ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2001, том 37, № 2, с. 276–278

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.956.32

ГЛАДКОСТЬ СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ПОЛНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

© 2001 г. Ф. Е. Ломовцев

Гладкость сильных решений гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка с переменными областями определения операторных коэффициентов в случае двухчленной главной части изучалась в работах [1, 2]. В работе [3] исследовалась корректная разрешимость гиперболических дифференциально-операторных уравнений второго порядка с переменными областями определения с трехчленной главной частью. В настоящей работе изучается гладкость сильных решений гиперболических дифференциально-операторных уравнений второго порядка с переменными областями определения в случае трехчленной главной части. В приложениях к краевым задачам такими дифференциально-операторными уравнениями являются сингулярные гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных [3].

1. Постановка задачи. Пусть H – гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $|\cdot|$. На ограниченном интервале $]0,T[$ вещественной прямой $\mathbb{R}$ рассматривается задача Коши для дифференциального уравнения

$$\mathcal{L}u \equiv d^2u/dt^2 + B(t)du/dt + A(t)u = f, \quad t \in]0,T[, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$l_0 u \equiv u|_{t=0} = \varphi, \quad l_1 u \equiv (du/dt)|_{t=0} = \psi, \tag{2}$$

где u и f – функции переменной t со значениями в H; $A(t)$ и $B(t)$, $t \in \Theta$, – линейные неограниченные операторы в H с зависящими от t областями определения $D(A(t))$ и $D(B(t))$ соответственно; Θ – некоторое множество полной меры из $[0,T]$; φ и ψ – элементы из H.

Предполагается, что операторы $A(t)$, $t \in \Theta$, удовлетворяют следующим условиям.

A_1. Операторы $A(t)$, $t \in \Theta$, самосопряжены в H и удовлетворяют неравенствам $(A(t)u,u) \geq c_1(t)|u|^2$ $\forall u \in D(A(t))$, в которых постоянные $c_1(t) > 0$ не зависят от u.

A_2. Их обратные операторы $A^{-1}(t) \in L_\infty(]0,T[,\mathcal{L}(H))$, $t \in \Theta$, имеют на $]0,T[$ сильную регулярную производную [4] $dA^{-1}(t)/dt \in L_\infty(]0,T[,\mathcal{L}(H))$, для которой выполняются неравенства

$$-((dA^{-1}(t)/dt)g,g) \leq c_2(A^{-1}(t)g,g) \quad \forall g \in H,$$

где постоянная $c_2 \geq 0$ не зависит от g и t.

Предполагается, что операторы $B(t)$, $t \in \Theta$, удовлетворяют следующим условиям.

B_1. Области определения $D(A(t)) \subset D(B(t))$, $t \in \Theta$, операторы $B(t)A^{-1/2}(t) \in L_\infty(]0,T[,\mathcal{L}(H))$, где $A^{-1/2}(t)$ – обратные операторы к квадратным корням $A^{1/2}(t)$ операторов $A(t)$, $t \in \Theta$, и выполняются неравенства $-\mathrm{Re}\,(B(t)u,u) \leq c_3|u|^2$ $\forall u \in D(A(t))$, где постоянная $c_3 \geq 0$ не зависит от u и t.

B_2. Операторы $B(t)(dA^{-1}(t)/dt) \in L_\infty(]0,T[,\mathcal{L}(H))$ и выполняются неравенства

$$|(B(t)(dA^{-1}(t)/dt)g,v)| \leq c_4|g||A^{-1/2}(t)v| \quad \forall g,v \in H, \quad -\mathrm{Re}\,(B(t)u,A(t)u) \leq c_5|A^{1/2}(t)u|^2 \quad \forall u \in D(A(t)),$$

где постоянные $c_4, c_5 \geq 0$ не зависят от g, v, u и t.

При сделанных предположениях изучим гладкость сильных решений задачи Коши (1), (2) абстрактным методом, предложенным в [1].

2. Теоремы существования и единственности сильных решений. Сначала введем пространства и дадим определение сильных решений задачи Коши (1), (2). Известно [5], что при каждом $t \in \Theta$ для оператора $A(t)$ определены дробные степени $A^\alpha(t)$, $0 < \alpha < 1$, с областями определения $D(A^\alpha(t))$, в которых плотна $D(A(t))$. Наделяя векторные пространства $D(A^{q/2}(t)) \neq \{\emptyset\}$ эрмитовыми нормами $|v|_{q\,(t)} = |A^{q/2}(t)v|$, получим семейство гильбертовых пространств $W^q(t)$, $t \in \Theta$, $W^0(t) = H$.

В качестве пространства сильных решений возьмем банахово пространство E – пополнение множества $D(L) = \{u \in L_2(]0,T[,H) : u(t) \in D(A(t)),\ t \in \Theta;\ d^2u/dt^2,\ B(t)(du/dt),\ A(t)u \in L_2(]0,T[,H)\}$ по норме $\|u\|_E = [\sup\limits_{0<t<T}(|du(t)/dt|^2 + |A^{1/2}(t)u(t)|^2)]^{1/2}$.

Пусть $D(A(0)) \neq \{\emptyset\}$. В качестве пространства правых частей f и начальных данных φ и ψ возьмем гильбертово пространство $F = L_2(]0,T[,H) \times W^1(0) \times H$. Задаче Коши (1), (2) соответствует линейный неограниченный оператор $L \equiv \{\mathcal{L}, l_0, l_1\} : E \supset D(L) \to F$ с областью определения $D(L)$. Пусть этот оператор L удовлетворяет критерию замыкаемости линейных операторов в банаховых пространствах, т.е. из того, что $u_n \to 0$ в E и $Lu_n = \{\mathcal{L}u_n, l_0u_n, l_1u_n\} \to \mathcal{F} = \{f,\varphi,\psi\}$ в F при $n \to \infty$, следует, что $\mathcal{F} = 0$. Заметим, что для этого достаточно того, чтобы из $u_n \to 0$ в E и $\mathcal{L}u_n \to f$ в $L_2(]0,T[,H)$ при $n \to \infty$ следовало, что $f = 0$. Обозначим через $\overline{L}$ замыкание оператора L и через $D(\overline{L})$ его область определения. Решения операторного уравнения $\overline{L}u = \mathcal{F}$, $\mathcal{F} = \{f,\varphi,\psi\} \in F$, называются сильными решениями задачи Коши (1), (2).

Теперь выведем априорную оценку сильных решений задачи Коши (1), (2).

Теорема 1. *Пусть множество $D(L)$ плотно в $L_2(]0,T[,H)$ и оператор L допускает замыкание $\overline{L}$. Если выполняются условия A_1, A_2 и B_1, то существует такая постоянная $c_0 > 0$, не зависящая от u, что*

$$\|u\|_E \le c_0\|\overline{L}u\|_F \quad \forall u \in D(\overline{L}). \tag{3}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 из [1, 3].

Из теоремы 1 следует, что если сильное решение задачи Коши (1), (2) существует, то оно единственно и непрерывно зависит от f, φ и ψ.

Разрешимость задачи Коши (1), (2) дает

Теорема 2. *Пусть множество $D(L)$ плотно в $L_2(]0,T[,H)$ и оператор L допускает замыкание $\overline{L}$. Если выполняются условия A_1, A_2, B_1 и B_2 и операторы $dA^{-1}(t)/dt$ имеют сильную регулярную производную $d^2A^{-1}(t)/dt^2 \in L_\infty(]0,T[,\mathcal{L}(H))$, удовлетворяющую неравенствам*

$$|((d^2A^{-1}(t)/dt^2)g,v)| \le c_6|g||A^{-1/2}(t)v| \quad \forall g,v \in H, \quad c_6 \ge 0,$$

то для каждого $\mathcal{F} = \{f,\varphi,\psi\} \in F$ сильное решение $u \in E$ задачи Коши (1), (2) существует, единственно и $\|u\|_E \le c_0(\int_0^T |f(t)|^2dt + |\varphi|^2_{1(0)} + |\psi|^2)^{1/2}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2 из [1, 3].

Замечание 1. Тем же способом утверждение теоремы 1 (возможно, с большей постоянной c_0) и методом продолжения по параметру Шаудера–Ладыженской утверждение теоремы 2 распространяются на уравнения с младшей частью

$$d^2u/dt^2 + B(t)du/dt + A(t)u + \widetilde{B}(t)du/dt + \widetilde{A}(t)u = f, \tag{4}$$

где $\widetilde{B}(t), \widetilde{A}(t)A^{-1/2}(t) \in L_\infty(]0,T[,\mathcal{L}(H))$.

3. Гладкость сильных решений. Непосредственно из априорной оценки сильных решений (3) следует, что каждое сильное решение задачи Коши (1), (2) (соответственно (4), (2)) почти всюду на $]0,T[$ совпадает с некоторой функцией $u \in C^{(1)}([0,T],H)$. Выясним, когда эта функция u почти всюду на $]0,T[$ имеет вторую производную по t, суммируемую с квадратом в шкале гильбертовых пространств $W^q(t)$.

Теорема 3. *Пусть выполняются предположения теоремы 2, для некоторого $q \ge 1$ $D(A^{(q+1)/2}(t)) \neq \{\emptyset\}$, $t \in \Theta \cup 0$, существуют сильные регулярные производные $d^iA^{-q/2}(t)/dt^i \in L_\infty(]0,T[,\mathcal{L}(H))$, $i = 1,2$, такие, что*

$$dA^{-q/2}(t)/dt \in L_\infty(]0,T[,\mathcal{L}(H,W^q(t))) \cap L_\infty(]0,T[,\mathcal{L}(W^1(t),W^1(t))),$$

$$B(t)(dA^{-q/2}(t)/dt), d^2A^{-q/2}(t)/dt^2 \in L_\infty(]0,T[,\mathcal{L}(W^1(t),W^q(t))),$$

$$B(t) \in L_\infty(]0,T[,\mathcal{L}(W^{q+1}(t),W^q(t))) \cap L_\infty(]0,T[,\mathcal{L}(W^q(t),W^{q-1}(t))),$$

$$B(t)A^{-q/2}(t)(dA^{-1}(t)/dt) \in L_\infty(]0,T[,\mathcal{L}(H,W^q(t))),$$

и $-\mathrm{Re}\,(A^{q/2}(t)B(t)A^{-q/2}(t)v,v) \le c_7|v|^2$ $\forall v \in D(A(t)), c_7 \ge 0$, $-\mathrm{Re}\,(A^{q/2}(t)B(t)A^{-q/2}(t)v,A(t)v) \le c_8|A^{1/2}(t)v|^2$ $\forall v \in D(A(t))$, $c_8 \ge 0$, $|(A^{q/2}(t)B(t)A^{-q/2}(t)(dA^{-1}(t)/dt)g,v)| \le c_9|g||A^{-1/2}(t)v|$ $\forall g,v \in H, c_9 \ge 0$. Если $f \in L_2(]0,T[,W^q(t))$, $\varphi \in W^{q+1}(0)$ и $\psi \in W^q(0)$, то задача Коши (1), (2) имеет единственное сильное решение $u \in E$ такое, что $u(t) \in D(A^{(q+1)/2}(t))$ при почти всех $t \in]0,T[$, $u \in L_\infty(]0,T[,W^{q+1}(t))$, $du/dt \in L_\infty(]0,T[,W^q(t))$ и $d^2u/dt^2 \in L_2(]0,T[,W^{q-1}(t))$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную задачу Коши

$$\widetilde{\mathcal{L}}w \equiv d^2w/dt^2 + A^{q/2}(t)B(t)A^{-q/2}(t)(dw/dt) + A(t)w + A^{q/2}(t)B(t)\big(dA^{-q/2}(t)/dt\big)w+$$
$$+2A^{q/2}(t)\big(dA^{-q/2}(t)/dt\big)(dw/dt) + A^{q/2}(t)\big(d^2A^{-q/2}(t)/dt^2\big)w = \widetilde{f}, \tag{5}$$
$$l_0w \equiv w|_{t=0} = \widetilde{\varphi}, \quad l_1w \equiv (dw/dt)|_{t=0} = \widetilde{\psi}, \tag{6}$$

где $\widetilde{f} = A^{q/2}(t)f$, $\widetilde{\varphi} = A^{q/2}(0)\varphi$ и $\widetilde{\psi} = A^{q/2}(0)\psi - A^{q/2}(0)(dA^{-q/2}(0)/dt)A^{q/2}(0)\varphi$. Поскольку $\widetilde{f} \in \in L_2(]0,T[,H)$, $\widetilde{\varphi} \in W^1(0)$ и $\widetilde{\psi} \in H$, а операторные коэффициенты $A(t), A^{q/2}(t)B(t)A^{-q/2}(t)$, $\widetilde{A}(t) = A^{q/2}(t)B(t)(dA^{-q/2}(t)/dt) + A^{q/2}(t)(d^2A^{-q/2}(t)/dt^2)$ и $\widetilde{B}(t) = 2A^{q/2}(t)(dA^{-q/2}(t)/dt)$ удовлетворяют всем предположениям теоремы 2 и замечания 1 нашей работы, то существует единственное сильное решение $w \in E$ задачи (5), (6). По определению сильного решения w является решением операторного уравнения $\overline{\widetilde{L}}w \equiv \{\overline{\widetilde{\mathcal{L}}}w, l_0w, l_1w\} = \widetilde{\mathcal{F}}$, $\widetilde{\mathcal{F}} = \{\widetilde{f}, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}\} \in F$, в котором $\overline{\widetilde{\mathcal{L}}}$ – замыкание оператора $\widetilde{\mathcal{L}} : E \supset D(L) \to L_2(]0,T[,H)$.

Просто доказывается

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$ – два банахова пространства. Если $T_1 : \mathcal{E} \to \mathcal{H}$ – линейный оператор, допускающий замыкание $\overline{T_1}$, $S_1 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ – линейный ограниченный оператор и их произведение $S_1 \cdot T_1 : \mathcal{E} \to \mathcal{H}$ допускает замыкание $\overline{S_1 \cdot T_1}$, то $S_1 \cdot \overline{T_1} \subset \overline{S_1 \cdot T_1}$.*

Применяя лемму 1 в случае $\mathcal{E} = E$, $\mathcal{H} = L_2(]0,T[,H)$, $T_1 = \widetilde{\mathcal{L}}$ и $S_1 = A^{-q/2}(t)$, имеем включение

$$A^{-q/2}(t)\overline{\widetilde{\mathcal{L}}} \subset \overline{A^{-q/2}(t)\widetilde{\mathcal{L}}}. \tag{7}$$

Легко убедиться в том, что

$$A^{-q/2}(t)\widetilde{\mathcal{L}}w = \mathcal{L}A^{-q/2}(t)w \quad \forall w \in D(L). \tag{8}$$

Просто доказывается

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$ – два банахова пространства. Если $S_1 : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ – линейный ограниченный оператор, $T_1 : \mathcal{E} \to \mathcal{H}$ – линейный оператор, допускающий замыкание $\overline{T_1}$, то их произведение $T_1 \cdot S_1 : \mathcal{E} \to \mathcal{H}$ допускает замыкание $\overline{T_1 \cdot S_1}$ и $\overline{T_1 \cdot S_1} \subset \overline{T_1} \cdot S_1$.*

Применяя лемму 2 в случае $\mathcal{E} = E$, $\mathcal{H} = L_2(]0,T[,H)$, $T_1 = \mathcal{L}$ и $S_1 = A^{-q/2}(t)$, имеем включение

$$\overline{\mathcal{L}A^{-q/2}(t)} \subset \overline{\mathcal{L}}A^{-q/2}(t). \tag{9}$$

На основании соотношений (7)–(9) делаем вывод о том, что $\overline{\mathcal{L}}A^{-q/2}(t)w = f$ и, как показывает непосредственная проверка, что $l_0(A^{-q/2}(t)w) = \varphi$ и $l_1(A^{-q/2}(t)w) = \varphi$. В силу теоремы единственности сильных решений отсюда следует равенство $u = A^{-q/2}(t)w$. Поскольку $w \in E$, то из последнего равенства вытекает, что $u(t) \in D(A^{(q+1)/2}(t))$ при почти всех $t \in]0,T[$, $A^{(q+1)/2}(t)u$, $A^{q/2}(t)(du/dt) \in \in L_\infty(]0,T[,H)$, а это в свою очередь вместе с уравнением (1) означает, что $A^{(q-1)/2}(t)(d^2u/dt^2) \in \in L_2(]0,T[,H)$. Теорема 3 доказана.

Следствие. *Пусть выполняются предположения теоремы 3 и еще дополнительно $\widetilde{A}(t) \in \in L_\infty(]0,T[,\mathcal{L}(W^{q+1}(t),W^q(t)))$, $\widetilde{B}(t) \in L_\infty(]0,T[,\mathcal{L}(W^q(t),W^q(t)))$. Тогда утверждение теоремы 3 справедливо для задачи Коши (4), (2).*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.

Замечание 2. Условие $q \geq 1$ используется лишь для доказательства замыкаемости оператора $\widetilde{\mathcal{L}}$. На практике, как правило, его замыкаемость имеет место при $q \geq 0$ и в каждой конкретной задаче может быть легко доказана непосредственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ломовцев Ф.Е.* // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 5. С. 877–886.
2. *Ломовцев Ф.Е.* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 8. С. 1412–1425.
3. *Ломовцев Ф.Е.* // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 4. С. 542–548.
4. *Ломовцев Ф.Е.* // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 7. С. 1132–1141.
5. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1967.

Белорусский государственный университет

Поступила в редакцию
05.04.1999 г.