремы 1.

Из лемм 1–3 следует

Теорема 2. Двукратное применение преобразования теоремы 1 при выборе ветвей параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ равносильно тождественному преобразованию $I = T_{1, -1, -\varepsilon_3} \circ T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3} : w(z) \rightarrow w(z)$. Четырехкратное применение преобразования теоремы 1 при фиксированном $\varepsilon_3 = 1$ равносильно тождественному преобразованию $I = T_{1, -1, 1} \circ T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, 1} \circ T_{1, -1, 1} \circ T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, 1} : w(z) \rightarrow w(z)$.

Таким образом, в силу утверждений теоремы 2 значение параметра ε_3 можно фиксировать, полагая в дальнейшем, например, $\varepsilon_3 = 1$.

Так как $\delta \neq 0$, без ограничения общности считаем $\delta = -1/2$, что всегда можно получить масштабным преобразованием. Исследуем нелинейные функциональные соотношения, которые связывают решения уравнения (P_5) при последовательном применении преобразования (2), (3). Заметим, что полученные функциональные соотношения могут быть рассмотрены как альтернативные формы дискретных уравнений Пенлеве [7]. При фиксированном $\varepsilon_3 = 1$ решение нулевого уровня $w(z, \alpha, \beta, \gamma, -1/2)$, для которого выполняется условие (1), порождает четыре различных решения уравнения (P_5) первого уровня $w_i(z, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, -1/2)$, $i = \overline{1,4}$, в зависимости от выбора ветвей, определяемых выбором $\varepsilon_1, \varepsilon_2$:

$$T_{1,1,1}w = w_1 = 1 - 2zw(zw' - cw^2 + (c - a + z)w + a)^{-1}, \tag{4}$$

$$T_{1,-1,1}w = w_2 = 1 - 2zw(zw' - cw^2 + (c + a + z)w - a)^{-1}, \tag{5}$$

$$T_{-1,1,1}w = w_3 = 1 - 2zw(zw' + cw^2 + (-c - a + z)w + a)^{-1}, \tag{6}$$

$$T_{-1,-1,1}w = w_4 = 1 - 2zw(zw' + cw^2 + (-c + a + z)w - a)^{-1}. \tag{7}$$

Замечание. В дальнейшем мы рассматриваем общий случай, когда $a \neq 0$, $c \neq 0$, поскольку в случае $a = 0$ для решений выполняются равенства $w_1 = w_2$ и $w_3 = w_4$, а также справедливо нелинейное функциональное соотношение $(1 - w_1)^{-1} - (1 - w_3)^{-1} = c(1 - w)z^{-1}$. При $c = 0$ получаем, что $w_1 = w_3$, $w_2 = w_4$ и $(1 - w_1)^{-1} - (1 - w_2)^{-1} = a(1 - w)(zw)^{-1}$. В случае, когда оба параметра a и c одновременно равны нулю, все решения первого уровня при $\varepsilon_3 = 1$ совпадают и дальнейшее применение преобразования теоремы 1 возможно, если $w \neq \text{const} \times \exp(-\sqrt{-2\delta}z)$ при $\gamma = \sqrt{-2\delta}$.

Теорема 3. Решение нулевого уровня и любые два решения первого уровня алгебраически зависимы.

Доказательство. Исключая $w'(z)$ из (4)–(7), найдем в явном виде функциональные соотношения, связывающие решения нулевого уровня $w(z)$ и первого уровня $w_i(z)$, где $i = \overline{1, 4}$,

$$(1 - w_1)^{-1} - (1 - w_2)^{-1} = a(1 - w)(zw)^{-1}, \quad (8)$$

$$(1 - w_1)^{-1} - (1 - w_3)^{-1} = c(1 - w)z^{-1}, \quad (9)$$

$$(1 - w_1)^{-1} - (1 - w_4)^{-1} = (1 - w)(cw + a)(zw)^{-1}, \quad (10)$$

$$(1 - w_2)^{-1} - (1 - w_3)^{-1} = (1 - w)(cw - a)(zw)^{-1}. \quad (11)$$

Заметим, что решения w_2 и w_4 связаны так же, как w_1 и w_3 в формуле (9), а решения w_3 и w_4 – как решения w_1 и w_2 в формуле (8) соответственно.

Отметим, что при значении параметра $\varepsilon_3 = -1$ справедливы функциональные соотношения, аналогичные (8)–(11), в которых произведена замена $w_i(z) \rightarrow w_{i+4}(z)$ и $z \rightarrow -z$.

Из формул (8)–(11) непосредственно получаем

$$(1 - w_1)^{-1} - (1 - w_2)^{-1} = (1 - w_3)^{-1} - (1 - w_4)^{-1}. \quad (12)$$

Теорема 4. Три произвольных решения первого уровня алгебраически зависимы.

Доказательство. Исключая из формул (8)–(11) функцию $w(z)$, получаем

$$w_4 = \frac{c(w_1 - w_2)(w_2 - 1) + w_2(a(w_1 - 1)(w_2 - 1) + (w_1 - w_2)z)}{a(w_1 - 1)(w_2 - 1) + (w_1 - w_2)(c(w_2 - 1) + z)}, \quad (13)$$

$$w_3 = \frac{a(w_1 - 1)w_1(w_2 - 1) + (w_1 - w_2)(c(w_1 - 1) + w_1z)}{a(w_1 - 1)(w_2 - 1) + (w_1 - w_2)(c(w_1 - 1) + z)}, \quad (14)$$

$$w_4 = \frac{a(w_1 - w_3)(w_3 - 1) + w_3(c(w_1 - 1)(w_3 - 1) + (w_3 - w_1)z)}{c(w_1 - 1)(w_3 - 1) + (w_1 - w_3)(a(w_3 - 1) - z)}, \quad (15)$$

$$w_3 = \frac{a(w_2 - w_4)(w_4 - 1) + w_4(c(1 - w_2)(w_4 - 1) + (w_2 - w_4)z)}{c(1 - w_2)(w_4 - 1) + (w_2 - w_4)(a(w_4 - 1) + z)}. \quad (16)$$

Соотношения (13)–(16) связывают три произвольных решения первого уровня, откуда и следует утверждение теоремы 4.

Из формул (8)–(16) непосредственно вытекают следующие функциональные соотношения, связывающие решения первого и второго уровней:

$$\frac{(w_1 - 1)(w_3 - w_2)}{(1 - w_3)(w_1 - w_2)} = \frac{(1 - w_4)(w_2 - w_3)}{(w_2 - 1)(w_4 - w_3)} = \frac{cw}{a} - 1,$$

$$\frac{w_1 + w_2(w_3 - 1) - w_3 + w_4(1 - w_1)}{(w_2 - w_1)(w_3 - w_4)} = \frac{cw}{a},$$

$$\frac{(1 - w_4)(w_1 - w_3)}{(w_1 - 1)(w_4 - w_3)} = \frac{(1 - w_1)(w_4 - w_2)}{(w_4 - 1)(w_1 - w_2)} = \frac{cw}{a},$$

$$\frac{(w_1 - w_4)(1 - w_2)(1 - w_3)}{(1 - w_1)(1 - w_4)(w_2 - w_3)} = \frac{(w_1 - w_4)(1 - w_2)^2(w_3 - w_4)}{(1 - w_4)^2(w_1 - w_2)(w_2 - w_3)} = \frac{cw + a}{cw - a},$$

$$(1 - w_1)^{-1} - (1 - w_4)^{-1} + (1 - w_2)^{-1} - (1 - w_3)^{-1} = 2c(1 - w)z^{-1},$$

$$(1 - w_1)^{-1} - (1 - w_4)^{-1} - (1 - w_2)^{-1} + (1 - w_3)^{-1} = 2a(1 - w)(zw)^{-1},$$

где $c^2 = 2\alpha$, $a^2 = -2\beta$.

Заметим, что вопрос построения функциональных соотношений, связывающих решения двух соседних уровней, рассматривался также в [5].

Пусть $w_{i,j}(z)$, $i, j = \overline{1,4}$, есть решения второго уровня, полученные с помощью двукратного применения преобразования (2), (3) к решению $w(z)$, т.е. $w_{i,j}(z, \alpha_{i,j}, \beta_{i,j}, \gamma_{i,j}, \delta_{i,j}) = T_{\sigma_1, \sigma_2, 1} \circ T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, 1} w(z, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$, где $\varepsilon_k^2 = \sigma_k^2 = 1$, $k = 1, 2$ (рис. 1).

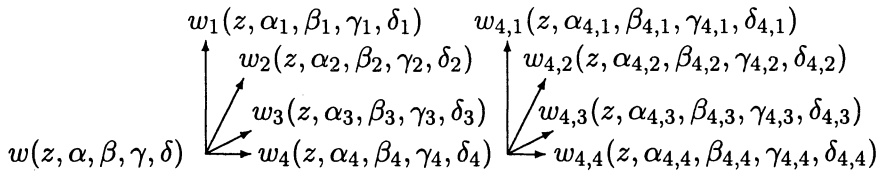


Рис. 1. Иерархия решений при последовательном применении преобразований теоремы 1.

Учитывая формулу (12) и лемму 3, легко получить нелинейное функциональное соотношение, связывающее решения нулевого и второго уровней $(1 - w_{i,1})^{-1} + (1 - w_{i,4})^{-1} + (w_{i,3} - 1)^{-1} = w(w - 1)^{-1}$, $i = \overline{1,4}$.

Получим нелинейные функциональные соотношения, связывающие решения нулевого, первого и второго уровней при последовательном применении преобразования теоремы 1. Пусть $w_i = T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, 1} w(z)$ и $w_{i,j} = T_{\sigma_1, \sigma_2, 1} w_i(z)$. Непосредственными вычислениями находим, что для $w_{i,1} = T_{1,1,1} w_i(z)$, $w_{i,2} = T_{1,-1,1} w_i(z)$, $w_{i,3} = T_{-1,1,1} w_i(z)$ и $w_{i,4} = T_{-1,-1,1} w_i(z)$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} w(w - 1)^{-1} - (1 - w_{i,1})^{-1} &= -a_1(1 - w_i)(zw_i)^{-1}, \quad w_{i,2} = w^{-1}, \\ w(w - 1)^{-1} - (1 - w_{i,3})^{-1} &= (1 - w_i)(c_1 w_i - a_1)(zw_i)^{-1}, \\ w(w - 1)^{-1} - (1 - w_{i,4})^{-1} &= c_1(1 - w_i)z^{-1}, \end{aligned}$$

где выбор ветвей c_1 , a_1 фиксирован и $c_1 = \sqrt{2\alpha_1}$, $a_1 = \sqrt{-2\beta_1}$.

2. Связь между решениями уравнения (P_5) при $\delta = 0$ и $\delta \neq 0$. В этом пункте мы расширим приведенные в [6, 8, 9] (см. также [2, с. 118]) соотношения между решениями уравнения (P_5) при $\delta = 0$ и $\delta \neq 0$, а также исследуем взаимосвязь между полученными ниже преобразованиями и преобразованием (2), (3).

Теорема 5. Пусть $w = w(t, \alpha/4, -\alpha/4, 0, 4\gamma)$, $z = t^2$ - решение уравнения (P_5) . Тогда преобразование

$$T : w \rightarrow \tilde{w} = (4w)^{-1}(w + 1)^2 \tag{17}$$

определяет решение $\tilde{w}(z, \alpha, 0, \gamma, 0)$ уравнения (P_5) .

Доказательство теоремы 5 проверяется непосредственно с помощью подстановки формулы (17) в уравнение (P_5) .

Таким образом, преобразование (17) связывает решения уравнения (P_5) при значениях параметров $\delta = 0$ и $\delta \neq 0$.

Замечание. В работе [6] соотношение (17) приведено при $\alpha = 0$.

Получим еще два преобразования, связывающие решения уравнения (P_5) при $\delta = 0$ и $\delta \neq 0$. Для этого рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$df/dt = gf^2 + g + \sqrt{2\alpha}/t, \quad dg/dt = -fg^2 - g/t + f. \tag{18}$$

Исключая из системы (18) функцию $g(t)$, приходим к уравнению

$$t^2(1 + f^2)f'' = t^2 f f'^2 - t(1 + f^2)f' + 2t^2 f^3 + t^2 f^5 + (t^2 - 2\alpha)f, \tag{19}$$

которое подстановкой $\tilde{w}(z) = f^2(f^2 + 1)^{-1}$, $z = t^2$ приводится к уравнению (P_5) с параметрами α , $\beta = \delta = 0$, $\gamma = 1/2$. Так как функции $g(t)$ и $f(t)$ входят линейно в правую часть соответственно первого и второго уравнений системы (18), то, исключая $f(t)$, имеем

$$t^2(g^2 - 1)g'' = t^2 g g'^2 + t(1 - g^2)g' - t^2 g^5 - \sqrt{2\alpha} t g^4 + 2t^2 g^3 + \sqrt{2\alpha} t g^2 - (t^2 + 1)g - \sqrt{2\alpha}. \tag{20}$$

Положив в уравнении (20) $w = (g + 1)(g - 1)^{-1}$, для определения $w(t)$ получаем уравнение (P_5) при значениях параметров $\alpha = 1/8$, $\beta = -1/8$, $\gamma = 2\sqrt{2\alpha}$, $\delta = 2$. Таким образом, справедлива

Теорема 6. Пусть $w(t)$ есть решение уравнения (P_5) при значениях параметров $\alpha = 1/8$, $\beta = -1/8$, $\gamma = 2\sqrt{-2s}$, $\delta = 2$. Тогда преобразование $S : w \rightarrow \tilde{w}$, где $\tilde{w}(z) = f^2(t)(f^2(t) + 1)^{-1}$, $f(t) = [2tw'(t) + 1 - w^2](4wt)^{-1}$, $z = t^2$, определяет решение $\tilde{w}(z)$ уравнения (P_5) при значениях параметров $\tilde{\alpha} = s$, $\tilde{\beta} = 0$, $\tilde{\gamma} = 1/2$, $\tilde{\delta} = 0$.

Приведем еще одно преобразование, полученное в [8], которое связывает решения уравнения (P_5) при $\delta = 0$ и $\delta \neq 0$. Для этого рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$df/dt = g(h + h^{-1}f^2) - (p + 1)f/t, \quad dg/dt = f(h - h^{-1}g^2) + pg/t, \quad (21)$$

где p , $h \neq 0$ - постоянные параметры.

Исключая из системы (21) функцию $g(t)$, получаем уравнение

$$(h^2 + f^2)(f' + tf'') = tf f'^2 + (h^2 + f^2)^2 tf + (1 + p)^2 f h^2/t, \quad (22)$$

которое подстановкой $\tilde{w} = f^2/(h^2 + f^2)$, $z = t^2$ приводится к уравнению (P_5) с параметрами $\tilde{\alpha} = (1 + p)^2/2$, $\tilde{\beta} = 0$, $\tilde{\gamma} = h^2/2$, $\tilde{\delta} = 0$. Исключая $f(t)$, имеем

$$g'' = gg'^2/(g^2 - h^2) - g'/t + g(h^2 - g^2) + p^2 h^2 g/(h^2 - g^2). \quad (23)$$

Положив в уравнении (23) $g(t) = h(w(t) + 1)/(w(t) - 1)$, для определения $w(t)$ получаем уравнение (P_5) при значениях параметров $\alpha = p^2/8$, $\beta = -p^2/8$, $\gamma = 0$, $\delta = 2h^2$, $h \neq 0$. Таким образом, справедлива

Теорема 7 [8]. Пусть $w(t)$ есть решение уравнения (P_5) при значениях параметров $\alpha = p^2/8$, $\beta = -p^2/8$, $\gamma = 0$, $\delta = 2h^2$, $h \neq 0$, где p , h - постоянные параметры. Тогда преобразование $G : w \rightarrow \tilde{w}$, где $\tilde{w}(z) = f^2(t)/(h^2 + f^2(t))$, $f(t) = w'(t)/(2w(t)) - p[w(t) - w^{-1}(t)]/(4t)$, $z = t^2$, определяет решение $\tilde{w}(z)$ уравнения (P_5) при значениях параметров $\tilde{\alpha} = (1 + p)^2/2$, $\tilde{\beta} = 0$, $\tilde{\gamma} = h^2/2$, $\tilde{\delta} = 0$.

Покажем, что преобразования, полученные в теоремах 6, 7, являются композициями построенных выше преобразований $T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ и T . Здесь мы переобозначили для удобства преобразование $T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3}$ теоремы 1 через $T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$, где, согласно предыдущему пункту, зафиксировали параметр $\varepsilon_3 = 1$.

Теорема 8. Справедливы композиции $G = T \circ T_{-1, -1}$, $S = T \circ T_{1, 1}$.

Доказательство. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (21). Положим в уравнении (22) $w_2 = (f - ih)/(f + ih)$, где $i^2 = -1$. В этом случае уравнение (22) приводится к уравнению (P_5) относительно w_2 с параметрами $\alpha_2 = (1 + p)^2/8$, $\beta_2 = -(1 + p)^2/8$, $\gamma_2 = 0$, $\delta_2 = 2h^2$. При этом выполняются соотношения $w_2 = T_{-1, -1}w$, $\tilde{w} = Tw_2$. Таким образом, $\tilde{w} = T \circ T_{-1, -1}w$ и, следовательно, $G = T \circ T_{-1, -1}$. Аналогично для доказательства второй части теоремы 8 делаем замену $w_2 = (f - i)/(f + i)$ в уравнении (19). Таким образом, получаем, что $w_2 = T_{1, 1}w$, $\tilde{w} = Tw_2$ и, следовательно, $\tilde{w} = T \circ T_{1, 1}w$, что и требовалось доказать.

3. Связь между решениями уравнений (P_3) и (P_5) . Известно [6, 8, 9] (см. также [2, с. 91]), что при некоторых соотношениях между параметрами третье уравнение может быть приведено к пятому уравнению Пенлеве. С помощью преобразования теоремы 5 и теоремы об общем виде параметров при последовательном применении преобразования Беклунда для $\delta \neq 0$ из работы [1] можно построить общий вид параметров, при которых уравнение (P_5) приводится к третьему уравнению Пенлеве.

Приведем для доказательства дальнейших утверждений теорему об общем виде параметров при последовательном применении преобразования Беклунда (2), (3) [8].

Теорема 9. Последовательное применение преобразования (2), (3) к решению $w(z, \alpha, \beta, \gamma, -1/2)$ приводит к решению $\tilde{w}(z, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, -1/2)$, где параметры имеют один из следующих видов:

$$\tilde{\alpha} = (p + n_1)^2/2, \quad \tilde{\beta} = -(q + n_2)^2/2, \quad \tilde{\gamma} = \gamma + n_3, \quad (24)$$

$$\tilde{\alpha} = (q + n_2)^2/2, \quad \tilde{\beta} = -(p + n_1)^2/2, \quad \tilde{\gamma} = -\gamma + n_3, \quad (25)$$

$$\tilde{\alpha} = (-\varepsilon p - \nu q + \varepsilon_1 \gamma + 2n_1 + 1)^2/8, \quad \tilde{\beta} = -(-\varepsilon p - \nu q - \varepsilon_1 \gamma + 2n_2 + 1)^2/8, \quad \tilde{\gamma} = (-\varepsilon p + \nu q)\varepsilon_1 + n_3, \quad (26)$$

$$\tilde{\alpha} = (-\varepsilon p + \nu q - \varepsilon_1 \gamma + 2n_1 + 1)^2/8, \quad \tilde{\beta} = -(\varepsilon p - \nu q - \varepsilon_1 \gamma + 2n_2 + 1)^2/8, \quad \tilde{\gamma} = (\varepsilon p + \nu q - 1)\varepsilon_1 + n_3, \quad (27)$$

где $s = 2n_4$, $p^2 = 2\alpha$, $q^2 = -2\beta$, $\nu^2 = \varepsilon^2 = \varepsilon_1^2 = 1$, $s = n_1 + n_2 + n_3$, $n_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1,4}$.

Справедлива

Теорема 10. Уравнение (P_5) при значениях параметров одного из видов

$$\alpha = (p + 2n_1)^2/8, \quad \beta = -(p + 2n_2)^2/8, \quad \gamma = n_3, \quad s = 2n_4, \quad (28)$$

$$\alpha = (p + 2n_1 + 1)^2/8, \quad \beta = -(p + 2n_2 + 1)^2/8, \quad \gamma = n_3, \quad s = 2n_4, \quad (29)$$

$$\alpha = (1 + 2n_1)^2/8, \quad \beta = -(1 + 2n_2)^2/8, \quad \gamma = n_3 \pm p, \quad (30)$$

где $s = n_1 + n_2 + n_3$, $n_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1,4}$, $p \notin \mathbb{Z}$, $\delta = -1/2$, приводится к третьему уравнению Пенлеве.

Доказательство. Формулы (28)–(30) следуют из формул теоремы 9 после подстановки в (24)–(27) параметров теоремы 5.

Из формул (28)–(30) непосредственно получаем

Следствие. Уравнение (P_5) при значениях параметров либо $\sqrt{2\alpha} - \sqrt{-2\beta} = n$, $\gamma = n_1$, $n + n_1 = 2n_2$, либо $\alpha = (1 + 2n_1)^2/8$, $\beta = -(1 + 2n_2)^2/8$, где $n, n_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, 2$, приводится к третьему уравнению Пенлеве.

Расширение связи между решениями уравнений (P_3) и (P_5) происходит с помощью теоремы 9 и следующего утверждения [2, с 118].

Теорема 11. Пусть $w = w(z, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ есть решение уравнения (P_5) при значениях параметров $\alpha = \beta = 0$. Тогда преобразование $F: w \rightarrow u = (w + 1)^2/(w - 1)^2$ определяет решение $u = u(z, -\gamma/4, \gamma/4, -\delta/8, \delta/8)$ уравнения (P_3) .

Итак, если в формулах (24)–(27) положить параметры $\alpha = \beta = 0$, получим, что пятое уравнение Пенлеве при значениях параметров либо $\sqrt{2\alpha} - \sqrt{-2\beta} = n$, $\gamma = n_1$, $n + n_1 = 2n_2 + 1$, либо $\alpha = n_1^2/2$, $\beta = -n_2^2/2$, $n, n_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2$, приводится к третьему уравнению Пенлеве.

Таким образом, объединяя приведенные выше результаты, получаем следующее утверждение.

Теорема 12. Пятое уравнение Пенлеве при значениях параметров либо $\sqrt{2\alpha} - \sqrt{-2\beta} = n$, $\gamma = n_1$, либо $\alpha = n_1^2/8$, $\beta = -n_2^2/8$, где $n, n_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2$, приводится к третьему уравнению Пенлеве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Громак В.И. // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 4. С. 740–742.
2. Громак В.И., Лукашевич Н.А. Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. Мн., 1990.
3. Громак В.И. // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 12. С. 2131–2135.
4. Громак В.И., Цегельник В.В. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1988. № 1. С. 41–49.
5. Громак В.И., Цегельник В.В. // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 7. С. 1118–1124.
6. Громак В.И. // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 2. С. 373–376.
7. Grammaticos B., Nijhoff F.W., Ramani A. // Painlevé Property. One Century Later. N.Y.; В.; Н.; Р.; Т., 1999. Р. 413–517.
8. Громак В.И. // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 10. С. 1674–1683.
9. Gromak V.I. // Painlevé Property. One Century Later. N.Y.; В.; Н.; Р.; Т., 1999. Р. 687–735.

Белорусский государственный университет

Поступила в редакцию
27.03.2000 г.